Vorlesung:
Grundlagen der axiomatischen Mengenlehre
WS 1999/2000

Prof. Dr. Ronald Jensen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der axiomatischen Mengenlehre behandelt. Die axiomatische Mengenlehre unterscheidet sich von der naiven Mengenlehre dadurch, daß sie in einer prädikatenlogischen Sprache (kurz PL-Sprache) formalisiert wird, was die Mengenlehre für die Methoden der Logik zugänglich macht und damit auch alle anderen Gebiete der Mathematik, da sie natürlich in Rahmen der Mengenlehre aufzubauen sind.

Als erstes werden wir in dieser Vorlesung die Logik bringen, um die Mengenlehre in einer PL-Sprache formalisieren zu können. Dann werden wir die Grundlagen der axiomatischen Mengenlehre eingeführt. Dabei gehen wir davon aus, daß der Leser mit der naiven Mengenlehre vertraut ist.

Hier werden wir das ZERMELO-FRAENKEL-Axiomsystem (ZF) der Mengenlehre verwenden. Die ZF-Axiome sind beinah unumstritten unter Mathematikern – sie beschreiben einfach unseren intuitiven Begriff von Mengen. Zum Beispiel ist X eine Menge, so sollte die Klasse aller Teilmengen von X ebenfalls eine Menge sein. Dies wird von dem Potenzmengenaxiom ausgedrückt. Anders ist das bei dem Auswahlaxiom (AC). Es ist zwar durch unsere Erfahrung mit endlichen Mengen zu rechtfertigen, aber auf unendlichen Mengen angewandt hat es unserer Intuition widersprechende Folgerungen, z.B. die Existenz von Teilmengen von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die nicht LEBESGUE-meßbar sind.

Auch die CANTORsche Kontinuumshypothese (CH) hat nicht-intuitive Konsequenzen in ZF + AC (hierfür schreiben wir auch ZFC). Aber unter $\neg$CH gibt es eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die weder abzählbar noch mit $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist – auch ein schwer vorstellbares Objekt. Das erste der berühmten HILBERTschen Pobleme forderte einen Beweis der Kontinuumshypothese.

Schließlich haben GÖDEL und COHEN 1938 bzw. 1963 gezeigt, daß dieses Problem in ZF nicht lösbar ist. Mit Hilfe der *konstruktiblen* Mengen bewies GÖDEL, daß die Widerspruchsfreiheit von ZF die von ZF + AC + CH impliziert. Dazu sagt man: ZF + AC + CH ist *relativ konsistent* zu ZF. Mit seiner *Erzwingungsmethode* bewies COHEN die relative Konsistenz von ZF + $\neg$AC und ZF + $\neg$CH bzgl. ZF. Das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese sind also *unabhängig* von ZF.

Im letzten Abschnitt dieser Vorlesung werden wir uns um den Nachweis der relativen Konsistenz von ZF + AC bzgl. ZF bemühen.

Schreibweise

Wir verwenden die üblichen Zeichen $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (wenn, dann), $\leftrightarrow$ (genau dann, wenn), $\neg$ (nicht). Hierbei ist der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Formel (z.B. $\varphi \wedge \psi$) durch die Wahrheitswerte der Komponenten bestimmt, wie aus den folgenden "Wahrheitstafeln" hervorgeht. (Hierbei ist $1 =$ wahr, $0 =$ falsch):

φ	$\wedge$	ψ ,	φ	$\vee$	ψ ,	φ	$\rightarrow$	ψ ,	φ	$\leftrightarrow$	ψ ,	$\neg$	φ .
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0		

Außerdem benutzen wir die *Quantoren* $\bigwedge$ (für alle), $\bigvee$ (es gibt). Die Aussage $\bigwedge x\varphi(x)$ bedeutet also, daß die Bedingung φ auf alle x zutrifft. $\bigvee x\varphi(x)$ bedeutet, daß φ auf mindestens ein x zutrifft.

Wir benutzen die mengentheoretischen Zeichen $\in$ (Elementsein) und $\subset$ (Inklusion). (Also bedeutet $X \subset Y$ dasselbe wie $\bigwedge z(z \in X \rightarrow z \in Y)$.)
$\{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichnet die Menge, die genau die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ hat. $\{x \mid \varphi(x)\}$ ist die Menge aller x, die die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllen. Wie in der Mengenlehre üblich bezeichnet ω die Menge der natürlichen Zahlen, also $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Wir benutzen auch die Boolesche Schreibweise: $A \cap B = \{z \mid z \in A \wedge z \in B\}$, $A \cup B = \{z \mid z \in A \vee z \in B\}$, $A \setminus B = \{z \mid z \in A \wedge z \notin B\}$. Ist eine Famile von Mengen A_i $(i \in I)$ gegeben, so setzen wir:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{z \mid \bigvee i \in I \quad z \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \{z \mid \bigwedge i \in I \quad z \in A_i\}$$

n-Tupeln $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ sind grundsätzlich von n-er-Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu unterscheiden und haben die Eigenschaft, daß zwei n-Tupeln genau dann gleich sind, wenn sie komponentenweise gleich sind:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \longleftrightarrow x_i = y_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Weitere Eigenschaften von n-Tupeln brauchen wir nicht. In diesem Sinne adäquate Tupelbegriffe lassen sich im Rahmen der Mengenlehre leicht definieren.)

Eine *n-stellige Relation* ist eine Menge von n-Tupeln. Wir schreiben dann auch $Rx_1 \ldots x_n$ für $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in R$. Für $n = 2$ schreiben wir auch $x\,R\,y$ statt $\langle x, y\rangle \in R$. Eine *Funktion* ist eine 2-stellige Relation F mit einer Eindeutigkeitsbedingung:

$$\bigwedge x, y, z\,(zFx \wedge yFx \rightarrow z = y).$$

Wir schreiben dann: $F(x) =$ dasjenige y mit yFx, falls es ein solches y gibt. x heißt dann *Argument* von F und $F(x)$ der *Wert* von F an der Stelle x.

Die Menge aller möglichen Argumente nennt man den *Definitionsbereich* (oder "domain") von F: $\mathrm{dom}(F) = \{x \mid \bigvee y \;\; y = F(x)\}$. Die Menge aller Werte heißt *Wertebereich* (oder "range"): $\mathrm{rng}(F) = \{F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F)\}$.

Das *Produkt* FG zweier Funktionen F, G ist die Funktion H mit
$\mathrm{dom}(H) = \{x \mid x \in \mathrm{dom}(G) \wedge G(x) \in \mathrm{dom}(F)\}$ und $H(x) = F(G(x))$. Die *Beschränkung*

$F \upharpoonright A$ von F auf eine Menge $A \subset \mathrm{dom}(F)$ ist die Funktion H mit $\mathrm{dom}(H) = A$ und $H(x) = F(x)$ für $x \in A$.
Sei nun F eine Funktion. Wir nennen F eine *Abbildung von A in B* ($F : A \to B$) gdw. $A = \mathrm{dom}(F)$, $B \supset \mathrm{rng}(F)$. Sei nun $F : A \to B$. F ist eine Abbildung *auf* B (oder *Surjektion*), wenn $B = \mathrm{rng}(F)$. F ist eine *Injektion in* B gdw. F *eineindeutig* ist – d.h. $F(x) = F(z) \to x = z$ für alle $x, z \in A$. (Wir schreiben dann auch: $F : A \xrightarrow{1-1} B$). Ist F sowohl eine Surjektion wie eine Injektion, so nennen wir F eine *Bijektion* und schreiben: $F : A \longleftrightarrow B$. Jede eineindeutige Funktion F hat eine *Umkehrfunktion* F^{-1}, die definiert ist durch: $\mathrm{dom}(F^{-1}) = \mathrm{rng}(F)$; $\;y = F(x) \longleftrightarrow x = F^{-1}(y)$.

Unter einer *n-stelligen Funktion* verstehen wir eine Funktion, deren Definitionsbereich aus n-Tupeln besteht. Ist F n-stellig, so schreiben wir auch $F(x_1, \ldots, x_n)$ statt $F(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$. Ist zu jedem Element x einer Menge A ein Objekt $t(x)$ zugeordnet, so bezeichnet $\{t(x) \mid x \in A\}$ die Menge aller zugeordneten Objekte – d.h.
$\{t(x) \mid x \in A\} = \{y \mid \bigvee x \in A \quad y = t(x)\}$. (Wir haben diese Schreibweise bereits oben verwendet.) Die Menge $\{t(x) \mid x \in A\}$ ist jedoch nicht zu verwechseln mit der *Familie* $\langle t(x) \mid x \in A\rangle$, denn hiermit bezeichnen wir die Zuordnung selbst: $\langle t(x) \mid x \in A\rangle$ ist die Funktion F mit $\mathrm{dom}(F) = A$ und $F(x) = t(x)$ für $x \in A$. Für die Menge der natürlichen Zahlen $\omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ ist $\{2n \mid n \in \omega\}$ die Menge der geraden Zahlen und $\langle 2n \mid n \in \omega\rangle$ die monotone Aufzählung der geraden Zahlen. Mit dieser Schreibweise können wir ein Paar von den obigen Definitionen umformulieren:

$$\begin{aligned} FG &= \langle F(G(x)) \mid x \in \mathrm{dom}(G) \wedge G(x) \in \mathrm{dom}(F)\rangle \\ F \upharpoonright A &= \langle F(x) \mid x \in A\rangle \quad \text{für } A \subset \mathrm{dom}(F). \end{aligned}$$

Das *Cartesische Produkt* zweier Mengen ist definiert durch:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A,\, y \in B\}.$$

Etwas allgemeiner für $n \geq 2$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Wir setzen auch: $A^n = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{n}$.

Kapitel 1

Aussagenlogik

1.1 Zeichenreihen

Die *Zeichenreihen* (oder “Wörter”) werden durch Aneinanderreihung aus den *Grundzeichen* (oder “Alphabet”) gebildet. Wir haben also eine Struktur $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, E, ^\frown \rangle$, wobei $^\frown$ (Aneinanderreihung) eine Operation auf die Elemente von $\mathbb{Z}$ ist und E (Menge der Grundzeichen) die Menge $\mathbb{Z}$ erzeugt. Die Annahmen, die wir über diese Struktur machen, lassen sich ganz abstrakt formulieren: $\mathbb{Z}$ ist eine *freie Halbgruppe* mit *freien Erzeugenden* E. Dies läßt sich durch die folgenden Axiome ausdrücken:

(a) $(x^\frown y)^\frown z = x^\frown(y^\frown z)$.

Im folgenden schreiben wir xy statt $x^\frown y$ und verzichten wegen (a) auf Klammerung in Ausdrücken wir xyz.

(b) Jedes $z \in \mathbb{Z}$ hat die Form

$$z = e_1 \dots e_n \quad \text{wobei} \quad e_1, \dots, e_n \in E.$$

(c) Sei $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_m \in E$. Dann

$$e_1 \dots e_n = e'_1 \dots e'_m \quad \text{gdw.} \quad n = m \text{ und } e_i = e'_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Der Bequemlichkeit halber setzen wir auch voraus, daß es eine “leere” Zeichenreihe $\emptyset$* gibt mit:

(d) $z\emptyset = \emptyset z = z$.

((b) gilt dann für $z = \emptyset$ mit $n = 0$).
Damit wir uns nicht zu sehr einengen, setzen wir auch voraus, daß die Menge E der Grundzeichen unendlich ist. Weitere Voraussetzungen über die Zeichenreihen werden wir nicht machen.

*Das Symbol $\emptyset$ bezeichnet auch die leere Menge.

1.2 Aussagenlogische Formeln

Unter den Grundzeichen E spezifizieren wir fünf *Junktoren* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ und zwei *Klammern* (,). Außerdem sei eine Menge $A \subset E$ von *Primaussagen* gegeben. (Natürlich sind die Zeichen $\wedge, \vee, \ldots, \neg, (,)$ voneinander distinkt sowie von den Elementen von A.) Wir verwenden die Buchstaben $p, q, r, \ldots$ als Variablen für Primaussagen.

[**Bemerkung** Nach dieser Konvention werden die Symbole $\wedge, \vee, \ldots, (,)$ in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet. Zum einen werden sie inhaltlich verwendet wie in:

(1.1) $(z \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Z}) \longrightarrow zw \in \mathbb{Z}.$

Zum anderen werden sie aber als Namen für bestimmte Zeichen benutzt. In der Regel wird es aus dem Zusammenhang erkennbar sein, in welchem Sinne wir sie verwenden. Verwechslungen sind jedoch nicht auszuschließen. Setzen wir in der obigen Formel $z = \rightarrow$ und $w = \wedge$, so haben wir z.B.

(1.2) $(\rightarrow \in \mathbb{Z} \wedge \wedge \in \mathbb{Z}) \rightarrow \rightarrow \wedge \in \mathbb{Z}.$

An solchen Stellen versehen wir also die Symbole $\wedge, \vee, \ldots, (,)$ mit einem Punkt: $\dot\wedge, \dot\vee, \ldots, \dot(, \dot)$, wenn sie als Namen benutzt werden. Die unverständliche Formel (1.2) wird dann zu:

(1.3) $(\dot\rightarrow \in \mathbb{Z} \wedge \dot\wedge \in \mathbb{Z}) \rightarrow \dot\rightarrow\dot\wedge \in \mathbb{Z}$]

Durch die Menge A ist eine *aussagenlogische Sprache* gekennzeichnet. Die *Formeln* (oder *Aussagen*) dieser Sprache setzen sich vermittels der Junktoren aus den Primaussagen zusammen:

Definition $\mathrm{Fml} = \mathrm{Fml}_A$ ist die kleinste Menge F mit:

(a) $A \subset F$

(b) $\varphi \in F \rightarrow \neg\varphi \in F$

(c) $\varphi, \psi \in F \rightarrow (\varphi\, e\, \psi) \in F$ für $e = \wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow$.

Wir verwenden $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ als Variablen für Formeln. Aus dieser Definition ergibt sich das folgende *Induktionsprinzip* für Formeln:

(1.4) Sei B eine Bedingung, die auf jedes $p \in A$ zutrifft. Außerdem sei: $B(\varphi) \rightarrow B(\neg\varphi)$ und $B(\varphi) \wedge B(\psi) \rightarrow B((\varphi\, e\, \psi))$ $(e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ für alle φ, ψ. Dann trifft B auf alle Formeln zu.

(Beweis. $\{\varphi \mid B(\varphi)\}$ hat Eigenschaften (a), (b), (c). Fml ist aber die kleinste solche Menge.)

Eine wichtige Eigenschaft der Formeln ist die *eindeutige Lesbarkeit*, die u.a. besagt, daß $(\varphi \wedge \psi)$ nicht mit einer Formel der Gestalt $(\varphi' \vee \psi')$ verwechselt werden kann:

(1.5) Seien $e, e' \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann

(i) $(\varphi\, e\, \psi) = (\varphi'\, e'\, \psi') \rightarrow e = e',\ \varphi = \varphi',\ \psi = \psi'$

(ii) $\neg\varphi = \neg\psi \rightarrow \varphi = \psi$

(iii) $(\varphi\, e\, \psi) \neq \neg\chi$

(iv) $p \neq (\varphi\, e\, \psi), \quad p \neq \neg\chi.$

Den Beweis dieses Satzes bringen wir in einem Anhang. Ein weitergehender Satz ist der *Rekursionssatz*, der besagt, daß man eine Funktion auf den Formeln definieren kann, indem man zuerst für alle Primaussagen den Wert festlegt und dann bei zusammengesetzten Aussagen den Wert durch Zurückführung auf die Werte der unmittelbaren Komponenten definiert. Ein anloges Prinzip ist der Rekursionssatz für die natürlichen Zahlen ω:

(1.6) Sei $a \in B$, $G : \omega \times B \to B$. Es gibt genau ein $F : \omega \to B$ mit:

$$F(0) = a, \quad F(n+1) = G(n, F(n)).$$

Der *Rekursionssatz für Formeln* lautet:

(1.7) Sei $H : A \to B$, $G_\neg : \mathrm{Fml} \times B \to B$, und $G_e : \mathrm{Fml}^2 \times B^2 \to B$ für $e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Es gibt genau ein $F : \mathrm{Fml} \to B$ mit: $F(p) = H(p)$; $F(\neg\varphi) = G_\neg(\varphi, F(\varphi))$; $F(\varphi\, e\, \psi) = G_e(\varphi, \psi, F(\varphi), F(\psi))$ für $e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

(Dieser Satz wird in der Mengenlehre bewiesen. Gewöhnlich wird er auf einen noch allgemeineren Rekursionssatz für fundierte Relationen zurückgeführt. Im Anhang zu diesem Kapitel skizzieren wir auch diese Zurückführung.)

Als Beispiele erwähnen wir:

(1.8) $\mathrm{prim}(\varphi)$ = die Menge der in φ vorkommenden Primaussagen wird definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{prim}(p) &= \{p\} \\ \mathrm{prim}(\neg\varphi) &= \mathrm{prim}(\varphi) \\ \mathrm{prim}(\varphi\, e\, \psi) &= \mathrm{prim}(\varphi) \cup \mathrm{prim}(\psi) \end{aligned}$$

(1.9) $\varphi({}^p/_\psi) =$ das Ergebnis der Ersetzung von p durch ψ in φ:

$$q({}^p/_\psi) = \begin{cases} \psi & \text{falls } q = p \\ q & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\neg\varphi)({}^p/_\psi) = \neg(\varphi({}^p/_\psi))$$

$$(\varphi\, e\, \psi)({}^p/_\psi) = (\varphi({}^p/_\psi)\, e\, \psi({}^p/_\psi)).$$

(1.10) $\mathrm{vor}_p(\varphi) =$ Anzahl der Stellen, an denen p in φ vorkommt:

$$\mathrm{vor}_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{vor}_p(\neg\varphi) = \mathrm{vor}_p(\varphi)$$

$$\mathrm{vor}_p(\varphi\, e\, \psi) = \mathrm{vor}_p(\varphi) + \mathrm{vor}_p(\psi)$$

(1.11) $\mathrm{vor}_\neg(\varphi) =$ Anzahl der Stellen, an denen $\neg$ in φ vorkommt:

$$\mathrm{vor}_\neg(q) = 0$$

$$\mathrm{vor}_\neg(\neg\varphi) = \mathrm{vor}_\neg(\varphi) + 1$$

$$\mathrm{vor}_\neg(\varphi\, e\, \psi) = \mathrm{vor}_\neg(\varphi) + \mathrm{vor}_\neg(\psi)$$

($\mathrm{vor}_e(\varphi)$ $(e \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,)\})$ wird ähnlich definiert.)

1.3 Interpretationen

Ein *Modell* oder *Interpretation* $\mathfrak{A}$ einer aussagenlogischen Sprache A ist eine Festlegung der Wahrheitswerte (0 oder 1) von allen Primaussagen – d.h. $\mathfrak{A} : A \to \{0,1\}$. Unter Verwendung des Rekursionssatzes definieren wir dann eine Abbildung $\mathfrak{A}^* : \mathrm{Fml} \to \{0,1\}$ durch:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^*(p) &= \mathfrak{A}(p)\\
\mathfrak{A}^*(\neg\varphi) &= 1 - \mathfrak{A}^*(\varphi)\\
\mathfrak{A}^*(\varphi \vee \psi) &= \max(\mathfrak{A}^*(\varphi), \mathfrak{A}^*(\psi))\\
\mathfrak{A}^*(\varphi \wedge \psi) &= \min(\mathfrak{A}^*(\varphi), \mathfrak{A}^*(\psi))\\
\mathfrak{A}^*(\varphi \to \psi) &= \max(1 - \mathfrak{A}^*(\varphi), \mathfrak{A}^*(\psi))\\
\mathfrak{A}^*(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{A}^*(\varphi) = \mathfrak{A}^*(\psi)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

(Im folgenden werden wir oft $\mathfrak{A}(\varphi)$ statt $\mathfrak{A}^*(\varphi)$ schreiben, da auf Grund der ersten Zeile der obigen Definition keine Verwechslung entstehen kann.)
Setzt man dann: $\mathfrak{A} \vDash \varphi \underset{\mathrm{Df}}{\leftrightarrow} \mathfrak{A}(\varphi) = 1$, so folgt:

Lemma 1.3.0

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \vDash p \longleftrightarrow \mathfrak{A}(p) = 1\\
&\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \longleftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi\\
&\mathfrak{A} \vDash (\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \mathfrak{A} \vDash \psi)\\
&\mathfrak{A} \vDash (\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi \vee \mathfrak{A} \vDash \psi)\\
&\mathfrak{A} \vDash (\varphi \to \psi) \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \mathfrak{A} \vDash \psi)\\
&\mathfrak{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi).
\end{aligned}$$

[**Bemerkung** Wir folgen der üblichen Konvention, indem wir 0, 1 als Wahrheitswerte verwenden. Es ist aber gewissermaßen eleganter, -1 und 1 zu verwenden:
Setze $\sigma(0) = -1$, $\sigma(1) = 1$, $\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi) = \sigma\mathfrak{A}(\varphi)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi \vee \psi) = \max(\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi), \tilde{\mathfrak{A}}(\psi))\\
&\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi \wedge \psi) = \min(\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi), \tilde{\mathfrak{A}}(\psi))\\
&\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi \to \psi) = \max(-\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi), \tilde{\mathfrak{A}}(\psi))\\
&\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{\mathfrak{A}}(\varphi) \cdot \tilde{\mathfrak{A}}(\psi)\\
&\tilde{\mathfrak{A}}(\neg\varphi) = -\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi).
\end{aligned}$$

Hieraus ersieht man z.B., daß

$$\mathfrak{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi),$$

denn beide Seiten dieser Äquivalenz werden interpretiert durch $\tilde{\mathfrak{A}}(\varphi)\cdot\tilde{\mathfrak{A}}(\psi)\cdot\tilde{\mathfrak{A}}(\chi)$. Ebenfalls gilt $\mathfrak{A} \vdash \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ wegen $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.]

Wir definieren dann:

Definition $\models \varphi$ gdw. $\bigwedge \mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \models \varphi$.

$\models \varphi$ heißt "φ ist logisch gültig" oder "φ ist eine Tautologie".

Ist W eine Formelmenge, so setzen wir:

Definition $\mathfrak{A} \models W$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\varphi \in W$.

Definition $W \models \varphi$ gdw. $\bigwedge \mathfrak{A}(\mathfrak{A} \models W \rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi)$.

Ist U auch eine Formelmenge, so schreiben wir gelegentlich auch:

Definition $W \models U$ gdw. $W \models \varphi$ für alle $\varphi \in U$.

Offensichtlich haben wir: $\models \varphi \ \longleftrightarrow\ \emptyset \models \varphi \ \longleftrightarrow\ \bigwedge \mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \models \varphi$.

Lemma 1.3.1 *Die folgenden Formeln sind Tautologien:*

(a) $\varphi \rightarrow \varphi, \quad \neg\varphi \vee \varphi, \quad \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

(b) $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

(c) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

(d) $((\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \quad ((\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi)$

(e) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$

(f) $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$

(g) $((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$

(h) $((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi))$

(i) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(j) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

(k) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

(l) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

(m) $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(n) $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi))$

(o) $((\psi \vee \chi) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\chi \rightarrow \varphi))$

(p) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

(q) $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

(r) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(s) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

(t) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(u) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

(v) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

(f), (g), (h) heißen die *Assoziativgesetze*;
(i), (j), (k) heißen die *Kommutativgesetze*;
(l), (m), (n) heißen die *Distributivgesetze*;
(q), (r) heißen die *de Morganschen Gesetze*.

Um festzustellen, ob eine Formel eine Tautologie ist, kann man eine *Wahrheitstafel* aufstellen. Hierbei schreibt man alle Belegungen der Komponenten mit 0, 1 und berechnet bei jeder Belegung den Wert der ganzen Formel. Als Beispiel:

φ	ψ	$(\varphi$	$\wedge$	$(\varphi$	$\to$	$\psi))$	$\to$	φ
1	1		1		1		1	
0	1		0		1		1	
1	0		0		0		1	
0	0		0		1		1	

Diese Formel ist eine Tautologie, weil bei allen möglichen Interpretationen der Komponenten die ganze Formel den Wert 1 erhält.

Meist kann man einsehen, daß eine Tautologie vorliegt, ohne die ganze Wahrheitstafel hinzuschreiben. Wäre z.B. die Formel (c) keine Tautologie, so gäbe es ein Modell $\mathfrak{A}$, welches den Prämiss wahr und die Conclusio falsch macht. Wir hätten also $\mathfrak{A}(\varphi \to \chi) = 0$. Folglich $\mathfrak{A}(\varphi) = 1$ und $\mathfrak{A}(\chi) = 0$. Wir können uns also auf die partielle Tafel beschränken:

φ	ψ	χ	$((\varphi$	$\to$	$\psi)$	$\wedge$	$(\psi$	$\to$	$\chi))$	$\to$	$(\varphi$	$\to$	$\chi)$
1	1	0		1		0		0		1		0	
1	0	0		0		0		1		1		0	

Bei den Äquivalenzen (e) – (t) brauchen wir uns nur zu überzeugen, daß beide Seiten bei allen möglichen Interpretationen den gleichen Wert bekommen.

Das *Modus Ponens* Prinzip besagt:

Lemma 1.3.2 *Sei $W \models \varphi$, $W \models (\varphi \to \psi)$. Dann $W \models \psi$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models W$. Dann $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$. Folglich $\mathfrak{A} \models \varphi \to \mathfrak{A} \models \psi$. Also $\mathfrak{A} \models \psi$.
QED(Lemma 1.3.2)

Auf ähnliche Weise folgt:

Lemma 1.3.3 *$W \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw. $W \models \varphi$ und $W \models \psi$.*

Wir schreiben $W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ für $W \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$. Der *Deduktionssatz* besagt:

Lemma 1.3.4 $W \models (\varphi \to \psi)$ *gdw.* $W, \varphi \models \psi$.

Beweis. $(\to)$ Sei $\mathfrak{A} \models W, \varphi$. Dann $\mathfrak{A} \models \varphi \to \mathfrak{A} \models \psi$ Also $\mathfrak{A} \models \psi$.
$(\leftarrow)$ Sei $\mathfrak{A} \models W$. Dann $\mathfrak{A} \models \varphi \to \mathfrak{A} \models \psi$. Also $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$. QED(Lemma 1.3.4)

Eine etwas allgemeinere Form ist:

Lemma 1.3.5 $W \models ((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ *gdw.* $W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Lemma 1.3.6 *Sei* $p \notin \mathrm{prim}(W) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{\varphi \in W} \mathrm{prim}(\varphi)$. *Sei* $W \models \varphi$. *Dann* $W \models \varphi(p/\chi)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models W$.
Behauptung. $\mathfrak{A} \models \varphi(p/\chi)$.
$\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{p,\chi}$ sei definiert durch:

$$\bar{\mathfrak{A}}(q) = \begin{cases} \mathfrak{A}^*(\chi) & \text{falls } q = p \\ \mathfrak{A}(q) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Induktion auf φ folgt: $\bar{\mathfrak{A}}^*(\varphi) = \mathfrak{A}^*(\varphi(p/\chi))$. Insbesondere $\bar{\mathfrak{A}}^*(\psi) = \mathfrak{A}^*(\psi) = 1$ für $\psi \in W$, da $\psi(p/\chi) = \psi$. Also $\bar{\mathfrak{A}} \models W$. Also $\bar{\mathfrak{A}} \models \varphi$. Folglich $\mathfrak{A}^*(\varphi(p/\chi)) = \bar{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$.
QED(Lemma 1.3.6)

Lemma 1.3.7 $\models (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\chi(p/\varphi) \leftrightarrow \chi(p/\psi))$

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
Behauptung. $\mathfrak{A} \models (\chi(p/\varphi) \leftrightarrow \chi(p/\psi))$
Setze $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{p,\varphi}$ (wie in Lemma 1.3.6). Da $\mathfrak{A}^*(\varphi) = \mathfrak{A}^*(\psi)$ folgt: $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{p,\psi}$.
Also: $\mathfrak{A}^*(\chi(p/\varphi)) = \bar{\mathfrak{A}}(\chi) = \mathfrak{A}(\chi(p/\psi))$. QED(Lemma 1.3.7)

1.4 Axiomatisierung der Aussagenlogik

Ein wesentlicher Zug der Mathematik ist die *Verifizierbarkeit* der mathematischen Behauptungen. Behauptet ein Mathematiker einen Satz, so legt er auch einen Beweis vor. Beweise sind *berechenbar* in dem Sinne, daß man anhand eines Algorithmus feststellen kann, ob die Beweisschritte richtig durchgeführt sind. Wenn ja, so liegt wirklich ein Beweis vor und die Behauptung wird geglaubt. Wenn nicht, können wir wegen mangelnder Verifizierung die Behauptung noch nicht glauben. Bei Behauptungen in einigen sehr einfachen Theorien kann man freilich auf das Vorlegen eines Beweises verzichten, weil die Menge der richtigen Aussagen selber berechenbar ist. So ist z.B. die Menge der Tautologien berechenbar, denn zu einem gegebenen φ kann man anhand einer Wahrheitstafel ausrechnen, ob φ eine Tautologie ist oder nicht. Bei komplizierteren Theorien ist dies aber keineswegs der Fall. Selbst wenn eine Formelmenge W berechenbar ist, so folgt nicht, daß $\{\varphi \mid W \models \varphi\}$ auch berechenbar ist. Das beste, was wir erhoffen können, ist einen Begriff von *Beweis* zu finden, derart, daß

$$W \models \varphi \;\text{ gdw. Es gibt einen Beweis von }\; \varphi.$$

Hierbei soll die Menge der Beweise natürlich wieder berechenbar sein. Gilt also $W \vDash \varphi$, so gibt es die Möglichkeit, φ durch Auffindung eines Beweises zu verifizieren. Im allgemeinen gibt es aber keinen Algorithmus für $\{\varphi \mid W \vDash \varphi\}$ (und auch keinen Beweisbegriff).

Wir wollen jetzt im Sinne der obigen Diskussion einen Begriff der *Beweisbarkeit* (oder *Herleitbarkeit*) einer Formel φ aus einer Formelmenge W entwickeln. Zunächst nennen wir die folgenden Formeln *Axiome*:

A1 $\varphi \to (\psi \to \psi), \quad \neg(\psi \to \psi) \to \varphi$

A2 $\varphi \to (\psi \to \varphi), \quad \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

A3 $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi, \quad (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

A4 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

A5 $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi, \quad (\varphi \wedge \psi) \to \psi$

A6 $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to (\psi \to \chi))) \to (\varphi \to \chi)$

A7 $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

A8 $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

A9 $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

A10 $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

Die Menge der Axiome ist offensichtlich berechenbar, denn man kann durch Anschauung der Komponenten feststellen, ob eine Formel die Gestalt A1 – A10 hat. (Alternativ hierzu hätten wir auch sämtliche Tautologien als unsere Axiome nehmen können – sie sind ebenfalls berechenbar und es stellt sich heraus, daß sich genau dieselben Aussagen aus beiden Axiomsystemen herleiten lassen.)

Wir benutzen in der Aussagenlogik eine Deduktionsregel, nämlich das Prinzip *Modus Ponens*:

(MP) Aus φ und $\varphi \to \psi$ folgt ψ.

Wir definieren dann:

Definition. $W \vdash \varphi$ ("φ ist aus W herleitbar") gdw. $\varphi \in W^*$, wobei
$W^* =$ die kleinste Menge mit:

(a) Alle Axiome sind in W^*

(b) $W \subset W^*$

(c) W^* ist unter (MP) abgeschlossen (d.h. $(\varphi \in W^*$ und $\varphi \to \psi \in W^*) \to \psi \in W^*)$.

Aus dieser Definition folgt dann:

Lemma 1.4.1 *Sei X eine Formelmenge mit:* Axiome $\cup\, W \subset X$ *und X ist unter (MP) abgeschlossen. Dann $\{\varphi \mid W \vdash \varphi\} \subset X$.*

Wir definieren auch:

Definition. $\vdash \varphi \longleftrightarrow_{\text{Df}} \emptyset \vdash \varphi$
($\vdash \varphi$ besagt also, daß φ nur aus den Axiomen herleitbar ist.)

Definition. Sei U eine Formelmenge.

$$W \vdash U \longleftrightarrow_{\text{Df}} \bigwedge \varphi \in U \quad W \vdash \varphi.$$

Korollar 1.4.2 *$W \vdash U$ und $U \vdash \varphi \rightarrow W \vdash \varphi$.*

Beweis. Setze $W^* = \{\psi \mid W \vdash \psi\}$. Dann Axiome $\cup U \subset W^*$ und W^* ist abgeschlossen unter (MP). Also $\varphi \in \{\psi \mid U \vdash \psi\} \subset W^*$. QED(Korollar 1.4.2)

Unser Herleitbarkeitsbegriff ist *richtig* in dem Sinne, daß aus W nur Formeln herleitbar sind, die aus W logisch folgen:

Lemma 1.4.3 (Richtigkeit) $W \vdash \varphi \rightarrow W \models \varphi$.

Beweis. Setze $W^* = \{\varphi \mid W \models \varphi\}$. Dann

(1) Axiome $\subset W^*$,

denn jedes Axiom ist eine Tautologie, wie sich leicht nachweisen läßt (vgl. Lemma 1.3.1).

(2) $W \subset W^*$ (trivial).

(3) W^* ist unter (MP) abgeschlossen nach Lemma 1.3.2. QED(Lemma 1.4.3)

Wir führen jetzt den Begriff des Beweises ein.

Definition. Ein *Beweis* einer Formel φ aus einer Formelmenge W ist eine Folge $b = \langle b_i \mid i < n \rangle$ mit:

(a) $\bigvee i \quad \varphi = b_i$.

(b) Für $i < n$ gilt eine der folgenden Bedingungen:

  (i) b_i ist ein Axiom oder $b_i \in W$.

  (ii) $\bigvee h, j < i \quad b_j = (b_h \rightarrow b_i)$

  (d.h. b_i folgt aus früheren b_h, b_j durch (MP)).

Ist W selber berechenbar, so ist offensichtlich auch die Menge der Beweise berechenbar.

Lemma 1.4.4 *$W \vdash \varphi \leftrightarrow$ Es gibt einen Beweis für φ aus W.*

Beweis. ($\leftarrow$) Sei $b = \langle b_i \mid i < n \rangle$ ein Beweis von φ aus W. Durch Induktion auf i folgt: $W \models b_i$.

($\rightarrow$) Setze: $\bar{W} = \{\varphi \mid \varphi$ hat einen Beweis aus $W\}$. Dann $W \cup$ Axiome $\subset \bar{W}$. Zu zeigen bleibt:

Behauptung. $\bar{W}$ ist unter (MP) abgeschlossen.
Sei $\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \in \bar{W}$. Sei insbesondere $b = \langle b_i \mid i < n \rangle$ ein Beweis von φ und $b' = \langle b'_i \mid i < m \rangle$ ein Beweis von $(\varphi \rightarrow \psi)$. $\langle \tilde{b} \mid i < m + n + 1 \rangle$ sei definiert durch:

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} b_i & \text{falls } i < n \\ b'_{i-n} & \text{falls } n \leq i < n + m \\ \psi & \text{falls } i = n + m. \end{cases}$$

$\tilde{b}$ ist dann ein Beweis von ψ aus W. QED(Lemma 1.4.4)

Hieraus gewinnen wir den *Endlichkeitssatz*:

Korollar 1.4.5 *Sei $W \vdash \varphi$. Es gibt dann ein endliches $U \subset W$ mit $U \vdash \varphi$.*

Beweis. Sei $b = \langle b_i \mid i < n \rangle$ ein Beweis von φ aus W. Setze $U = \{b_i \mid b_i \in W\}$. b ist dann ein Beweis von φ aus U. QED(Korollar 1.4.5)

1.5 Der Vollständigkeitssatz

Im vorigen Abschnitt haben wir einen Herleitungsbegriff $\vdash$ definiert unter Angabe von *Axiomen* und *Beweisregeln*. Die Wahl der Axiome und Regeln war zwangsläufig etwas willkürlich. In der Literatur gibt es viele analog definierte Herleitungsbegriffe $\vdash'$, die alle äquivalent sind in dem Sinne, daß $\{\varphi \mid W \vdash \varphi\} = \{\varphi \mid W \vdash' \varphi\}$ für alle W. In diesem Abschnitt beweisen wir:

$$(*) \qquad W \vdash \varphi \longleftrightarrow W \models \varphi.$$

Die Richtung $(\rightarrow)$ ist der Richtigkeitssatz (Lemma 1.4.3). $(\leftarrow)$ heißt der *Vollständigkeitssatz*. Dieser Satz befreit uns gewissermaßen von der "Tyrannei des Kalküls".
Um festzustellen, daß $W \vdash \varphi$, brauchen wir nicht mehr an ein bestimmtes System von Axiomen und Regeln zu denken. Es genügt, durch ein inhaltliches Argument zu zeigen, daß jede Interpretation, die W wahr macht, auch φ wahr macht.

Bevor wir den Vollständigkeitssatz beweisen können, müssen wir eine Reihe von vorbereitenden Lemmata beweisen.

Lemma 1.5.1 *$W \vdash \varphi$ und $W \vdash \psi \longleftrightarrow W \vdash (\varphi \wedge \psi)$.*

Beweis. $(\leftarrow)$ $W \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow W \vdash \varphi, \psi$ nach A5, (MP).
$(\rightarrow)$ Sei $W \vdash \varphi, \psi$. Nach A4, (MP) ist $W \vdash (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.
Nach (MP) ist dann $W \vdash \varphi \wedge \psi$. QED(1.5.1)

Lemma 1.5.2

$$\begin{aligned} W \vdash \varphi &\rightarrow W \vdash \chi \rightarrow \varphi \\ W \vdash \varphi &\rightarrow W \vdash \neg\varphi \rightarrow \chi \end{aligned}$$

Beweis. Nach A2, (MP).

Lemma 1.5.3 *$W \vdash \varphi \rightarrow \varphi$*

Beweis. Sei ψ ein Axiom. Dann $W \vdash \psi$. Also $W \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ nach A1, (MP). QED

Definition. $W, \chi_1, \ldots, \chi_n \vdash \varphi \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} W \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \vdash \varphi$.

Der Deduktionssatz für $\vdash$ besagt:

Lemma 1.5.4 *$W \vdash \varphi \rightarrow \psi$ gdw. $W, \varphi \vdash \psi$.*

Beweis. $(\rightarrow)$ $W, \varphi \vdash \varphi$, $W, \varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$; also $W, \varphi \vdash \psi$ nach (MP).
$(\leftarrow)$ Setze $\bar{W} = \{\psi \mid W \vdash \varphi \rightarrow \psi\}$. Wir behaupten: $W, \varphi \vdash \psi \rightarrow \psi \in \bar{W}$.
Es genügt zu zeigen:
(a) $W \cup \{\varphi\} \cup$ Axiome $\subset \bar{W}$
(b) $\bar{W}$ ist unter (MP) abgeschlossen.

(a) $W \cup$ Axiome $\subset \bar{W}$, denn $W \vdash \psi \rightarrow W \vdash \varphi \rightarrow \psi$ nach Lemma 1.5.2. $\varphi \in \bar{W}$ nach Lemma 1.5.3

(b) Sei $W \vdash \varphi \to \psi$, $W \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$. Dann $W \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to (\psi \to \chi))$ nach Lemma 1.5.1. Also $W \vdash (\varphi \to \chi)$ nach A6, (MP). QED(Lemma 1.5.4)

Definition. W ist *widerspruchsfrei* (*konsistent*) gdw. $\bigvee \varphi\, W \nvdash \varphi$.

Hierfür schreiben wir auch: $\mathrm{con}(W)$.

Lemma 1.5.5 $\mathrm{con}(W) \longleftrightarrow W \nvdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Beweis. ($\leftarrow$) trivial.
($\rightarrow$) Sei $W \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Dann $W \vdash \chi$ für alle χ nach A1, (MP). Also $\neg\mathrm{con}(W)$. QED(Lemma 1.5.5)

Lemma 1.5.6 $\mathrm{con}(W) \longleftrightarrow (W \nvdash \varphi \vee W \nvdash \neg\varphi)$

Beweis. ($\leftarrow$) trivial.
($\rightarrow$) Sei $W \vdash \varphi$, $W \vdash \neg\varphi$. Dann $W \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \chi)$ nach A4. Also $W \vdash \neg\varphi \to \chi$ nach (MP) und $W \vdash \chi$ nach (MP). QED(Lemma 1.5.6)

Wenn wir einen Satz beweisen wollen, so ist es üblich, die Negation vorauszusetzen, um daraus einen Widerspruch herzuleiten. Dieses Verfahren heißt *Indirekter Beweis*. Das Prinzip des indirekten Beweises besagt:

Lemma 1.5.7

$$W \vdash \varphi \longleftrightarrow \neg\mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\})$$
$$W \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{con}(W \cup \{\varphi\})$$

Beweis. ($\rightarrow$) $W \vdash \varphi \;\to\; W, \neg\varphi \vdash \varphi, \neg\varphi \;\to\; \neg\mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\})$
($\leftarrow$) $\neg\mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\}) \;\to\; W, \neg\varphi \vdash \varphi \;\to\; W \vdash \neg\varphi \to \varphi \;\to\; W \vdash \varphi$
nach A5, (MP) QED(Lemma 1.5.7)

Lemma 1.5.8 $\mathrm{con}(W) \to \mathrm{con}(W \cup \{\varphi\}) \vee \mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\})$.

Beweis. Angenommen nicht.
Dann $W \vdash \neg\varphi$, $W \vdash \varphi$ nach Lemma 1.5.7. Also $\neg\mathrm{con}(W)$ nach Lemma 1.5.6. Widerspruch! QED

Lemma 1.5.9 *Sei* $W \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. *Dann ist:* $W \vdash \varphi \leftrightarrow W \vdash \psi$.

Beweis. $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ nach A7, (MP). Also $\vdash (\varphi \to \psi)$ nach Lemma 1.5.1. Also $\vdash \varphi \to \vdash \psi$ nach (MP). $\vdash \psi \to \vdash \varphi$ ist analog. QED(Lemma 1.5.9)

Definition. Eine *Kette* ist eine Menge K von Mengen mit:

$$X, Y \in K \to (X \subset Y \vee Y \subset X).$$

Lemma 1.5.10 *Sei K eine Kette von Formelmengen mit:* $W \in K \to \mathrm{con}(W)$.
Setze: $\bar{W} = \bigcup_{W \in K} W$. *Dann* $\mathrm{con}(\bar{W})$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann $\bar{W} \vdash p \wedge \neg p$. Also $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash p \wedge \neg p$, wobei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \bar{W}$ nach dem Endlichkeitssatz. Wähle $W_1, \ldots, W_n \in K$ mit: $\varphi_i \in W_i$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_n$. Also $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in W_n$. Also $W_n \vdash p \wedge \neg p$. Also $\neg\mathrm{con}(W_n)$. Widerspruch! QED(Lemma 1.5.10)

Um den Vollständigkeitssatz zu beweisen, setzen wir ein bekanntes Axiom der Mengenlehre voraus, nämlich das *Auswahlaxiom* (Axiom of choice):

(AC) Sei X eine Menge von nicht leeren Mengen. Es gibt eine *Auswahlfunktion* F in dem Sinne, daß $\mathrm{dom}(F) = X$ und $F(z) \in z$ für $z \in X$.

Eine hierzu äquivalente Aussage ist das *Zornsche Lemma* (ZL). Um ZL zu formulieren, definieren wir zunächst:

Definition. X ist *kettenabgeschlossen* gdw. $\bigcup_{z \in K} z \in X$ für jede nicht leere Kette $K \subset X$.

Das Zornsche Lemma besagt:

(ZL) $X \neq \emptyset$ sei kettenabgeschlossen. Es gibt $z \in X$, welches *maximal* ist bez. $\subset$ (d.h. es gibt kein $z' \supsetneqq z$ mit $z' \in X$).

Unter Verwendung von ZL beweisen wir jetzt den *Vollständigkeitssatz* in der Form:

Satz 1.5.11 *(Unter der Voraussetzung AC) Sei* $\mathrm{con}(W)$. *Dann existiert* $\mathfrak{A}$ *mit* $\mathfrak{A} \models W$.

Beweis. Setze $X = \{W' \mid W \subset W' \wedge \mathrm{con}(W')\}$. X ist kettenabgeschlossen nach Lemma 1.5.10. Sei $\bar{W} \in X$ maximal. Dann:

(1) $\quad \varphi \in \bar{W} \vee \neg\varphi \in \bar{W}$ für alle φ.

Beweis. Sonst $\neg\mathrm{con}(\bar{W} \cup \{\varphi\})$ und $\neg\mathrm{con}(\bar{W} \cup \{\neg\varphi\})$, da sonst $\bar{W}$ nicht maximal ist in X. Also $\neg\mathrm{con}(\bar{W})$ nach Lemma 1.5.8. Also $\bar{W} \notin X$. Widerspruch! QED(1)

(2) $\quad \varphi \in \bar{W} \longleftrightarrow \bar{W} \vdash \varphi$

Beweis. $(\rightarrow)$ trivial.
$(\leftarrow)$ $\varphi \notin \bar{W} \rightarrow \neg\varphi \in \bar{W} \rightarrow \bar{W} \nvdash \varphi$ QED(2)

Nach (1), (2) folgt:

(3) $\quad \bar{W} \vdash \neg\varphi \longleftrightarrow \bar{W} \nvdash \varphi, \qquad \bar{W} \vdash \varphi \longleftrightarrow \bar{W} \vdash \neg\varphi$

Wir wissen:

(4) $\quad \bar{W} \vdash (\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\bar{W} \vdash \varphi \wedge \bar{W} \vdash \psi)$

Folglich:

(5) $\quad \bar{W} \vdash (\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\bar{W} \vdash \varphi \vee \bar{W} \vdash \psi)$

Beweis. $\neg(\bar{W} \vdash \varphi \vee \bar{W} \vdash \psi) \leftrightarrow (\bar{W} \vdash \neg\varphi \wedge \bar{W} \vdash \neg\psi) \;\leftrightarrow\; \bar{W} \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \;\leftrightarrow\; \bar{W} \nvdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \;\leftrightarrow\; \bar{W} \nvdash (\varphi \vee \psi)$ nach A8, Lemma 1.5.9. QED(5)

(6) $\bar{W} \vdash (\varphi \to \psi) \;\longleftrightarrow\; (\bar{W} \vdash \varphi \;\to\; \bar{W} \vdash \psi)$

Beweis. $(\bar{W} \vdash \varphi \to \bar{W} \vdash \psi) \leftrightarrow (\bar{W} \nvdash \varphi \vee \bar{W} \vdash \psi) \leftrightarrow (\bar{W} \vdash \neg\varphi \vee \bar{W} \vdash \psi) \leftrightarrow \bar{W} \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \bar{W} \vdash (\varphi \to \psi)$ nach A9, Lemma 1.5.9. QED(6)

(7) $\bar{W} \vdash (\varphi \longleftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\bar{W} \vdash \varphi \longleftrightarrow \bar{W} \vdash \psi)$

Beweis. $(\bar{W} \vdash \varphi \leftrightarrow \bar{W} \vdash \psi) \leftrightarrow (\bar{W} \vdash \varphi \to \bar{W} \vdash \psi) \wedge (\bar{W} \vdash \psi \to \bar{W} \vdash \varphi)$
$\leftrightarrow \bar{W} \vdash \varphi \to \psi \wedge \bar{W} \vdash \psi \to \varphi$ nach (6)
$\leftrightarrow \bar{W} \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ nach Lemma 1.5.1
$\leftrightarrow \bar{W} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ nach A10, Lemma 1.5.9 QED(7)

Setze: $\mathfrak{A}(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \bar{W} \\ 0 & \text{falls } p \notin \bar{W}. \end{cases}$

Dann $\mathfrak{A} \models p \leftrightarrow \bar{W} \vdash p$. Vergleichen wir nun (3) – (7) mit Lemma 1.3.0, so folgt durch Induktion auf $\varphi : \bar{W} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$.
Also $\mathfrak{A} \models \bar{W}$ und $\mathfrak{A} \models W$, da $w \subset \bar{W}$. QED(Satz 1.5.11)

Korollar 1.5.12 $W \vdash \varphi \leftrightarrow W \models \varphi$.

Beweis. $(\to)$ nach Lemma 1.4.3.
$(\leftarrow)$ $W \nvdash \varphi \to \mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\}) \to \bigvee \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \models W \cup \{\neg\varphi\} \to W \not\models \varphi$. QED

Korollar 1.5.13 $\mathrm{con}(W) \leftrightarrow \bigvee \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \models W$.

Beweis. $\neg\mathrm{con}(W) \;\leftrightarrow\; W \vdash p \wedge \neg p \;\leftrightarrow\; W \models p \wedge \neg p \;\leftrightarrow\; \bigwedge \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \not\models W$. QED

Unter gewissen Umständen können wir den Vollständigkeitssatz ohne AC beweisen. Dies gilt z.B., wenn es eine Aufzählung der Formeln durch die natürlichen Zahlen gibt. Wir definieren:

Definition. Eine Menge X heiße *abzählbar* gdw. es ein $F : \omega \leftrightarrow X$ gibt.

Korollar 1.5.14 *Sei* Fml *abzählbar. Dann gilt der Vollständigkeitssatz.*

Beweis. Sei $\mathrm{con}(W)$. Es genügt – genau wie oben – eine maximal widerspruchsfreie Formelmenge $\bar{W} \supset W$ zu finden.
Sei $\mathrm{Fml} = \{\varphi_i \mid i \in \omega\}$. Durch Rekursion auf i definieren wir:

$$W_0 = W; \quad W_{i+1} = \begin{cases} W_i \cup \{\varphi_i\} & \text{falls } \mathrm{con}(W_i \cup \{\varphi_i\}), \\ W_i \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Induktion auf i folgt, daß W_i widerspruchsfrei ist. $\bar{W} = \bigcup_i W_i$ ist dann widerspruchsfrei nach Lemma 1.5.10. $\bar{W}$ ist aber auch maximal, denn für $W' \supsetneqq \bar{W}$, $\varphi \in W' \setminus \bar{W}$ folgt $\neg\varphi \in \bar{W}$. Also $\neg\mathrm{con}(W')$. QED(Korollar 1.5.14)

1.6 Aussagenlogische Sprachen

Eine *aussagenlogische Sprache* ist durch die Menge A gegeben, aus der die Formeln gebildet werden. Bisher haben wir mit einer festen Sprache A gearbeitet. Die Begriffe: Modell, $\models$, $\vdash$, con waren alle in Abhängigkeit von A definiert. Wollen wir also über verschiedene Sprachen diskutieren, so müssen wir schreiben: Modell *von* $A, \underset{A}{\models}, \underset{A}{\vdash}, \mathrm{con}_A$. Gewissermaßen können diese Begriffe jedoch in Unabhängigkeit von der Sprache verwendet werden, wie die folgenden Sätze zeigen. Wir setzen im folgenden immer eine Gesamtsprache A voraus und betrachten Teilsprachen $\bar{A} \subset A$. Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von A (d.h. $\mathfrak{A} : A \to \{0,1\}$), so ist offensichtlich $\mathfrak{A} \restriction \bar{A}$ ein Modell von $\bar{A}$.

Lemma 1.6.1 *Sei $\bar{A} \subset A$, $\mathfrak{A} : A \to \{0,1\}$, $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \restriction \bar{A}$. Dann $\bar{\mathfrak{A}} \underset{\bar{A}}{\models} \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \underset{A}{\models} \varphi$ für $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\bar{A}}$.*

Beweis. Induktion auf φ.

Lemma 1.6.2 *Seien $\bar{A}$, A wie oben. Sei $W \subset \mathrm{Fml}_{\bar{A}}$. Dann $\mathrm{con}_{\bar{A}}(W) \leftrightarrow \mathrm{con}_A(W)$.*

Beweis. $(\leftarrow)$ Sei $\mathrm{con}_A(W)$. Dann hat A ein Modell $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models W$. Also $\mathfrak{A} \restriction \bar{A} \models W$ nach Lemma 1.6.1. Also $\mathrm{con}_{\bar{A}}(W)$.
$(\to)$ Sei $\mathrm{con}_{\bar{A}}(W)$. $\bar{A}$ hat ein Modell $\bar{\mathfrak{A}}$ mit $\bar{\mathfrak{A}} \models W$. Setze:

$$\mathfrak{A}(p) = \begin{cases} \bar{\mathfrak{A}}(p) & \text{falls } p \in \bar{A}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \restriction \bar{A}$ und $\mathfrak{A} \models W$ nach Lemma 1.6.1. Also $\mathrm{con}_A(W)$. QED(Lemma 1.6.2)

Korollar 1.6.3 *Seien $\bar{A}$, A wie oben, $W \cup \{\varphi\} \subset \mathrm{Fml}_{\bar{A}}$. Dann*

$$W \underset{\bar{A}}{\vdash} \varphi \longleftrightarrow W \underset{A}{\vdash} \varphi$$

Beweis. $W \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{con}(W \cup \{\neg\varphi\})$ QED

Wir benutzen die Abkürzung $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ für $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ (insbesondere $\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1$).

Definition. Eine Formel φ ist in *disjunktiver Normalform* gdw. $\varphi = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij}$, wobei jedes p_{ij} die Gestalt hat: $p_{ij} = q$ oder $\neg q$ für ein $q \in A$.

Lemma 1.6.4 *Zu jedem φ existiert ein $\bar{\varphi}$ in disjunktiver Normalform mit: $\vdash \varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$.*

Beweis. Sei $\bar{A} = \mathrm{prim}(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_m\}$.
Fall 1: $\vdash \neg\varphi$. Setze $\bar{\varphi} = p_1 \wedge \neg p_1$. Dann $\mathfrak{A}^*(\varphi) = \mathfrak{A}^*(\bar{\varphi}) = 0$ für alle $\mathfrak{A}$. Also $\vdash \varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$.
Fall 2: Fall 1 versagt. Sei $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$ die Menge der Modelle $\mathfrak{A}$ von $\bar{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$. (Diese Menge ist offensichtlich endlich und nicht leer.)
Setze: $p_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{falls } \mathfrak{A}_i(p_j) = 1 \\ \neg p_j & \text{sonst} \end{cases}$ für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Dann:

$\mathfrak{A}(p_{ij}) = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A}(p_j) = \mathfrak{A}_i(p_j)$. Folglich $\mathfrak{A}(\bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij}) = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_i$, für Modelle $\mathfrak{A}$ von $\bar{A}$. Folglich: $\mathfrak{A} \models \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \leftrightarrow \bigvee i = 1, \ldots, n \;\; \mathfrak{A} \models \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \leftrightarrow \mathfrak{A} \in \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m\} \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$. Also gilt die Behauptung mit $\bar{\varphi} = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij}$. QED(Lemma 1.6.4)

Definition. Eine Formel φ ist in *konjunktiver Normalform* gdw. $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$ und die p_{ij} wie oben sind.

Lemma 1.6.5 *Zu jedem φ gibt es ein $\bar{\varphi}$ in konjunktiver Normalform mit $\vdash \varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$.*

Der Beweis ist dem Leser überlassen.

Ein tiefer Satz über das Verhältnis von aussagenlogischen Sprachen ist das *Craigsche Interpolationslemma*:

Lemma 1.6.6 *Sei $\vdash \varphi \to \psi$, $A_0 = \mathrm{prim}(\varphi)$, $A_1 = \mathrm{prim}(\psi)$. Eine der folgenden Aussagen trifft zu:*

(a) *$A_0 \cap A_1 = \emptyset$ und $\vdash \neg\varphi$ oder $\vdash \psi$.*

(b) *$A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$ und es gibt $\chi \in \mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1}$ mit: $\vdash \varphi \to \chi$, $\vdash \chi \to \psi$.*

Wir leiten den Interpolationssatz aus einem anderen Satz ab, den wir *Trennungssatz* nennen.

Definition. Sei $W_h \subset \mathrm{Fml}_h$ $(h = 0, 1)$, wobei $A_0 \cup A_1 \subset A$. W_0, W_1 heißen *getrennt* bez. A_0, A_1 gdw.

(a) $\mathrm{con}(W_0)$, $\mathrm{con}(W_1)$

(b) Es gibt kein $\varphi \in \mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1}$ mit: $W_0 \vdash \varphi$, $W_1 \vdash \neg\varphi$.

Bemerkungen:

(i) Ist $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, so ist Getrenntheit äquivalent mit (a), denn (b) ist trivial wahr wegen $\mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1} = \emptyset$.

(ii) Ist $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$, so ist Getrenntheit äquivalent mit (b), denn (a) folgt aus (b). (Aus $\neg\mathrm{con}(W_0)$ folgt $W_0 \vdash p \wedge \neg p$, $W_1 \vdash \neg(p \wedge \neg p)$, wobei $p \in A_0 \cap A_1$.)

Der *Trennungssatz* besagt:

Lemma 1.6.7 *Sei W_0, W_1 getrennt bez. A_0, A_1. Dann $\mathrm{con}(W_0 \cup W_1)$.*

Bevor wir Lemma 1.6.7 beweisen, zeigen wir, daß Lemma 1.6.6 daraus folgt: Wenn nicht, dann sind $W_0 = \{\varphi\}$, $W_1 = \{\neg\psi\}$ getrennt bez. $A_0 = \mathrm{prim}(\varphi)$, $A_1 = \mathrm{prim}(\psi)$. Es gibt also ein $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi, \neg\psi$. also $\mathfrak{A} \not\models (\varphi \to \psi)$. Also $\not\vdash \varphi \to \psi$. Widerspruch!QED(Lemma 1.6.6)

Der Beweis des Trennungssatzes verwendet das Auswahlaxiom. (Allerdings werden wir sehen, daß AC überflüssig ist, wenn A_0, A_1 endlich sind. Somit ist das Interpolationslemma ohne AC beweisbar.) Nach dem Muster des Vollständigkeitssatzes beweisen wir zuerst:

Lemma 1.6.8 *(Unter der Voraussetzung AC) Es gibt ein maximales widerspruchsfreies $\bar{W} \supset W_0$ derart, daß $\bar{W}$, W_1 getrennt sind bez. A_0, A_1.*

Beweis. Setze $X = \{\bar{W} \mid W_0 \subset \bar{W} \wedge \bar{W}, W_0 \text{ sind getrennt}\}$.

(1) X ist kettenabgeschlossen.

Beweis. Sei $K \subset X$ eine Kette, $K \neq \emptyset$. Sei $\bar{W} = \bigcup_{W' \in K} W'$. Sei $\bar{W}$, W_1 nicht getrennt. Dann $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$, da $\mathrm{con}(\bar{W})$. Sei $\bar{W} \vdash \varphi$, $W_1 \vdash \neg\varphi$, $\varphi \in \mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1}$. Dann $U \vdash \varphi$ für ein endliches $U \subset \bar{W}$. Also $U \subset W'$ für $W' \in K$. Also $W' \notin X$. Widerspruch! QED(1)

(2) Sei $W \in X$, $\varphi \in \mathrm{Fml}_{A_0}$. Dann ist $W \cup \{\varphi\} \in X$ oder $W \cup \{\neg\varphi\} \in X$.

Beweis. Angenommen nicht. Da $W \cup \{\varphi\}$ oder $W \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist, folgt, daß $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$ und es gibt $\psi, \chi \in \mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1}$ mit:

$$\begin{aligned} W \cup \{\varphi\} &\vdash \psi, & W_0 &\vdash \neg\psi \\ W \cup \{\neg\varphi\} &\vdash \chi, & W_0 &\vdash \neg\chi. \end{aligned}$$

Also $W \vdash (\psi \vee \chi)$, $W_0 \vdash \neg(\psi \vee \chi)$. Also $W \notin X$. Widerspruch! QED(2)

Nach ZL existiert also ein maximales $\bar{W} \in X$. $\bar{W}$ ist also widerspruchsfrei. $\bar{W}$ ist also ein maximales widerspruchsfreies System, denn sonst ist $\bar{W} \subsetneqq W$, W widerspruchsfrei. Sei $\varphi \in W \setminus \bar{W}$. Dann $\neg\varphi \in \bar{W}$ nach (2), da $\bar{W}$ maximal in X ist. Also $W \vdash \varphi, \neg\varphi$.
Widerspruch! QED(Lemma 1.6.8)

Sei nun $\bar{W}_0$ maximal widerspruchsfrei mit: $\bar{W}_0$, W_1 getrennt. Da W_1, $\bar{W}_0$ bez. A_1, A_0 getrennt sind, muß es nach Lemma 1.6.8 ein maximales widerspruchsfreies $\bar{W}_1 \supset W_1$ geben, derart, daß $\bar{W}_0$, $\bar{W}_1$ getrennt sind. Dann:

(1) $\varphi \in \mathrm{Fml}_{A_0 \cap A_1} \to (\bar{W}_0 \vdash \varphi \leftrightarrow \bar{W}_1 \vdash \varphi)$

Beweis. Sonst wäre z.B. $\bar{W}_0 \vdash \varphi$, $\bar{W}_1 \vdash \neg\varphi$. QED(1)

$\mathfrak{A} : A \to \{0, 1\}$ sei nun definiert durch:

$$\mathfrak{A}(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \bar{W}_0 \cup \bar{W}_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genau wie im Beweis des Vollständigkeitssatzes folgt durch Induktion auf φ:

(2) $\mathfrak{A} \models \varphi \longleftrightarrow \bar{W}_h \models \varphi$ für $\varphi \in \mathrm{Fml}_{A_h}$.

Also $\mathfrak{A} \models \bar{W}_0 \cup \bar{W}_1$. Also $\mathfrak{A} \models W_0 \cup W_1$, da $W_h \subset \bar{W}_h$. Also $\mathrm{con}(W_0 \cup W_1)$.QED(Lemma 1.6.7)

Genau wie beim Beweis des Vollständigkeitssatzes können wir in Lemma 1.6.8 die Annahme AC ersetzen durch: Fml_{A_0} ist abzählbar. Lemma 1.6.7 folgt also ohne AC, wenn Fml_{A_0} und Fml_{A_1} abzählbar sind. Es gilt aber:

Tatsache Sei $\bar{A} \subset A$, $\bar{A} \neq \emptyset$ mit $\bar{A}$ endlich oder abzählbar. Dann ist $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$ abzählbar.

Wir beweisen diese Tatsache in §1.6. Da A_0, A_1 endlich waren im Beweis des Interpolationslemmas, so folgt, daß dieses Lemma ohne AC beweisbar ist.

1.7 Abzählbarkeit

Der in §1.4 eingeführte Begriff der Abzählbarkeit spielt in der Logik und überhaupt in der Mathematik eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt bringen wir einige grundlegende Sätze über Abzählbarkeit.

Definition. Zwei Mengen X, Y sind *gleichzahlig* oder *gleichmächtig* ($X \sim Y$) gdw. $\bigvee F \;\; F : X \leftrightarrow Y$.

Lemma 1.7.1

(a) $X \sim X$

(b) $X \sim Y \leftrightarrow Y \sim X$

(c) $X \sim Y \sim Z \rightarrow X \sim Z$.

(Der Beweis ist dem Leser überlassen.)

Nach unserer früheren Definition ist also X abzählbar gdw. $X \sim \omega$.

Definition. X ist *höchstens abzählbar* (h.a.) gdw. X endlich oder abzählbar ist.

Lemma 1.7.2 *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(a) X *ist h.a.*

(b) $X = \emptyset$ *oder es gibt* $F : \omega \xrightarrow{\text{auf}} X$

(c) *Es gibt* $F : X \xrightarrow{1-1} \omega$.

Beweis. (a) $\to$ (b) trivial für X abzählbar. Sei nun X endlich und $X \neq \emptyset$. Dann $X = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. Setze:

$$F(i) = \begin{cases} x_i & \text{für } i < n \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $F : \omega \xrightarrow{\text{auf}} X$.

(b) $\to$ (c) $X = \emptyset$ ist trivial, da $\emptyset : \emptyset \xrightarrow{1-1} \omega$. Sei $F : \omega \xrightarrow{\text{auf}} X$. Für $x \in X$ setze $G(x) = \min\{i \mid F(i) = x\}$. Dann $G : X \xrightarrow{1-1} \omega$.

(c) $\to$ (a) Sei X unendlich. Wir behaupten, daß X abzählbar ist. Sei $F : X \xrightarrow{1-1} \omega$, $U = \{F(x) \mid x \in X\}$. Da $F : X \leftrightarrow U$, ist $X \sim U$ und wir brauchen nur zu zeigen:

Behauptung. U ist abzählbar.

Die *monotone Aufzählung* von U ist definiert durch: $G(0) = \min U$,
$G(i+1) = \min\{j \in U \mid i > G(i)\}$. $G(i)$ ist immer definiert, denn sonst wäre
$U = \{G(0), \ldots, G(i-1)\}$ endlich. Also $G : \omega \leftrightarrow U$. QED(Lemma 1.7.2)

Korollar 1.7.3 *Sei $F : X \xrightarrow{1-1} Y$, wobei Y h.a. ist. Dann ist X h.a. (Insbesondere ist $X \subset Y$ h.a.)*

Beweis. Sei $G : Y \xrightarrow{1-1} \omega$. Dann $FG : X \xrightarrow{1-1} \omega$. QED

Korollar 1.7.4 *Seien X, Y h.a. $X \cup Y$ ist dann h.a.*

Beweis. Sei $F : X \xrightarrow{1-1} \omega$, $G : Y \xrightarrow{1-1} \omega$. Setze

$$H(z) = \begin{cases} 2 \cdot F(z) & \text{für } z \in X \\ 2 \cdot G(z) + 1 & \text{für } z \in Y \setminus X. \end{cases}$$

Dann $H : X \cup Y \xrightarrow{1-1} \omega$. QED

Jede Zeichenreihe $z \in \mathbb{Z}$ hat die Gestalt $z = e_1 \ldots, e_n$, wobei $e_1, \ldots, e_n \in E$.

Definition. Sei $\bar{E} \subset E$. $\mathbb{Z}(\bar{E})$ = die Menge aller $z = e_1 \ldots, e_n$ mit $e_1, \ldots, e_n \in \bar{E}$.

Lemma 1.7.5 *Sei $\emptyset \neq \bar{E} \subset E$, wobei $\bar{E}$ h.a. ist. $\mathbb{Z}(\bar{E})$ ist dann abzählbar.*

Beweis. Setze: $p_i =$ die i-te Primzahl (mit $p_0 = 1$). Dann gilt:

(1) $p_1^{n_1+1} \cdot \ldots \cdot p_h^{n_h+1} = p_1^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k+1} \longleftrightarrow (h = k \text{ und } n_i = m_i \text{ für } i = 1, \ldots, h)$

In $\mathbb{Z}(\bar{E})$ gilt:

(2) $e_1 \ldots, e_h = e'_1 \ldots, e'_h \longleftrightarrow (h = k \text{ und } e_i = e'_i \text{ für } i = 1, \ldots, h)$

Sei $G : \bar{E} \xrightarrow{1-1} \omega$. $F : \mathbb{Z}(\bar{E}) \to \omega$ sei definiert durch:

$$F(e_1 \ldots e_h) = p_1^{G(e_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_h^{G(e_h)+1}.$$

Nach (1), (2) ist F injektiv. $\mathbb{Z}(\bar{E})$ ist also h.a. Aber $\mathbb{Z}(\bar{E})$ ist unendlich, denn e, ee, eee usw. sind distinkte Elemente für $e \in \bar{E}$. QED(Lemma 1.7.5)

Wir beweisen jetzt die am Schluß von §1.5 behauptete Tatsache:

Korollar 1.7.6 *Sei $\emptyset \neq \bar{A} \subset A$, wobei $\bar{A}$ h.a. ist.* $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$ *ist dann abzählbar.*

Beweis. $\mathrm{Fml}_{\bar{A}} \subset \mathbb{Z}(\bar{A} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, (,)\})$, wobei $\bar{A} \cup \{\wedge, \ldots,)\}$ h.a. ist nach Korollar 1.7.4. Folglich ist $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$ h.a. $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$ ist aber unendlich, denn für $p \in \bar{A}$ sind $p, p \wedge p, p \wedge p \wedge p, \ldots$ usw. distinkte Elemente von $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$. QED

Lemma 1.7.7 *Seien $B_1, \ldots, B_m$ h.a. $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$ ist dann h.a.*

Beweis. Sei $F_i : B_i \xrightarrow{1-1} \omega$ für $i = 1, \ldots, m$. $F : B_1 \times \ldots \times B_m \to \omega$ sei definiert durch $F(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = p_1^{F_1(x_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{F_n(x_n)+1}$. Wie vorhin folgt, daß F injektiv ist. QED

Lemma 1.7.8 *Sei $F : X^n \xrightarrow{\text{auf}} Y$, wobei X h.a. ist. Y ist dann h.a.*

Beweis. $X = \emptyset \to Y = \emptyset$. Sei nun $X \neq \emptyset$, $H : \omega \xrightarrow{\text{auf}} X$. Sei $G : \omega \leftrightarrow \omega^n$. Für $h \in \omega$ setze: $G(h) = \langle G_1(h), \ldots, G_n(h) \rangle$. Setze: $F(h) = F(HG_1(h), \ldots, HG_n(h))$. Dann $F : \omega \xrightarrow{\text{auf}} Y$. QED

Lemma 1.7.9 *Sei X_i h.a. für $i \in \omega$. Dann ist $\bigcup_i X_i$ h.a.*

Beweis. Sei $F_i : X_i \xrightarrow{1-1} \omega$. Sei $G : \omega^2 \leftrightarrow \omega$. Für $x \in \bigcup_i X_i$ setze:
$i(x) =$ das kleinste i mit $x \in X_i$,
$F(x) = G(i(x), F_{i(x)}(x))$. Dann $F : \bigcup_i X_i \xrightarrow{1-1} \omega$. QED

Bemerkung. Der Beweis von 1.7.8 verwendet AC um die Folge $\langle F_i \mid i \in \omega \rangle$ auszuwählen.

Lemma 1.7.10 *Sei $F_i : X^{n_i} \to X$ für $i \in \omega$. Sei $U \subset X$ h.a. Sei $\bar{U} =$ das kleinste $\bar{U} \subset X$ mit $U \subset \bar{U}$ und $\bar{U}$ unter F_i abgeschlossen für $i \in \omega$. Dann ist $\bar{U}$ h.a.*

Beweis. Nach 1.7.8 ist

(1) $\{F_i(z) \mid z \in U^{n_i}\}$ ist h.a.

Nach 1.7.9 also:

(2) $\theta(u) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{i \in \omega} \{F_i(z) \mid z \in U^{n_i}\}$ ist h.a.

Setze $U_0 = U$, $U_{i+1} = \theta(U_i)$. Durch Induktion auf i folgt:

(3) U_i ist h.a. für $i \in \omega$.

Nach 1.7.9 also:

(4) $\bar{U} = \bigcup_i U_i$ ist h.a.

QED(Lemma 1.7.10)

1.8 Anhang zu §1

Eindeutige Lesbarkeit

Satz 1.8.1 *Seien* $e, e' \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. *Dann*

(a) $\neg\varphi = \neg\psi \rightarrow \varphi = \psi$

(b) $(\varphi\, e\, \psi) = (\varphi'\, e'\, \psi') \rightarrow (\varphi = \varphi', e = e', \psi = \psi')$

(c) $\neg\chi \neq (\varphi\, e\, \psi)$

(d) $p \neq \neg\chi, \quad p \neq (\varphi\, e\, \psi)$.

Dieser Satz wird hergeleitet aus:

Lemma 1.8.2 $\varphi z = \psi w \rightarrow (\varphi = \psi, z = w)$ *für beliebige Formeln* φ, ψ *und Zeichenreihen* z, w.

(**Bemerkung.** Die leere Zeichenreihe $\emptyset$ gehört auch dazu, wobei $\emptyset z = z\emptyset = z$. Also folgt aus Lemma 1.8.2: $\varphi = \psi z \rightarrow (\varphi = \psi$ und $z = \emptyset)$.)

Als erstes leiten wir Satz 1.8.1 aus Lemma 1.8.2 ab. Hierbei benutzen wir, daß für Grundzeichen $e, e' \in E$ und beliebige Zeichenreihen z, z' gilt:

$(*) \qquad ez = e'z' \rightarrow (e = e'$ und $z = z')$

(a) folgt unmittelbar aus $(*)$.

Zu (b): Sei $(\varphi\, e\, \psi) = (\varphi'\, e'\, \psi')$. Dann $\varphi\, e\psi) = \varphi'\, e'\psi')$ nach $(*)$. Also $\varphi = \varphi'$ und $e\,\psi) = e'\,\psi')$ nach Lemma 1.8.2. Also $e = e'$ und $\psi) = \psi')$ nach $(*)$. Also $\psi = \psi'$ nach Lemma 1.8.2.

Zu (c): Sonst $\neg = ($ nach $(*)$.

Zu (d): Sonst $p = \neg$ oder $p = ($. QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Wir beweisen jetzt Lemma 1.8.2. Durch Induktion auf φ beweisen wir:

$$\bigwedge \psi, z, w(\varphi z = \psi w \rightarrow (\varphi = \psi \text{ und } z = w)).$$

Sei $\varphi z = \psi w$.

Fall 1: $\varphi = p \in A$.

$\psi \neq \neg\chi$, da sonst $p = \neg$ nach $(*)$. $\psi \neq (\chi_0\, e\, \chi_1)$, da sonst $p = ($ nach $(*)$.
Also $\psi = q \in A$. Also $p = q$, $z = w$ nach $(*)$.

Fall 2: $\varphi = (\varphi_0\, e\, \varphi_1)$.

$\psi \notin A$, da sonst $(= \psi$ nach $(*)$. $\psi \neq \neg\chi$, da sonst $(= \neg$ nach $(*)$.
Also $\psi = (\psi_0\, e'\, \psi_1)$. Also $\varphi_0\, e\varphi_1)z = \psi_0\, e'\, \psi_1)w$ nach $(*)$. Also $\varphi_0 = \psi_0$ und

$e\,\varphi_1)z = e'\,\psi_1)w$ nach Induktionshypothese. Also $e = e'$ und $\varphi_1)z = \psi_1)w$ nach $(*)$. Also $\varphi_1 = \psi_1$ und $)z =)w$ nach Induktionshypothese. Also $z = w$ nach $(*)$. Da $\varphi_0 = \psi_0$, $e = e'$, $\varphi_1 = \psi_1$, folgt:

$$\varphi = (\varphi_0\, e\, \varphi_1) = (\psi_0\, e'\, \psi_1) = \psi.$$

Fall 3: $\varphi = \neg\chi$

$\psi \notin A$, da sonst $\psi = \neg$ nach $(*)$. $\psi \neq (\psi_0\, e\, \psi_1)$, da sonst $(= \neg$ nach $(*)$.
Also $\psi = \neg\chi'$. Also $\chi z = \chi' w$ nach $(*)$. Also $\chi = \chi'$ und $z = w$ nach Induktionshypothese.
Also $\varphi = \neg\chi = \neg\chi' = \psi$. QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Unter Verwendung von Satz 1.8.1 leiten wir jetzt den Rekursionssatz für Formeln aus dem allgemeinen Wertverlaufsrekursionssatz der Mengenlehre ab. Der *Rekursionssatz* für Formeln lautet:

$(**)$ Sei $H : A \to B$, $G_\neg : \mathrm{Fml} \times B \to B$, $G_e : \mathrm{Fml}^2 \times B^2 \to B$ für $e \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Es gibt genau ein $F : \mathrm{Fml} \to B$ mit: $F(p) = H(p)$; $F(\neg\psi) = G_\neg(\varphi, F(\varphi))$; $F((\varphi\, e\, \psi)) = G_e(\varphi, \psi, F(\varphi), F(\psi))$.

Der *Wertverlaufsrekursionssatz* lautet:

$(***)$ Sei R eine fundierte Relation auf einer Menge D. Sei G eine partielle Funktion auf $D \times \mathbf{V}$. Es gibt genau eine partielle Funktion F auf D mit:

$$F(x) = \begin{cases} G(x, \langle F(z) \mid z\,R\,x\rangle), \text{ falls } F(z) \text{ definiert ist für } z\,R\,x \\ \quad \text{und } \langle x, \langle F(z) \mid z\,R\,x\rangle\rangle \in \mathrm{dom}(G); \\ \text{sonst undefiniert.} \end{cases}$$

Sei nun $D = \mathrm{Fml}$. Die Menge $\mathrm{Kom}(\varphi)$ der *unmittelbaren Komponenten* einer Formel φ sei definiert durch eine Fallunterscheidung:

$$\mathrm{Kom}(\varphi) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \varphi \in A; \\ \{\chi, \psi\} & \text{falls } \varphi = (\chi\, e\, \psi); \\ \{\chi\} & \text{falls } \varphi = \neg\chi. \end{cases}$$

Dies ist eine richtige Definition nach der eindeutigen Lesbarkeit.
Setze: $\varphi\,R\,\chi \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \varphi \in \mathrm{Kom}(\chi)$.
R ist dann eine fundierte Relation auf Fml, denn $\varphi\,R\,\psi \to$ Länge $(\varphi) <$ Länge (ψ), wobei Länge $(e_1 \ldots e_n) =_{\mathrm{Df}} n$.
$G(x, f)$ sei definiert durch:

$$G(x, f) = \begin{cases} H(p) & \text{falls } x = p; \\ G_\neg(\varphi, f(\varphi)) & \text{falls } x = \neg\varphi,\ \varphi \in \mathrm{dom}(f); \\ G_e(\varphi, \psi, f(\varphi), f(\psi)) & \text{falls } x = (\varphi\, e\, \psi),\ e \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \\ & \text{und } \varphi, \psi \in \mathrm{dom}(f); \\ \text{sonst undefiniert.} & \end{cases}$$

Erfüllt F nun die Gleichung von $(***)$, so folgt durch Induktion auf φ, daß $F(\varphi)$ definiert ist und die Gleichungen von $(**)$ erfüllt. Aus $(***)$ folgt also $(**)$.

Kapitel 2

Prädikatenlogik

2.1 Einleitung

In der Aussagenlogik werden alle Formeln durch die Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ aus "monolithischen" Primaussagen gebildet. Die Primaussagen, die wir tatsächlich benutzen, sind jedoch selber gegliedert. Typischerweise sind sie in "Subjekt" und "Prädikat" gegliedert, wie z.B. "Peter ist ein Student", "3 ist eine Primzahl". Auch zwei- oder mehrstellige Prädikate sind möglich, wie z.B. "$3 < 4$" oder "3 liegt zwischen 2 und 4". Neben den Primaussagen gibt es auch andere *Primformeln*, in denen statt spezifischer Namen wie "Peter" oder "3" "unbestimmte Namen" oder *Variablen* vorkommen: "x ist eine Primzahl", "$x < 3$", "$x < y$" usw. Die Menge aller Formeln wird dann mit den aussagenlogischen Operationen aus den Primformeln gebildet sowie auch mit Hilfe von Quantoren: $\bigwedge$, $\bigvee$. Ist $\varphi(x)$ eine Formel, so auch $\bigwedge x\ \varphi(x)$ ("Für alle x $\varphi(x)$") und $\bigvee x\ \varphi(x)$ ("Es gibt x mit $\varphi(x)$"). "x ist eine Zahl" ist eine Formel aber keine Aussage, denn die Variable x fungiert hier als ein unbestimmter Parameter. "$\bigwedge x\ \ x$ ist eine Zahl" ist dagegen eine Aussage. Aussagen können also aus Primformeln gebildet werden, die selber keine Aussagen sind.

Eine PL-*Sprache* wird typischerweise spezifiziert, indem wir eine Menge von *Prädikaten* festlegen. Die Prädikate sind Grundzeichen und jedes Prädikat hat eine Stellenzahl. Gemeinsam zu allen PL-Sprachen ist das "logische Prädikat" $=$, das immer als die Identität interpretiert wird. Die anderen Prädikate heißen dann nichtlogische Prädikate. Neben den Prädikaten könnte man auch eine Menge von *konstanten Namen* (kurz: *Konstanten*) spezifizieren. Die *Primformeln* sind dann Zeichenreihen der Gestalt $Pt_1 \ldots t_n$, wobei P ein n-stelliges nichtlogisches Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Variablen oder Konstanten sind. Hierzu kommen die Identitätsformeln $t_1 = t_2$. Die Formeln dieser Sprache setzen sich wie oben beschrieben aus den Primformeln zusammen.

Ein Beispiel ist die Sprache der *linearen Ordnungen* (LO). LO hat ein nichtlogisches Prädikat $<$ und keine Konstanten. (Der Lesbarkeit halber schreiben wir natürlich '$x < y$' statt '$< xy$'.) Eine *mathematische Theorie* innerhalb einer Sprache ist durch eine Menge von Aussagen gegeben, die wir *Axiome* nennen. Die *Theorie der linearen Ordnungen* hat die folgenden Axiome:

$$\text{(LO)}\ \bigwedge x \neg x < x;\ \ \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z);\ \ \bigwedge x \bigwedge y(x < y \vee y < x \vee x = y).$$

Noch schwächer ist die *Theorie der partiellen Ordnungen* (PO), bei der das letzte Axiom weggelassen wird. Beide Theorien sind in derselben Sprache formuliert.

Eine *Interpretation* oder *Modell* einer PL-Sprache ist so beschaffen, daß jede Aussage einen bestimmten Wahrheitswert 0 oder 1 bekommt. Bei den AL-Sprachen war eine Interpretation durch die Wahrheitswerte der Primaussagen gegeben. Bei PL-Sprachen ist die Situation komplizierter. Ein Modell $\mathfrak{A}$ einer PL-Sprache beinhaltet:

(a) Ein nichtleerer *Individuenbereich* $B = B_{\mathfrak{A}}$. (Erst durch B ist die Bedeutung der Quantoren "Für alle x" und "Es gibt x" festgelegt.)

(b) Zu jedem n-stelligen Prädikat P eine *Interpretation* $P^{\mathfrak{A}} \subset B^n$ (d.h. $P^{\mathfrak{A}}$ ist eine n-stellige Relation auf B.

(c) Zu jeder Konstanten c eine Interpretation $c^{\mathfrak{A}} \in B$.

Eine Interpretation der LO-Sprache ist gegeben durch $B_{\mathfrak{A}_0} = \omega$, $<^{\mathfrak{A}_0}=<_\omega=$ die natürliche Ordnung von ω. Wir können auch $B_{\mathfrak{A}_1} = \mathbb{Q} =$ die rationalen Zahlen nehmen mit $<^{\mathfrak{A}_1}=<_{\mathbb{Q}}$. Eine andere Möglichkeit ist $B_{\mathfrak{A}_2} = \mathbb{R} =$ die reellen Zahlen, $<^{\mathfrak{A}_2}=<_{\mathbb{R}}$. In allen drei Modellen sind die Axiome LO wahr. Es gibt aber Aussagen φ, die in $\mathfrak{A}_0$ aber nicht in $\mathfrak{A}_1$ wahr sind – z.B. $\bigvee x \bigvee y \bigwedge z \neg(x < z \wedge z < y)$. Es stellt sich jedoch heraus, daß in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ dieselben Aussagen wahr sind. (Da die Strukturen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sehr verschieden sind, ist dieser Sachverhalt ein Armutszeugnis für die Ausdruckskraft dieser Sprache.) Die Axiome PO lassen auch andere Interpretationen zu:
$B_{\mathfrak{A}_3} = \{X \mid X \subset \omega\}$, $<^{\mathfrak{A}_3}= \{\langle X, Y\rangle \mid X, Y \subset \omega \wedge X \subset Y \wedge X \neq Y\}$.
In $\mathfrak{A}_3$ ist das letzte LO Axiom falsch.

Es empfiehlt sich manchmal, zusätzlich zu den Prädikaten und Konstanten auch *Funktionszeichen* in einer Sprache zuzulassen. Ein n-stelliges Funktionszeichen F wird in einem Modell $\mathfrak{A}$ durch eine Funktion $F^{\mathfrak{A}} : B^n_{\mathfrak{A}} \to B$ interpretiert. Wollen wir z.B. mehr von der Struktur von ω in L0 beschreiben, können wir eine Konstante $\dot{0}$ und ein einstelliges Funktionszeichen s hinzunehmen. Wir ergänzen das Modell $\mathfrak{A}_0$ durch die Interpretationen: $\dot{0}^{\mathfrak{A}_0} = 0$; $s^{\mathfrak{A}_0}(n) = n+1$. Hiermit können wir Namen $\dot{0}, s\dot{0}, ss\dot{0}, \ldots$ für die Zahlen $0, 1, 2 \ldots$ bilden. Unter dieser Interpretation sind die folgenden Axiome wahr:

(1) $\bigwedge x \;\neg x < 0;\; \bigwedge x \bigwedge y(x < sy \leftrightarrow (x = y \vee x < y))$

Natürlich könnten wir s ersetzen durch ein Prädikat S, das interpretiert wird durch: $S^{\mathfrak{A}}(n, m) \leftrightarrow m = n + 1$. Die Axiome (1) sind dann äquivalent mit:

(2) $\bigwedge x \bigvee y\, Sxy;\;\; \bigwedge x \;\neg x < 0;\;\; \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Syz \to (x < z \leftrightarrow (x = y \vee x < y)))$.

(2) fällt umständlicher aus als (1). Wir können unsere Sprache auch z.B. durch ein Funktionszeichen $\dot{+}$ ergänzen mit der Interpretation: $\dot{+}^{\mathfrak{A}}(n, m) = n + m$. (Wir schreiben der Lesbarkeit halber dann $(x\dot{+}y)$ statt $\dot{+}xy$.) Es gelten dann die Axiome:

(3) $\bigwedge x \;\; x\dot{+}\dot{0} = x;\;\; \bigwedge xy \;\; x\dot{+}sy = s(x\dot{+}y)$

Natürlich hätten wir wieder stattdessen ein dreistelliges Prädikat Pl hinzunehmen können mit der Interpretation:

$$\mathrm{Pl}^{\mathfrak{A}_0}(n, m, p) \longleftrightarrow n = m + p.$$

(3) müßte dann umschrieben werden als:

(4) $\bigwedge xy \bigvee z\ \mathrm{Pl}\, zxy$; $\bigwedge x\ \mathrm{Pl}\, xx\dot{0}$; $\bigwedge u \bigwedge v \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z((\mathrm{Pl}\, uxz \wedge \mathrm{Pl}\, vxy \wedge Syz) \to Svu)$.

Eine andere Theorie, die am besten in einer Sprache mit Funktionszeichen ausgedrückt wird, ist die Theorie der *Gruppen*. Diese Theorie hat eine Konstante e und ein zweistelliges Funktionszeichen $\circ$. Die Axiome sind:

(5) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; $\bigwedge x\ \ x \circ e = x$, $\bigwedge x \bigvee y\ \ x \circ y = e$.

In einem Modell $\mathfrak{A} = \langle B_{\mathfrak{A}}, \circ^{\mathfrak{A}}, e^{\mathfrak{A}} \rangle$ sind diese Axiome genau dann wahr, wenn $\mathfrak{A}$ eine Gruppe mit Einheitselement $e^{\mathfrak{A}}$ ist.

Anhand einiger Beispiele haben wir schon gesehen, wie man auch ohne Konstanten und Funktionen auskommt, indem man an ihrer Stelle geeignete Prädikate einführt. In dieser Vorlesung kommen wir ebenso gut ohne sie aus, also werden wir der Einfachheit halber in diesem Skript nur solche PL-Sprachen behandeln, die als nichtlogische Zeichen ausschließlich Prädikate enthalten. Es wäre eine leichte Übung, die in diesem Skript vorkommenden Resultate für PL-Sprachen mit Konstanten- und Funktionszeichen zu verallgemeinern.

Die vielleicht anspruchsvollste Theorie ist die *Mengenlehre*, die in einer Sprache mit einem einzigen zweistelligen Prädikat $\in$ formuliert wird. Es erweist sich, daß sich die gesamte Mathematik in dieser Sprache ausdrücken läßt.

2.2 PL-Sprachen

Jetzt präzisieren wir den Sprachbegriff, den wir in §2.0 informell beschrieben haben. Wir arbeiten immer noch mit den Zeichenreihen $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, \frown, E \rangle$. $=, \bigwedge, \bigvee$ seien drei distinkte neue Zeichen, die auch von $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$, (,) verschieden sind. (Wir haben wieder das Problem, daß '$=$', '$\bigwedge$', '$\bigvee$' nicht nur – wie bisher – inhaltlich gebraucht, sondern auch als Bezeichnung für Zeichen verwendet werden. Um Mißverständnisse zu vermeiden, schreiben wir gelegentlich '$\dot{=}$', '$\dot{\bigwedge}$', '$\dot{\bigvee}$' als Bezeichnungen für Grundzeichen. So schreiben wir z.B. $\dot{=}\ \neq \dot{\wedge} \wedge \dot{\wedge} \neq \dot{\vee}$ statt $= \neq \wedge \wedge \wedge \neq \vee$. Wir spezifizieren auch eine Folge $\langle v_i \mid i \in \omega \rangle$ von distinkten Grundzeichen, die auch verschieden sind von $\wedge, \vee, \ldots, (,), =, \bigwedge, \bigvee$. Wir nennen die v_i *Variablen*. Wir definieren die Menge der Variablen durch:

Definition. $\mathrm{Vbl} = \{v_i \mid i \in \omega\}$.

Außerdem spezifizieren wir unendliche Mengen $\mathbb{P}^n$ $(n \in \omega)$ von neuen Grundzeichen derart, daß jedes $z \in \mathbb{P}^n$ verschieden ist von $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, (,), =, \bigwedge, \bigvee$ und $\mathbb{P}^n \cap \mathbb{P}^m = \emptyset$ für $n \neq m$. Für $z \in \mathbb{P}^n$ definieren wir den *Typ* (oder *Stellenzahl*) durch $\mathrm{Typ}(z) = n$. Wir setzen auch $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathbb{P}^n$.

Wir definieren dann:

Definition. Eine PL-*Sprache* ist eine Folge $S = \langle P_1, \ldots, P_m \rangle$, wobei $P_i \in \mathbb{P}$ für $i = 1, \ldots, m$. Der *Typ von* S ist definiert durch: $\mathrm{Typ}(S) = \langle \mathrm{Typ}(P_1), \ldots, \mathrm{Typ}(P_m) \rangle$. (Für $m = 0$ ist $S = \emptyset$ und $\mathrm{Typ}(S) = \emptyset$.)

Definition Für eine PL-Sprache S sei $\mathbb{P}_S^n$ die Menge der Prädikate in S mit Stellenzahl n. Mit anderen Worten: $\mathbb{P}_S^n = \{P_i \mid 1 \leq i \leq m \wedge \mathrm{Typ}(P_i) = n\}$. Wir setzen auch: $\mathbb{P}_S = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{P}_S^n$.

$\mathbb{P}_S^n$ ist also die Menge der nichtlogischen n-stelligen *Prädikate* in S. Es mag überraschen, daß der Fall $n = 0$ zugelassen ist. Wir wollen – wie in den AL-Sprachen – auch die Möglichkeit von "monolithen" Primaussagen zulassen und fassen diese als nullstellige Prädikate auf. Wir setzen also: $A = A_S =_{\mathrm{Df}} \mathbb{P}^0$. (Es ist durchaus möglich, daß $\mathbb{P} = \emptyset$. Diese Sprache wird immer noch Formeln haben, denn z.B. ist $v = v$ eine Formel, wenn $v \in \mathrm{Vbl}$.)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Wir definieren nun die Menge der S-Formeln.

Definition. Pfml_S = Menge der Primformeln $=_{\mathrm{Df}}$ die Menge aller Zeichenreihen der Gestalt:

(a) $p \quad (\mathrm{Typ}(p) = 0)$

(b) $Pv_1 \dots v_n \quad (v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Vbl},\ \mathrm{Typ}(P) = n \geq 1)$

(c) $v = v' \quad (v, v' \in \mathrm{Vbl})$.

Definition. $\mathrm{Fml} = \mathrm{Fml}_S$ = die kleinste Menge X mit:

(a) $\mathrm{Pfml} \subset X$

(b) $\varphi \in X \to \neg\varphi \in X$

(c) $\varphi, \psi \in X \to (\varphi\, e\, \psi) \in X \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$

(d) $\varphi \in X,\ v \in \mathrm{Vbl} \to Qv\varphi \in X \quad (Q = \bigwedge, \bigvee)$.

Hieraus ergibt sich ein offensichtliches Induktionsprinzip für Formeln. Mit Hilfe der Induktion kann man dann die *eindeutige Lesbarkeit* beweisen:

(i) $\varphi \neq \neg\psi,\ (\psi\, e\, \chi),\ Qv\psi \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow;\ Q = \bigwedge, \bigvee)$ für $\varphi \in \mathrm{Pfml}$

(ii) $\neg\psi \neq (\psi\, e\, \chi),\ Qv\psi \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow;\ Q = \bigwedge, \bigvee)$

(iii) $(\psi\, e\, \chi) \neq Qv\psi \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow;\ Q = \bigwedge, \bigvee)$

(iv) $(\psi\, e \chi) = (\psi'\, e'\, \chi') \to (\psi = \psi',\ e = e',\ \chi = \chi')$

(v) $Qv\psi = Q'v'\psi' \to (Q = Q',\ v = v',\ \psi = \psi')$

Der Beweis ist genau wie in AL.

Das *Rekursionsprinzip* lautet dann:

Sei H : Pfml $\to B$; $G_\neg$: Fml $\times B \to B$; G_e : Fml$^2 \times B^2 \to B$ $(e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$;
G_Q : Vbl $\times$ Fml $\times B \to B$ $(Q = \bigwedge, \bigvee)$.
Es gibt genau ein F : Fml $\to B$ mit:

$$F(\varphi) = H(\varphi) \quad \text{für} \ \ \varphi \in \mathrm{Pfml}$$
$$F(\neg\varphi) = G_\neg(\varphi, F(\varphi))$$
$$F(\varphi\, e\, \psi) = G_e(\varphi, \psi, F(\varphi), F(\psi)) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$$
$$F(Qv\varphi) = G_Q(v, \varphi, F(\varphi)) \quad (Q = \bigwedge, \bigvee).$$

Als Beispiele haben wir:

Definition. Vbl(φ) = die Menge der in φ vorkommenden Variablen:

$$\mathrm{Vbl}(p) = \emptyset \ \ (p \in A); \quad \mathrm{Vbl}(Pv_1 \ldots v_n) = v_1, \ldots, v_n;$$
$$\mathrm{Vbl}(v = v') = v, v'$$
$$\mathrm{Vbl}(\neg\varphi) = \mathrm{Vbl}(\varphi)$$
$$\mathrm{Vbl}((\varphi\, e \psi)) = \mathrm{Vbl}(\varphi) \cup \mathrm{Vbl}(\psi) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$$
$$\mathrm{Vbl}(Qv\varphi) = \mathrm{Vbl}(\varphi) \cup \{v\} \quad (Q = \bigwedge, \bigvee).$$

Wichtiger ist die Menge der in φ *frei* vorkommenden Variablen. Eine Variable v kommt an einer gegebenen Stelle in einer Formel φ *gebunden* vor, wenn diese Stelle in einer Teilformel der Gestalt $\bigwedge v\, \psi$ oder $\bigvee v\, \psi$ liegt. Sonst ist die Variable an der Stelle frei. (In $\bigwedge v\, Pvw$ kommt z.B. v gebunden und w frei vor. Eine Variable kann in einer Formel frei und gebunden vorkommen – wie z.B. in $(Pv \to \bigvee v\, Pv)$. (v ist hier an der ersten Stelle frei und an der späteren gebunden.)) In φ frei vorkommende Variablen werden auch *Parameter* von φ genannt.

Definition. Fr(φ) = die Menge der in φ *frei* vorkommenden Variablen:

$$\mathrm{Fr}(\varphi) = \mathrm{Vbl}(\varphi) \quad \text{für}\, \varphi \in \mathrm{Pfml}$$
$$\mathrm{Fr}(\neg\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi)$$
$$\mathrm{Fr}(\varphi\, e\, \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$$
$$\mathrm{Fr}(Qv\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{v\} \quad (Q = \bigwedge, \bigvee).$$

Definition. Geb(φ) = die Menge der in φ *gebunden* vorkommenden Variablen:

$$\mathrm{Geb}(\varphi) = \emptyset \quad \text{für}\, \varphi \in \mathrm{Pfml}$$
$$\mathrm{Geb}(\neg\varphi) = \mathrm{Geb}(\varphi)$$
$$\mathrm{Geb}(\varphi\, e\, \psi) = \mathrm{Geb}(\varphi) \cup \mathrm{Geb}(\psi) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$$
$$\mathrm{Geb}(Qv\varphi) = \mathrm{Geb}(\varphi) \cup \{v\} \quad (Q = \bigwedge, \bigvee).$$

Seien nun $u, v \in$ Vbl. $\varphi({}^u/_v)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir u an allen Stellen, wo u frei vorkommt, durch v so ersetzen, daß v an dieser Stelle frei vorkommt. Die Operation $\varphi({}^u/_v)$ ist leider nicht immer definiert. Z.B. ist $\bigwedge w\, Pwu({}^u/_v) = \bigwedge w\, Pwv$ für $v \neq w$, aber $\bigwedge w\, Pwu({}^u/_w)$ ist undefiniert. Wir können trotzdem die partielle Operation $\varphi({}^u/_v)$ durch Rekursion auf φ wie folgt definieren:

Definition. Seien $u, v \in$ Vbl. $\mathrm{Sub}(\varphi) = \mathrm{Sub}(\varphi, u, v) = \begin{cases} \varphi({}^u/_v) & \text{falls definiert;} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ wird wie folgt definiert (Wir nehmen an, daß 0 keine Formel ist.):

$$\mathrm{Sub}(p) = p \quad (\mathrm{Typ}(p) = 0)$$
$$\mathrm{Sub}(Pw_1 \dots w_n) = Pw_1({}^u/_v) \dots w_n({}^u/_v) \quad (\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1)$$
$$\mathrm{Sub}(w \doteq w') = w({}^u/_v) \doteq w'({}^u/_v)$$

$$\mathrm{Sub}(\neg\varphi) = \begin{cases} \neg\mathrm{Sub}(\varphi) & \text{falls } \mathrm{Sub}(\varphi) \neq 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{Sub}((\varphi\, e\, \psi)) = \begin{cases} (\mathrm{Sub}(\varphi)\, e\, \mathrm{Sub}(\psi)) & \text{falls } \mathrm{Sub}(\varphi), \mathrm{Sub}(\psi) \neq 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\text{für } e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

$$\mathrm{Sub}(Qw\varphi) = \begin{cases} Qv\varphi & \text{falls } u = w; \\ Qv\mathrm{Sub}(\varphi) & \text{falls } u \neq w,\ w \neq v \text{ und } \mathrm{Sub}(\varphi) \neq 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\text{für } Q = \bigwedge, \bigvee.$$

Wir setzen dann: $\varphi({}^u/_v) = \begin{cases} \mathrm{Sub}(\varphi) & \text{falls } \mathrm{Sub}(\varphi) \neq 0; \\ \text{sonst undefiniert.} & \end{cases}$

Seien nun $u_1, \dots, u_n$ distinkte Variablen. Seien $v_1, \dots, v_n \in$ Vbl. Mit $\varphi({}^{u_1, \dots, u_n}/_{v_1, \dots, v_n})$ bezeichnen wir das Ergebnis der *simultanen* Ersetzung von $u_1, \dots, u_n$ an allen Stellen, wo sie frei vorkommen, durch $v_1, \dots, v_n$, wobei die $v_1, \dots, v_n$ an diesen Stellen frei vorkommen. Zum Beispiel ist $Pxy({}^{x,\,y}/_{y,\,x}) = Pyx$. Es ist nicht immer der Fall, daß $\varphi({}^{u_1 \dots u_n}/_{v_1 \dots v_n}) = \varphi({}^{u_1}/_{v_1}) \dots ({}^{u_n}/_{v_n})$, denn $Pxy({}^x/_y)({}^y/_x) = Pyy({}^y/_x) = Pxx$. Sind $z, w \notin \{x, y\}$, so folgt aber: $Pxy({}^x/_z)({}^y/_w)({}^z/_y)({}^w/_x) = Pyx$.

Im allgemeinen können wir definieren:

Definition. Seien $u_1, \dots, u_n \in$ Vbl distinkt. Sei $v_1, \dots, v_n \in$ Vbl. $w_1, \dots, w_n$ seien distinkte, von $u_1, \dots, u_n$ verschiedene Variablen, die weder frei noch gebunden in φ, $v_1, \dots, v_n$ vorkommen.

$$\varphi({}^{u_1, \dots, u_n}/_{v_1, \dots, v_n}) =_{\mathrm{Df}} \varphi({}^{u_1}/_{w_1}) \dots ({}^{u_n}/_{w_n})({}^{w_1}/_{v_1}) \dots ({}^{w_n}/_{v_n})$$

(**Bemerkung.** Falls $v \notin \mathrm{Geb}(\varphi)$, so ist $\varphi({}^u/_v)$ definiert für alle $u \in$ Vbl. Dies folgt durch Induktion auf φ.)

Die Menge der *S-Aussagen* wird nun definiert durch:

Definition. $\mathrm{Aus}_S = \{\varphi \in \mathrm{Fml}_S \mid \mathrm{Fr}(\varphi) = \emptyset\}$.

2.3 Modelle von PL

Wir führen jetzt die in §2.0 angedeutete Definition eines *Modells* oder *Interpretation* einer PL-Sprache S aus.

Definition $S = \langle P_1, \ldots, P_m \rangle$ sei eine PL-Sprache. $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell von* S ($\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$) gdw. $\mathfrak{A} = \langle B_{\mathfrak{A}}, \langle P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_m^{\mathfrak{A}} \rangle \rangle$, wobei:

(a) $B = B_{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$,

(b) $p^{\mathfrak{A}} \in \{0, 1\}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$,

(c) $P^{\mathfrak{A}} \subset B^n$ falls $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$.

Jede *Aussage* von S hat in $\mathfrak{A}$ einen bestimmten Wahrheitswert 0 oder 1. Anders verhält es sich mit den Formeln, in denen freie Variablen vorkommen. Diese Variablen treten auf als "unbestimmte Namen" für "irgendwelche" Elemente von B. Ein Wahrheitswert für φ wird erst dann festgelegt, wenn eine Zuordnung dieser Variablen zu spezifischen Elementen von B gemacht wird. Eine solche Zuordnung nennen wir eine *Belegung* der Variablen.

Definition. $\mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} = \{f \mid f : \mathrm{Vbl} \to B\}$.

$\mathfrak{A} \vDash \varphi[f]$ besagt: φ ist wahr in $\mathfrak{A}$ unter der Belegung $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$. Man nennt $\vDash$ die *Erfüllungsbeziehung* und liest: $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f]$ als: f erfüllt φ in dem Modell $\mathfrak{A}$.
Wir wollen die Erfüllungsbeziehung nun streng definieren. Zunächst untersuchen wir aber die Eigenschaften, die wir von dieser Beziehung erwarten. Die formale Definition wird sich dann praktisch daraus ergeben.

Offensichtlich soll gelten:

(1) $\mathfrak{A} \vDash p[f] \leftrightarrow p^{\mathfrak{A}} = 1$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$
$\mathfrak{A} \vDash Pv_1 \ldots v_n[f] \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ falls $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$
$\mathfrak{A} \vDash v \doteq v'[f] \leftrightarrow f(v) = f(v')$

Hiermit ist $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f]$ erklärt für $\varphi \in \mathrm{Pfml}$.
Bei aussagenlogischen Verbindungen muß dann gelten:

(2) $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi[f] \leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi[f]$

(3) $\mathfrak{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[f] \leftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \wedge \mathfrak{A} \vDash \psi[f])$

(4) $\mathfrak{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[f] \leftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \vee \mathfrak{A} \vDash \psi[f])$

(5) $\mathfrak{A} \vDash (\varphi \to \psi)[f] \leftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \to \mathfrak{A} \vDash \psi[f])$

(6) $\mathfrak{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[f] \leftrightarrow (\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi[f])$

$\mathfrak{A} \vDash \bigwedge v\ \varphi[f]$ bedeutet dann, daß $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f']$ gilt für jedes f' mit $f' = f$ bis auf $f(v)$. Definieren wir:

Definition. Sei $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$, $v \in \mathrm{Vbl}$, $a \in A$. $f(^v/_a) = f' \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ mit:

$$f'(w) = \begin{cases} a & \text{falls } v = w \\ f(w) & \text{sonst.} \end{cases}$$

So haben wir:

(7) $\mathfrak{A} \vdash \bigwedge v\ \varphi[f] \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \vDash \varphi[f(^v/_a)]$

(8) $\mathfrak{A} \vdash \bigvee v\ \varphi[f] \leftrightarrow \bigvee a \in \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \vDash \varphi[f(^v/_a)]$

Durch Rekursion auf φ definieren wir nun $\theta(\varphi) = \theta_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \{f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi[f]\}$.

Definition.

$$\begin{aligned}
&\theta(p) = \{f \mid p^{\mathfrak{A}} = 1\} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} & \text{falls } p^{\mathfrak{A}} = 1 \\ \emptyset & \text{falls } p^{\mathfrak{A}} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } p \in A. \\
&\theta(Pv_1 \dots v_n) = \{f \mid P^{\mathfrak{A}}(f(v_1), \dots, f(v_n))\} \\
&\theta(v = v') = \{f \mid f(v) = f(v')\} \\
&\theta(\neg\varphi) = \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} \setminus \theta(\varphi) \\
&\theta(\varphi \wedge \psi) = \theta(\varphi) \cap \theta(\psi) \\
&\theta(\varphi \vee \psi) = \theta(\varphi) \cup \theta(\psi) \\
&\theta(\varphi \to \psi) = \{f \mid f \in \theta(\varphi) \to f \in \theta(\psi)\} \\
&\theta(\varphi \leftrightarrow) = \{f \mid f \in \theta(\varphi) \leftrightarrow f \in \theta(\psi)\} \\
&\theta(\textstyle\bigwedge v\ \varphi) = \{f \mid \textstyle\bigwedge a \in \mathfrak{A}\ \ f(^v/_a) \in \theta(\varphi)\} \\
&\theta(\textstyle\bigvee v\ \varphi) = \{f \mid \textstyle\bigvee a \in \mathfrak{A}\ \ f(^v/_a) \in \theta(\varphi)\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun: $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} f \in \theta(\varphi)$, so folgen (1) – (8).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Damit φ einen Wahrheitswert in $\mathfrak{A}$ bekommt, brauchen wir natürlich nicht *alle* Variablen zu belegen, sondern nur diejenigen, die in φ frei vorkommen. Definieren wir:

Definition. $f \sim_\varphi g \longleftrightarrow f \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) = g \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) \quad (\varphi \in \mathrm{Fml})$

So folgt:

Lemma 2.3.1 *Sei $f \sim_\varphi g$. Dann*

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[f] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi[g].$$

Beweis. Induktion auf φ.

So können wir definieren:

Definition. Seien $v_1, \dots, v_n$ distinkte Variablen mit $\mathrm{Fr}(\varphi) \subset \{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $a_1, \dots, a_n \in B_{\mathfrak{A}}$. $\mathfrak{A} \models \varphi[{}^{v_1, \dots, v_n}/a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{A} \models \varphi[f]$ für $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ mit $f(v_i) = a_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

(Im Grenzfall $n = 0$ ist $\varphi \in$ Aus und:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f] \quad \text{für } f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}.)$$

Ist eine Folge $v_1, \dots, v_n$ von Variablen vorgegeben, schreiben wir auch:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathfrak{A} \models \varphi[{}^{v_1, \dots, v_n}/a_1, \dots, a_n]$$

Häufig schreiben wir $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ für:
$v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Vbl}$ sind distinkt und $\mathrm{Fr}(\varphi) \subset \{v_1, \dots, v_n\}$. (Für $\varphi = \varphi(v, v_1, \dots, v_n)$ ist also z.B. $\mathfrak{A} \models \bigwedge v\ \varphi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathfrak{A}\ \ \mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \dots, a_n]$.)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Definition. Sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_S$. $\mathfrak{A}$ ist ein *Submodell* von $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) gdw.

(a) $B_{\mathfrak{A}} \subset B_{\mathfrak{B}}$

(b) $p^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{B}}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$.

(c) $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap B_{\mathfrak{A}}^n$ falls $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$.

Lemma 2.3.2 *$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gdw. $B_{\mathfrak{A}} \subset B_{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{Pfml}$.*

Beweis. $(\leftarrow)$ (a) ist schon gegeben.
(b) folgt mit $\varphi = p \in A$.
(c) folgt mit $\varphi = Pv_1 \dots v_n$.
$(\rightarrow)$ *Fall* 1: $\varphi = p \in A$.

$$p^{\mathfrak{A}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } \mathfrak{A} \models p \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{A} \not\models p \end{array} \right\} = p^{\mathfrak{B}}$$

Fall 2: $\varphi = Pv_1 \dots v_n$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n] \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}(f(v_1) \dots f(v_n)) \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_n]$$

für $f \in \mathrm{Bel}$ mit $f(v_i) = a_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
Fall 3: $\varphi = v \doteq v'$ (wie Fall 2). QED(Lemma 2.3.2)

Definition. Sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_S$. $\mathfrak{A}$ ist ein *elementares Submodell* von $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$) gdw. $B_{\mathfrak{A}} \subset B_{\mathfrak{B}}$ und

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

für alle $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Korollar 2.3.3 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Lemma 2.3.4 *Seien* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathrm{Mod}_S$.

(a) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$

(b) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$

(c) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \wedge B_{\mathfrak{A}} \subset B_{\mathfrak{B}}) \to \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

(d) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C} \wedge B_{\mathfrak{A}} \subset B_{\mathfrak{B}}) \to \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

Der Beweis ist dem Leser überlassen.

Definition. $I = \langle I, \leq \rangle$ ist eine *gerichtete Halbordnung* gdw. $\leq\ \subset I^2$ und

(a) I ist eine Halbordnung – d.h. $i \leq i$, $i \leq j \leq i \to i = j$, $i \leq j \leq k \to i \leq k$ für $i, j, k \in I$.

(b) I ist gerichtet – d.h. $\bigwedge i, j \in I \ \bigvee k \ \ i, j \leq k$.

Bemerkung Jede lineare Ordnung ist eine gerichtete Halbordnung.

Definition. Sei I eine gerichtete Halbordnung. $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ ist ein *gerichtetes System* gdw.

(a) $\mathfrak{A}_i \in \mathrm{Mod}_S$ für $i \in I$.

(b) $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ für $i \leq j$ in I.

Jedes gerichtete System hat ein *Limesmodell* $\mathfrak{A}^* = \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, das wie folgt definiert wird:

Definition. Sei $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ ein gerichtetes System. $\lim\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i =_{\mathrm{Df}} \mathfrak{A}^*$ wobei:

$\mathfrak{A}^* = \langle B, \langle P_1^{\mathfrak{A}^*}, \dots, P_m^{\mathfrak{A}^*} \rangle \rangle$ mit:

(a) $B = \bigcup\limits_i B_{\mathfrak{A}_i}$

(b) $p^{\mathfrak{A}^*} = p^{\mathfrak{A}_i}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$.

(c) Sei $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in B$. Wähle i mit $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}_i$ und setze:

$$P^{\mathfrak{A}^*}(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$$

Um zu zeigen, daß dies eine Definition ist, müssen wir beweisen, daß die Wahl von i in (b) und (c) keine Rolle spielt. Außerdem müssen wir zeigen, daß für alle $a_1, \dots, a_n \in B$ ein i existiert mit $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}_i$. Um letzteres zu sehen, sei $a_h \in \mathfrak{A}_{i_h}$ $(h = 1, \dots, n)$. Da I gerichtet ist, gibt es $i \geq i_1, \dots, i_n$ in I. Also $a_h \in \mathfrak{A}_i$ für $h = 1, \dots, n$. Um zu sehen, daß die Wahl von i unerheblich ist in (b), sei $i' \in I$. Wir behaupten: $p^{\mathfrak{A}_i} = p^{\mathfrak{A}_{i'}}$. Wähle $j \geq i, i'$ in I. Dann $p^{\mathfrak{A}_i} = p^{\mathfrak{A}_j} = p^{\mathfrak{A}_{i'}}$. Die Unerheblichkeit von i in (c) folgt in ähnlicher Weise.

Offensichtlich gilt dann:

Lemma 2.3.5 *Sei* $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$, $\mathfrak{A}^* = \lim_i \mathfrak{A}_i$ *wie oben. Dann* $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}^*$ *für* $i \in I$.

Ein etwas tieferes Lemma ist:

Lemma 2.3.6 *Sei* $\langle \mathfrak{A} \mid i \in I \rangle$, $\mathfrak{A}^* = \lim_i \mathfrak{A}_i$ *wie oben, wobei* $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ *für* $i \leq j$ *in* I. *Dann* $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}^*$ *für* $i \in I$.

Beweis. Durch Induktion auf φ zeigen wir:

$(*)$ Falls $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, so

$$\mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \longleftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

für alle $i \in I$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}_i$. (Der Kürze halber schreiben wir:

$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}\,]$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$)

Fall 1. $\varphi \in$ Pfml. $(*)$ folgt aus $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}^*$.

Fall 2. $\varphi = \neg\psi$

$$\mathfrak{A}_i \models \neg\varphi[\vec{a}\,] \longleftrightarrow \mathfrak{A}_i \not\models \varphi[\vec{a}\,] \longleftrightarrow \mathfrak{A}^* \not\models \varphi[\vec{a}\,] \longleftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \neg\varphi[\vec{a}\,]$$

Fall 3. $\varphi = (\psi \wedge \chi)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i \models (\psi \wedge \chi)[\vec{a}\,] &\longleftrightarrow (\mathfrak{A}_i \models \psi[\vec{a}\,] \wedge \mathfrak{A}_i \models \chi[\vec{a}\,]) \\ &\longleftrightarrow (\mathfrak{A}^* \models \psi[\vec{a}\,] \wedge \mathfrak{A}^* \models \chi[\vec{a}\,]) \\ &\longleftrightarrow \mathfrak{A}^* \models (\psi \wedge \chi)[\vec{a}\,] \end{aligned}$$

(analog für $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).

Fall 4. $\varphi = \bigvee v\ \psi$

Wir können o.B.d.A. voraussetzen: $v \notin \{v_0, \ldots, v_n\}$. Der andere Fall läßt sich dann auf diesen zurückführen, denn für $v = v_i$ ist $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ und:
$\mathfrak{A} \models \varphi[{}^{v_1, \ldots, v_n}/{}_{a_1, \ldots, a_n}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[{}^{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n}/{}_{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n}]$
für $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}^*$.
Wir haben also $\psi = \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$.

$(\rightarrow)$ $\mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,] \rightarrow \bigvee b \in \mathfrak{A}_i\ \mathfrak{A}_i \models \psi[b, \vec{a}\,] \rightarrow \bigvee b \in \mathfrak{A}_i\ \mathfrak{A}^* \models \psi[b, \vec{a}\,] \rightarrow \mathfrak{A}^* \models \varphi[\vec{a}\,]$.

$(\leftarrow)$ Sei $\mathfrak{A}^* \models \varphi[\vec{a}\,]$. Dann existiert $b \in \mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}^* \models \psi[b, \vec{a}\,]$. Sei $b \in \mathfrak{A}_j$. Sei $i, j \leq h$ in I. Dann ist $\mathfrak{A}_h \models \psi[b, \vec{a}\,]$ nach Induktionshypothese. Folglich $\mathfrak{A}_h \models \varphi[\vec{a}\,]$. Also $\mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,]$.

QED(Fall 4)

Fall 5. $\varphi = \bigwedge v\ \psi$ (o.B.d.A. $\psi = \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$)

$(\leftarrow)$ $\mathfrak{A}^* \models \varphi[\vec{a}\,] \rightarrow \bigwedge b \in \mathfrak{A}^*\ \mathfrak{A}^* \models \psi[b, \vec{a}\,] \rightarrow \bigwedge b \in \mathfrak{A}_i\ \mathfrak{A}_i \models \psi[b, \vec{a}\,] \rightarrow \mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,]$.

$(\rightarrow)$ Sei $\mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,]$. Zu zeigen ist:

Behauptung. $\bigwedge b \in \mathfrak{A}^*\ \mathfrak{A}^* \models \psi[b, \vec{a}\,]$.
Sei $b \in \mathfrak{A}^*$. Dann $b \in \mathfrak{A}_h$ für ein $h \in I$. Sei $i, h \leq j$ in I. Dann $b \in \mathfrak{A}_j$ und
$\mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,] \rightarrow \mathfrak{A}_j \models \varphi[\vec{a}\,] \rightarrow \mathfrak{A}_j \models \psi[b, \vec{a}\,] \rightarrow \mathfrak{A}^* \models \psi[b, \vec{a}\,]$. QED(Lemma 2.3.6)

Lemma 2.3.7 *Sei* $\mathfrak{A}^* = \lim_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

(a) $\bigwedge i \;\; \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) $\bigwedge i \;\; \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^* \prec \mathfrak{A}$.

Beweis. Sei $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}^*$. Dann $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}_i$ für ein $i \in I$. Also:
$\mathfrak{A}^* \models \varphi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$. QED(Lemma 2.3.7)

Tarskis Kriterium für elementare Submodelle lautet:

Lemma 2.3.8 *Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(a) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

(b) *Sei $\varphi = \varphi(v, v_1, \ldots, v_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{B} \models \bigvee v \;\; \varphi[\vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{B} \models \varphi[b, \vec{a}\,]$.*

Beweis.
(a) $\to$ (b): $\mathfrak{B} \models \bigvee v \;\varphi[\vec{a}\,] \to \mathfrak{A} \models \bigvee v \;\; \varphi[\vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \varphi[b, \vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{B} \models \varphi[b, \vec{a}\,]$.
(b) $\to$ (a): Durch Induktion auf φ zeigen wir: Sei $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Dann

$(*)$ $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}\,]$ für $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Fall 1. $\varphi \in$ Pfml. $(*)$ folgt aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Fall 2. $\varphi = \neg\psi$.
$\mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi[\vec{a}\,]$.

Fall 3. $\varphi = (\psi \, e \, \chi)$ $(e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$ wie Fall 2.

Fall 4. $\varphi = \bigvee v \;\; \psi$. (o.B.d.A. $\psi = \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$)
$(\to)$ $\mathfrak{A} \models \bigvee v \; \psi[\vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \; \mathfrak{A} \models \psi[b, \vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{B} \models \psi[b, \vec{a}\,] \to \mathfrak{B} \models \bigvee v \;\; \psi[\vec{a}\,]$.
$(\leftarrow)$ $\mathfrak{B} \models \bigvee v \; \psi[\vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \; \mathfrak{B} \models \psi[b, \vec{a}\,] \to \bigvee b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \psi[b, \vec{a}\,] \to \mathfrak{A} \models \bigvee v \;\; \psi[\vec{a}\,]$.

Fall 5. $\varphi = \bigwedge v \;\; \psi$ (o.B.d.A. $\psi = \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$).
Die Induktionshypothese gilt für ψ. Nach dem Beweis von Fall 2 gilt sie also für $\neg\psi$. Nach dem Beweis von Fall 4 gilt sie also für $\bigvee v \; \neg\psi$. Also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \bigwedge v \;\; \psi[\vec{a}\,] \;\; &\leftrightarrow \;\; \bigwedge b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \psi[b, \vec{a}\,] \leftrightarrow \bigwedge b \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \not\models \neg\psi[b, \vec{a}\,] \\ &\leftrightarrow \;\; \mathfrak{A} \not\models \bigvee v \; \neg\psi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \bigvee v \; \neg\psi[\vec{a}\,] \\ &\leftrightarrow \;\; \bigwedge b \in \mathfrak{B} \;\; \mathfrak{B} \not\models \neg\psi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \bigwedge v \;\; \psi[\vec{a}\,] \end{aligned}$$

QED(Lemma 2.3.8)

Definition. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ und B eine nichtleere Teilmenge von $B_{\mathfrak{A}}$. Setze: $\mathfrak{A}|B =_{\mathrm{Df}} \mathfrak{B}$, wobei:

(i) $\mathfrak{B} = \langle B, \langle P_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, P_m^{\mathfrak{B}} \rangle \rangle$

(ii) $p^{\mathfrak{B}} = p^{\mathfrak{A}}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$.

(iii) $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}} \cap B^n$ falls $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$.

Offensichtlich folgt:

Lemma 2.3.9 $\mathfrak{A}|B \subseteq \mathfrak{A}$.

Da S nur abzählbar viele Grundzeichen hat, folgt genau wie in AL:

Lemma 2.3.10 Fml_S *ist abzählbar.*

Der *Satz von Löwenheim-Skolem* besagt:

Satz 2.3.11 *Sei* $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ *und* $X \subset B_\mathfrak{A}$ *höchstens abzählbar. Es gibt ein* $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ *mit:* $X \subset B_\mathfrak{B}$ *und* $B_{\ \mathfrak{B}}$ *ist höchstens abzählbar.*

Beweis. O.B.d.A. sei $X \neq \emptyset$. Γ sei die Menge aller Paare $\langle \varphi, \langle v_0, \dots, v_n \rangle\rangle$ $(n \geq 1)$ mit $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_n)$. Γ ist dann h.a., denn $\Gamma \subset (\mathrm{Fml} \times \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Vbl}^n)$, wobei Fml, Vbl abzählbar sind. Sei $\Gamma = \{\langle \varphi_i, \langle v_i^0, \dots, v_i^{n_i}\rangle\rangle \mid i \in \omega\}$. Zu $i \in \omega$ wähle $F_i : B_\mathfrak{A}^{n_i} \to B_\mathfrak{A}$ mit: $\mathfrak{A} \models \bigvee v_i^0 \ \ \varphi_i[\vec{a}] \to \mathfrak{A} \models \varphi_i[F_i(\vec{a}), \vec{a}]$ für $a_1, \dots, a_{n_i} \in \mathfrak{A}$. Setze: $B =$ die Abschließung von X unter F_i $(i \in \omega)$. Dann

(1) $\quad \mathfrak{A} \models \bigvee v \ \ \varphi[a_1, \dots, a_n] \to \bigvee b \in B \ \ \mathfrak{A} \models \varphi[b, a_1, \dots, a_n]$

für alle $\varphi = \varphi(v, v_1, \dots, v_n)$, $a_1, \dots, a_n \in B$ $(n \geq 0)$.

Beweis. Für $n \geq 1$ sei $\langle \varphi, \langle v, v_1, \dots, v_n\rangle\rangle = \langle \varphi_i, \langle v_i^0, \dots, v_i^{n_i}\rangle\rangle$ und nehme $b = F_i(a_1, \dots, a_n)$. Für $n = 0$ sei $\langle \varphi, \langle v, w\rangle\rangle = \langle \varphi_i, \langle v_i^0, \dots, v_i^{n_i}\rangle\rangle$ und nehme $b = F_i(a)$, wobei $a \in X$.QED(1)

Setzen wir also $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}|B$, so folgt: $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ nach (1) und Tarskis Kriterium. QED(Satz 2.3.11)

Die Funktionen F_i, die wir im Beweis vom Satz 2.3.11 verwendeten, spielen eine wichtige Rolle in der Logik und verdienen so ihren eigenen Namen:

Definition. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$, $\psi = \psi(v_0, \dots, v_n)$ und Γ die Menge aller Paare $\langle \varphi, \langle v_0, \dots, v_n\rangle\rangle$ $(n \geq 1)$ mit $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_n)$. Eine Funktion $F : B_\mathfrak{A}^n \to B_\mathfrak{A}$ heißt *Skolem-Funktion* für ψ gdw.

$$\mathfrak{A} \models \bigvee v_0 \ \ \psi[\vec{a}] \ \to \ \mathfrak{A} \models \psi[F(\vec{a}), \vec{a}] \ \text{ für alle } a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}.$$

Falls $\Gamma = \{\langle \varphi_i, \langle v_i^0, \dots, v_i^{n_i}\rangle\rangle \mid i \in \omega\}$ und für jedes $i \in \omega$ ein $F_i : B_\mathfrak{A}^{n_i} \to B_\mathfrak{A}$ existiert mit:

$$\mathfrak{A} \models \bigvee v_i^0 \ \ \varphi_i[\vec{a}] \ \to \ \mathfrak{A} \models \varphi_i[F_i(\vec{a}), \vec{a}] \ \text{ für alle } a_1, \dots, a_{n_i} \in \mathfrak{A},$$

so heißt $\langle F_i \mid i \in \omega\rangle$ ein *vollständiger Satz Skolem-Funktionen für* $\mathfrak{A}$.

Bemerkung. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ und $X \subset \mathfrak{A}$. Der Abschluß von X unter einen vollständigen Satz Skolem-Funktionen für $\mathfrak{A}$ heißt eine *Skolemsche Hülle von* X und ist ein elementares Submodell von $\mathfrak{A}$ nach dem Beweis vom Satz 2.3.11. Außerdem ist die Mächtigkeit dieser Hülle $\max\{\omega, \mathrm{card}(X)\}$.

Definition. Sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_S$. π ist ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$ $(\pi : \mathfrak{A} \mathrel{\tilde{\leftrightarrow}} \mathfrak{B})$ gdw. folgendes gilt:

(a) $\pi : B_\mathfrak{A} \leftrightarrow B_\mathfrak{B}$,

(b) $p^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{B}}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$,

(c) $P^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow P^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$ für $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$.

Lemma 2.3.12 *Sei* $\pi : \mathfrak{A} \tilde{\leftrightarrow} \mathfrak{B}$. *Dann* $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$ *für* $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Induktion auf φ.

Definition. $\mathfrak{A}$ ist *isomorph zu* $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) gdw. $\bigvee \pi \;\; \pi : \mathfrak{A} \tilde{\leftrightarrow} \mathfrak{B}$.

Definition. Sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_S$. π ist eine *Einbettung von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ ($\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) gdw. $\bigvee \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} \;\; \pi : \mathfrak{A} \tilde{\leftrightarrow} \mathfrak{B}'$.
π ist eine *elementare Einbettung von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ ($\pi : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$) gdw. $\bigvee \mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B} \;\; \pi : \mathfrak{A} \tilde{\leftrightarrow} \mathfrak{B}'$.

Lemma 2.3.13 $\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *gdw.*

(a) $\pi : B_{\mathfrak{A}} \to B_{\mathfrak{B}}$

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$ *für alle Primformeln* $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ *und alle* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Beweis. ($\rightarrow$) Trivial.
($\leftarrow$) π ist injektiv, denn $a = b \leftrightarrow \mathfrak{A} \models v \doteq w[a, b] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models v \doteq w[\pi(a), \pi(b)] \leftrightarrow \pi(a) = \pi(b)$ für $a, b \in \mathfrak{A}$. Setze nun $B = \{\pi(a) \mid a \in \mathfrak{A}\}$. Dann $\pi : \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}|B \subseteq \mathfrak{B}$. QED

Lemma 2.3.14 $\pi : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ *gdw.*

(a) $\pi : B_{\mathfrak{A}} \to B_{\mathfrak{B}}$

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$ *für alle* $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ *und alle* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Beweis. ($\rightarrow$) Trivial.
($\leftarrow$) $\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ nach 4.3. Sei B wie oben. Dann $\pi : \mathfrak{A} \tilde{\leftrightarrow} \mathfrak{B}|B \prec \mathfrak{B}$.

(**Bemerkung.** $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathrm{id} : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wo id = die identische Abbildung auf $\mathfrak{A}$. Außerdem $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathrm{id} : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.)

Als Verallgemeinerung von Lemma 2.3.4:

Lemma 2.3.15 *Sei* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathrm{Mod}_S$.

(a) $\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\sigma : \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \to \sigma\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

(b) $\pi : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\sigma : \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C} \to \sigma\pi : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

(c) *Sei* $\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, $\sigma : \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, $\mathrm{rng}(\pi) \subset \mathrm{rng}(\sigma)$. *Dann* $\sigma^{-1}\pi : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

(d) (c) *gilt mit* $\prec$ *statt* $\subseteq$.-

Der Beweis ist dem Leser überlassen.

Definition. $\langle\langle\mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I\rangle\rangle$ ist ein *gerichtetes System* von *Einbettungen* gdw.

(a) I ist eine gerichtete Halbordnung.

(b) $\pi_{ij} : \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ für $i \leq j$ in I.

(c) $\pi_{jk}\pi_{ij} = \pi_{ik}$ für $i \leq j \leq k$ in I.

(d) $\pi_{ii} = \mathrm{id}$.

Definition. Sei $\langle\langle\mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I\rangle\rangle$ ist ein gerichtetes System.
$\langle\mathfrak{A}, \langle\pi_i \mid i \in I\rangle\rangle$ ist ein *direkter Limes* von $\langle\langle\mathfrak{A}_i\rangle, \langle\pi_{ij}\rangle\rangle$ gdw.

(a) $\pi_i : \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$ für $i \in I$.

(b) $\pi_j\pi_{ij} = \pi_i$ für $i \leq j$ in I.

(c) $B_{\mathfrak{A}} = \bigcup\limits_{i\in I}\{\pi_i(a) \mid a \in B_{\mathfrak{A}_i}\}$.

Lemma 2.3.16 *Jedes gerichtete System hat einen direkten Limes.*

Beweis. Sei $\langle\langle\mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I\rangle\rangle$ ein gerichtetes System. Setze:
$B = \{\langle i, a\rangle \mid i \in I \wedge a \in \mathfrak{A}_i\}$. Für $\langle i, a\rangle, \langle j, b\rangle \in B$ setze:

$$\langle i, a\rangle \sim \langle j, b\rangle \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigvee k \geq i, j \;\; \pi_{ik}(a) = \pi_{jk}(b).$$

Es ist leicht zu sehen, daß:

(1) Sei $h, k \geq i, j$. Dann: $\pi_{ik}(a) = \pi_{jk}(b) \to \pi_{ih}(a) = \pi_{jh}(b)$.

Beweis. Sei $\ell \geq h, k$. Dann: $\pi_{h\ell}\pi_{ih}(a) = \pi_{i\ell}(a) = \pi_{k\ell}\pi_{ik}(a) = \pi_{k\ell}\pi_{jk}(b) = \pi_{j\ell}(b) = \pi_{h\ell}\pi_{jh}(b)$. Also $\pi_{ih}(a) = \pi_{jh}(b)$. QED(1)

Unter Verwendung von (1) erhalten wir leicht:

(2) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf B

(d.h. $a \sim a$, $a \sim b \to b \sim a$ und $a \sim b \sim c \to a \sim c$ für $a, b, c \in B$).

(3) Sei $\langle i_h, a_h\rangle \in B$ $(h = 1, \ldots, n)$, $j, k \geq i_1, \ldots, i_n$ und $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$. Dann

$$P^{\mathfrak{A}_j}(\pi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \pi_{i_n j}(a_n)) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_k}(\pi_{i_1 k}(a_1), \ldots, \pi_{i_n k}(a_n)).$$

Beweis. Sei $\ell \geq j, k$. Schreibe $\pi_{ij}(\vec{a})$ für $\langle\pi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \pi_{i_n j}(a_n)\rangle$. Dann: $P^{\mathfrak{A}_j}(\pi_{ij}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_\ell}(\pi_{j\ell}\pi_{ij}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_\ell}(\pi_{i\ell}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_\ell}(\pi_{k\ell}\pi_{ik}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_k}(\pi_{ik}(\vec{a}))$. QED(3)

(4) Sei $\mathrm{Typ}(p) = 0$. Dann $p^{\mathfrak{A}_i} = p^{\mathfrak{A}_j}$.

Beweis. Sei $\ell \geq i, j$. $p^{\mathfrak{A}_i} = p^{\mathfrak{A}_\ell} = p^{\mathfrak{A}_j}$.

Setze: $[a] =_{\mathrm{Df}} \{b \mid b \sim a\}$ für $a \in B$.

(5) $[a] = [b] \leftrightarrow a \sim b$ für $a, b \in B$.

Setze: $\tilde{B} = \{[a] \mid a \in B\}$. $\mathfrak{A} = \langle \tilde{B}, \langle P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_m^{\mathfrak{A}} \rangle\rangle$ sei definiert durch:

(a) $p^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{A}_i}$ falls $\mathrm{Typ}(p) = 0$.

(b) $P^{\mathfrak{A}}([\langle i_1, a_1\rangle], \ldots, [\langle i_n, a_n\rangle]) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_j}(\pi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \pi_{i_n j}(a_n))$ für $j \geq i_1, \ldots, i_n$ und $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$.

(3) und (4) zeigen, daß dies eine wirkliche Definition ist. Z.B. hängt $P^{\mathfrak{A}}(d_1, \ldots, d_n)$ nicht von der Wahl der j, $\langle i_h, a_h\rangle$ $(h = 1, \ldots, n)$ in (b) ab. Denn ist $d_h = [\langle i_h, a_h\rangle] = [\langle i'_h, a'_h\rangle]$ für $h = 1, \ldots, n$, so folgt nach (3): Wähle $j \geq i_1, \ldots, i_n$, $j' \geq i'_1, \ldots, i'_n$. Sei $k \geq j, j'$. Dann: $P^{\mathfrak{A}_j}(\pi_{ij}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_k}(\pi_{ik}(\vec{a})) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_k}(\pi_{i'k}(\vec{a}\,')) \leftrightarrow P^{\mathfrak{A}_{j'}}(\pi_{i'j'}(\vec{a}\,'))$, wo $\pi_{ij}(\vec{a}) = \pi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \pi_{i_n j}(a_n)$ usw., denn $\pi_{i_h k}(a_h) = \pi_{i'_h k}(a'_h)$, da $\langle i_h, a_h\rangle \sim \langle i'_h, a'_h\rangle$ und nach (1). In ähnlicher Weise ist (a) als Definition zu rechtfertigen.
Für $i \in I$ setze: $\pi_i(a) = [\langle i, a\rangle]$ für $a \in \mathfrak{A}_i$. π_i ist injektiv, denn $\langle i, a\rangle \sim \langle i, b\rangle \rightarrow \pi_i(a) = [\langle i, a\rangle] = [\langle j, \pi_{ij}(a)\rangle] = [\langle j, \pi_{ij}(b)\rangle] = [\langle i, b\rangle]$. Nach den Definitionen folgt: $\pi_i : \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$. Offensichtlich ist $\tilde{B} = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i(a) \mid a \in \mathfrak{A}_i\}$. Es gilt auch: $\pi_j \pi_{ij}(a) = [\langle j, \pi_{ij}(a)\rangle] = [\langle i, a\rangle] = \pi_i(a)$. QED(Lemma 2.3.16)

Als Verallgemeinerung von Lemma 2.3.6 erhalten wir:

Lemma 2.3.17 *Sei* $\langle \mathfrak{A}, \langle \pi_i \mid i \in I\rangle\rangle$ *ein direkter Limes von* $\langle\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I\rangle\rangle$, *wobei* $\pi_{ij} : \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ *für* $i \leq j$ *in* I. *Dann* $\pi_i : \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$.

Beweis. Setze $B_i = \{\pi_i(a) \mid a \in \mathfrak{A}_i\}$. Dann $\mathfrak{A}|B_i \prec \mathfrak{A}|B_j$ für $i \leq j$ in I und $\mathfrak{A}|B_i \subseteq \mathfrak{A}$ $(i \in I)$ mit $B_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{i \in I} B_i$. Folglich $\mathfrak{A} = \lim_{i \in I} \mathfrak{A}|B_i$. Folglich $\mathfrak{A}|B_i \prec \mathfrak{A}$ nach Lemma 2.3.6. also $\pi_i : \mathfrak{A}_i \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathfrak{A}|B_i \prec \mathfrak{A}$. QED(Lemma 2.3.17)

Lemma 2.3.18 *Sei* $\langle \mathfrak{A}, \langle \pi_i \mid i \in I\rangle\rangle$ *ein direkter Limes von* $\langle\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I\rangle\rangle$. *Sei* $\pi'_i : \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}'$ $(i \in I)$ *mit* $\pi'_j \pi_{ij} = \pi'_i$ *für* $i \leq j$ *in* I. *Es gibt genau ein* $\sigma : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ *mit* $\sigma\pi_i = \pi'_i$ *für* $i \in I$.

Beweis. *Eindeutigkeit*: σ' habe die Eigenschaft. Sei $a \in \mathfrak{A}$, $a = \pi_i(\bar{a})$. Dann
$\sigma(a) = \sigma\pi_i(\bar{a}) = \pi'_i(\bar{a}) = \sigma'\pi_i(\bar{a}) = \sigma'(a)$.
Existenz: Sei $a \in \mathfrak{A}$, $a = \pi_i(a_i) = \pi_j(a_j)$.
Behauptung. $\pi'_i(a_i) = \pi'_j(a_j)$.
(Folglich ist $\sigma : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ definierbar durch $\sigma(a) = \pi'_i(a_i)$ für $a = \pi_i(a_i)$.)
Sei $i, j \leq k$ in I. Dann $\pi_k \pi_{ik}(a_i) = \pi_i(a_i) = \pi_j(a_j) = \pi_k \pi_{jk}(a_j)$. Also $\pi_{ik}(a_i) = \pi_{jk}(a_j)$.
Also $\pi'_i(a_i) = \pi'_k \pi_{ij}(a_i) = \pi'_k \pi_{jk}(a_j) = \pi'_j(a_j)$. QED(Behauptung.)

Dann ist $\sigma : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ definiert mit $\sigma\pi_i = \pi'_i$. Sei nun $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$. Wegen Gerichtetheit ist $a_1, \ldots, a_n \in B_i = \{\pi_i(a) \mid a \in B_{\mathfrak{A}_i}\}$. Sei $a_h = \pi_i(a_h^*)$. Dann für $\varphi \in \mathrm{Pfml}$, $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \leftrightarrow \mathfrak{A}_i \models \varphi[\vec{a}^*] \leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[\pi'_i(\vec{a}^*)] \leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[\sigma(\vec{a})],$$

da $\pi'_i(a^*) = \sigma(\vec{a})$. QED(Lemma 2.3.18)

Lemma 2.3.19 *Sei $\mathfrak{A}$, π_i, $\mathfrak{A}_i$, π_{ij}, π'_i, $\mathfrak{A}'$, σ wie oben, wobei $\pi'_i : \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}'$ $(i \in I)$. Dann $\sigma : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$.*

Beweis. $\pi_{ij} : \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$, da $\pi_{ij} = \pi_j'^{-1}\pi_i$. Also $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}\,] \leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[\sigma(\vec{a})]$ für $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ nach dem obigen Beweis. QED(Lemma 2.3.19)

Lemma 2.3.20 *Seien $\langle \mathfrak{A}, \langle \pi_i \mid i \in I \rangle \rangle$, $\langle \mathfrak{A}', \langle \pi'_i \mid i \in I \rangle \rangle$ direkte Limites von $\langle \langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j \text{ in } I \rangle \rangle$. Es gibt genau ein $\sigma : \mathfrak{A} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathfrak{A}'$ mit $\sigma\pi_i = \pi'_i$.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.18 gibt es genau ein $\sigma : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ mit dieser Eigenschaft. Für $a \in \mathfrak{A}'$ ist aber $a = \pi'_i(\bar{a})$ für ein $i \in I$. Also $a = \sigma\pi_i(\bar{a}) \in \operatorname{rng}(\sigma)$. Also $\sigma : \mathfrak{A} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathfrak{A}'$. QED(Lemma 2.3.20)

Definierbarkeit

Definition. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$, $R \subset \mathfrak{A}^n$ $(n \geq 1)$. R heißt $\mathfrak{A}$-*definierbar* gdw. es gibt ein $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ mit:

$$R(\vec{a}) \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}\,] \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}).$$

R heißt $\mathfrak{A}$-*definierbar in den Parametern* $b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{A}$ gdw. es gibt $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ mit

$$R(\vec{a}) \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}\,] \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}).$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Das Ersetzungslemma

Lemma 2.3.21 *Sei $u, v \in \mathrm{Vbl}$, $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ und $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$. Setze $\bar{f} = f({}^{v}/_{f(u)})$. Dann $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi({}^{v}/u)[f]$ (falls $\varphi({}^{v}/u)$ definiert ist).*

Beweis. (Induktion auf φ.)
Fall 1. $\varphi \in \mathrm{Pfml}$.
Fall 1.1 $\varphi = p$ für eine Primaussage p.
$\mathfrak{A} \models p[\bar{f}] \leftrightarrow p^{\mathfrak{A}} = 1 \leftrightarrow \mathfrak{A} \models p({}^{v}/u)[f]$.
Fall 1.2 $\varphi = Pv_1, \ldots, v_n$ falls $\mathrm{Typ}(P) = n \geq 1$ oder $P = \doteq$.

Setze $v'_i = \begin{cases} v_i & \text{falls } v_i \neq v; \\ u & \text{sonst.} \end{cases}$ Dann gilt $f(v'_i) = \bar{f}(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$ und $Pv'_1 \ldots v'_n = Pv_1 \ldots v_n({}^{v}/u)$. Also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models Pv_1 \ldots v_n[\bar{f}] &\longleftrightarrow P^{\mathfrak{A}}\bar{f}(v_1) \ldots \bar{f}(v_n) \\ &\longleftrightarrow P^{\mathfrak{A}} f(v'_1) \ldots f(v'_n) \\ &\longleftrightarrow \mathfrak{A} \models Pv'_1 \ldots v'_n[f] \\ &\longleftrightarrow \mathfrak{A} \models Pv_1 \ldots v_n({}^{v}/u)[f] \end{aligned}$$

Fall 2. $\varphi = \neg\psi$.
$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\bar{f}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi({}^{v}/u)[f] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi({}^{v}/u)[f] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi({}^{v}/u)[f]$.
Fall 3. $\varphi = (\psi\, e\, \chi) \quad (e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$
wie Fall 2.
Fall 4. $\varphi = \bigwedge x \;\; \psi$
Fall 4.1. $x = v$.
$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f]$, da $\bar{f} \sim_\varphi f$. Aber $\varphi = \varphi({}^{v}/u)$.
Fall 4.2. $x \neq v$.
Dann $x \neq u$, da sonst $\varphi({}^{v}/u)$ undefiniert. Also $f(u) = f({}^{x}/a)(u)$. Also $\bar{f}({}^{x}/a) = f({}^{v}/f(u))({}^{x}/a) = f({}^{x}/a)({}^{v}/f(u)) = \overline{f({}^{x}/a)}$. Also: $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathfrak{A}\; \mathfrak{A} \models \psi[\bar{f}({}^{x}/a)] \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathfrak{A}\;\; \mathfrak{A} \models \psi[\overline{f({}^{x}/a)}] \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathfrak{A}\;\; \mathfrak{A} \models \psi({}^{v}/u)[f({}^{x}/a)] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi({}^{v}/u)[f]$.
Fall 5. $\varphi = \bigvee x \;\; \psi$ (wie Fall 4).

QED(Lemma 2.3.21)

In ähnlicher Weise folgt:

Lemma 2.3.22 *Seien* $v_1, \ldots, v_n$ *distinkte Variablen und* $u_1, \ldots, u_n \in$ Vbl. *Weiter sei* $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ *und* $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$. *Setze* $\bar{f} = f({}^{v_1}/f(u_1)) \ldots ({}^{v_n}/f(u_n))$. *Dann* $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi({}^{v_1, \ldots, v_n}/u_1, \ldots, u_n)[f]$.

2.4 Gültigkeit und Beweisbarkeit

Eine Formel φ wird interpretiert durch ein Paar $\langle \mathfrak{A}, f\rangle$ bestehend aus einem Modell und einer Belegung. φ ist *logisch gültig* ($\models \varphi$) gdw. φ unter jeder Interpretation wahr ist.

Definition. Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_S$.

$$\underset{S}{\models} \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \varphi[f] \text{ für alle } \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S \text{ und alle } f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}.$$

Ist $W \subset \mathrm{Fml}$, so sagen wir, daß φ eine *logische Folgerung aus* W ist, wenn φ unter jeder Interpretation wahr ist, die die Elemente von W wahr macht:

Definition. Sei $W \subset \mathrm{Fml}_S$, $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$, $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$.

$$\mathfrak{A} \models W[f] \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigwedge \varphi \in W \;\; \mathfrak{A} \models \varphi[f].$$

Definition. Sei $W \cup \{\varphi\} \subset \mathrm{Fml}_S$.

$$W \underset{S}{\models} \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models W[f] \to \mathfrak{A} \models \varphi[f] \quad \text{für alle } \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S,\ f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}.$$

Die folgenden Sätze werden genau wie in AL bewiesen:

Lemma 2.4.1 $(W \models \varphi \wedge W \models \psi) \leftrightarrow W \models (\varphi \wedge \psi)$.

Lemma 2.4.2 $W \models \varphi,\ W \models (\varphi \to \psi) \to W \models \psi$.

Dies ist die Regel von *Modus Ponens* (MP). Die *Schnittregel* (Schnitt) lautet:

Lemma 2.4.3 $W \models (\varphi \to \psi),\ W \models (\psi \to \chi) \to W \models (\varphi \to \chi)$.

Das *Deduktionsprinzip* lautet:

Lemma 2.4.4 $W, \varphi \models \psi \leftrightarrow W \models (\varphi \to \psi)$.

(Wie in AL schreiben wir: $W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ für: $W \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$.) Eine allgemeinere Form lautet:

Lemma 2.4.5 $W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \leftrightarrow W \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$.

Definition. $W \underset{S}{\models} U \leftrightarrow \bigwedge \varphi \in U \;\; W \underset{S}{\models} \varphi$ für $W \cup U \subset \mathrm{Fml}_S$.

Lemma 2.4.6 $W \models U,\ U \models V \;\to\; W \models V$.

Tautologien in PL

Eine PL Formel heißt *Tautologie*, wenn wir sie durch Einsetzung von PL Formeln für die Primaussagen einer aussagenlogischen Tautologie gewinnen können. Weil $(p \to (q \to p))$ eine AL-Tautologie ist, ist z.B. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$ eine PL-Tautologie. Um diesen Begriff zu präzisieren, definieren wir:

Definition. Sei A^* eine Menge von Grundzeichen, die in der PL-Sprache S nicht vorkommen. Wir bilden die AL-Formeln Fml_{A^*}. Sei $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Fml}_{A^*}$ mit: $p_1, \ldots, p_n$ distinkt, $\mathrm{prim}(\varphi) \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$. Seien $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathrm{Fml}_S$. $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_n) = \varphi({}^{p_1, \ldots, p_n}/\chi_1, \ldots, \chi_n)$ wird durch Induktion auf $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\{p_1,\ldots,p_n\}}$ definiert:

$$p_i(\vec{\chi}) = \chi_i; \ \ (\neg\varphi)(\vec{\chi}) = \neg(\varphi(\vec{\chi})); \ \ (\varphi\, e\, \psi)(\vec{\chi}) = (\varphi(\vec{\chi})\, e\, \psi(\vec{\chi})) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow).$$

Durch Induktion auf φ folgt dann

Lemma 2.4.7 $\varphi(\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \mathrm{Fml}_S$ *für* $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Fml}_{A^*}$, $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathrm{Fml}_S$.

Definition. $\varphi \in \mathrm{Fml}_S$ ist eine *Tautologie* in S gdw. es ein $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Fml}_{A^*}$ und $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathrm{Fml}_S$ gibt mit: $\bar{\varphi}$ ist eine Tautologie und $\varphi = \bar{\varphi}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$.

Für die Menge der PL-Tautologien haben wir offensichtlich ein Berechnungsverfahren: Gegeben sie eine Formel φ. Wir reduzieren dann φ auf ihre *irreduziblen* Komponenten (z.B. Primaussagen p, Teilformel der Gestalt $\bigvee x\, \psi$, usw.) Diese Komponenten werden dann als die χ_i in der obigen Definition betrachtet. Nun können wir anhand von Wahrheitstafeln überprüfen, ob φ eine PL-Tautologie ist, gemäß der obigen Definition.

Wir können dieses Verfahren benutzen, um einzusehen, daß die folgende Formel eine PL-Tautologie ist.

(2.1) $(\bigwedge x\, Pxy \wedge (\bigwedge x\, Pxy \to \bigvee z\, Pzy)) \to \bigvee z\, Pzy$

Aber ersetzen wir die letzte Komponente dieser Formel, $\bigvee z\, Pzy$, durch $\bigvee w\, Pwy$, so erhalten wir eine prädikatenlogisch gültige Formel, die aber keine PL-Tautologie ist! An diesem Beispiel sehen wir, daß außer MP auch weitere Ableitungsregeln für eine PL-Kalkül erforderlich sind.

Im folgenden wird die logische Gültigkeit von einigen Axiomskandidaten und Ableitungsregeln nachgewiesen, bevor wir uns auf einer PL-Kalkül festlegen.

Lemma 2.4.8 *Sei* $\varphi \in \mathrm{Fml}_S$ *eine Tautologie. Dann* $\underset{S}{\models} \varphi$.

Beweis. Sei $\varphi = \bar{\varphi}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$, $\underset{A^*}{\models} \bar{\varphi}$. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$, $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$.

Behauptung. $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$.
Sei $\bar{A} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dann $\underset{\bar{A}}{\models} \bar{\varphi}$. $\bar{\mathfrak{A}} : \bar{A} \to \{0, 1\}$ sei definiert durch:

$$\bar{\mathfrak{A}}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{A} \models \chi_i[f] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Induktion auf $\mathrm{Fml}_{\bar{A}}$ folgt:

$(*)$ $\quad \bar{\mathfrak{A}} \underset{\bar{A}}{\models} \psi \leftrightarrow \mathfrak{A} \underset{S}{\models} \psi(\chi_1, \ldots, \chi_n)[f]$.

Folglich $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, da $\bar{\mathfrak{A}} \models \bar{\varphi}$. QED(Lemma 2.4.8)

Lemma 2.4.9 $\models \varphi \to \models \varphi(^v/_u)$.

Beweis.
Annahme: $\models \varphi$. **Behauptung.** $\mathfrak{A} \models \varphi(^v/_u)[f]$ für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ und $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$.
Es gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}]$, wobei $\bar{f} = f(^v/_{f(u)})$. Also $\mathfrak{A} \models \varphi(^v/_u)[f]$ nach Lemma 2.3.21. QED

Lemma 2.4.10 $\models \bigwedge v \;\; \varphi \to \varphi(^v/_u)$.

Beweis.
$\mathfrak{A} \models \bigwedge v \;\; \varphi[f] \to \bigwedge a \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_a)] \to \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_{f(u)})] \to \mathfrak{A} \models \varphi(^v/_u)[f]$
nach Lemma 2.3.21. QED

Lemma 2.4.11 $\models \varphi(^v/_u) \to \bigvee v \;\; \varphi$.

Beweis.
$\mathfrak{A} \models \varphi(^v/_u)[f] \to \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_{f(u)})] \to \mathfrak{A} \models \bigvee v \;\; \varphi$. QED

Lemma 2.4.12 *Sei* $\models \varphi \to \psi$, $v \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$. *Dann* $\models \varphi \to \bigwedge v \;\; \psi$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$, $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$.
Behauptung. $\mathfrak{A} \models \bigwedge v \; \psi[f]$.
Sei $a \in \mathfrak{A}$. Da $f \sim_\varphi f(^v/_a)$, gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_a)]$. Wegen $\models \varphi \to \psi$ folgt: $\mathfrak{A} \models \psi[f(^v/_a)]$.
Da dies für alle $a \in \mathfrak{A}$ gilt, folgt: $\mathfrak{A} \models \bigwedge v \;\; \psi$. QED

Lemma 2.4.13 *Sei* $\models \psi \to \varphi$, $v \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$. *Dann* $\models \bigvee v \;\; \psi \to \varphi$.

Beweis.
$\mathfrak{A} \models \bigvee v \;\; \psi \to \bigvee a \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \psi[f(^v/_a)] \to \bigvee a \in \mathfrak{A} \;\; \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_a)] \to \mathfrak{A} \models \varphi$, da $f \sim_\varphi f(^v/_a)$.
QED

In unserer PL-Kalkül werden wir natürlich auch Axiome für das Identitätszeichen benötigen.

Lemma 2.4.14 $\models u \doteq u$.

Beweis. $f(u) = f(u)$.

Lemma 2.4.15 $\models (u = w \to (\varphi(^v/_u) \leftrightarrow \varphi(^v/_w))$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models u \doteq w[f]$. Also $f(u) = f(w)$. Dann $\mathfrak{A} \models \varphi(^v/_u)[f] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_{f(u)}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f(^v/_{f(w)}] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(^v/_w)[f]$ nach Lemma 2.3.21. QED

PL als Kalkül

Ein wesentliches Merkmal der Mathematik ist die *Überprüfbarkeit* von Behauptungen. In der Aussagenlogik ist diese ohne weiteres gewährleistet, denn in einer AL Sprache A ist die Menge $\{\varphi \mid \underset{A}{\models} \varphi\}$ berechenbar. (Die Wahrheitstafelmethode liefert z.B. einen Algorithmus für diese Berechnung.) Wie wir später sehen werden, ist dagegen in einer PL Sprache S die Menge $\{\varphi \mid \underset{S}{\models} \varphi\}$ im allgemeinen nicht berechenbar. Es obliegt uns also, die Prädikatenlogik als *Kalkül* zu formulieren, in dem nur Sätze behauptet werden, die einen Beweis haben. Hierbei soll die Menge aller Beweise berechenbar sein. Behauptet jemand einen Satz, ist er verpflichtet, mir auch einen Beweis vorzulegen. Ich bin dann im Besitz eines Algorithmus, womit ich feststellen kann, ob die vorgelegte Demonstration ein tatsächlicher Beweis ist. In diesem Abschnitt entwickeln wir einen Beweisbarkeitsbegriff für PL. Wir zeigen dann zuerst, daß dieser Begriff *richtig* ist in dem Sinne, daß alle beweisbaren Formeln auch gültig sind. Im nächsten Abschnitt werden wir dann zeigen, daß alle gültigen Formeln beweisbar sind.

Die PL *Axiome* sind alle PL Formeln der Gestalt A1 – A10 (wie in AL) zusammen mit allen PL Formeln der Gestalt:

A11 $\bigwedge v \;\varphi \to \varphi({}^{v}/_{u}) \qquad (u \in \mathrm{Vbl})$

A12 $\varphi({}^{v}/_{u}) \to \bigvee v \;\varphi \qquad (u \in \mathrm{Vbl})$

A13 $u = u \qquad (u \in \mathrm{Vbl})$

A14 $v = u \to (\varphi({}^{w}/_{v}) \leftrightarrow \varphi({}^{w}/_{u})) \quad (u, v, w \in \mathrm{Vbl})$

Hierzu kommen drei *Ableitungsregeln*:

(MP) Aus φ, $\varphi \to \psi$ ist ψ ableitbar.

(Q1) Aus $\varphi \to \psi$ $(v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$ ist $\varphi \to \bigwedge v \;\psi$ ableitbar.

(Q2) Aus $\psi \to \varphi$ $(v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$ ist $\bigvee v \;\psi \to \varphi$ ableitbar.

$\underset{S}{\vdash} \varphi$ bedeutet: φ ist in der Sprache S nach den obigen Axiomen und Regeln beweisbar; genauer:

Definition. $\underset{S}{\vdash} \varphi$ gdw. $\varphi \in X =$ die kleinste Menge $X \subset \mathrm{Fml}_S$, die alle Axiome enthält und unter (MP), (Q1), (Q2) abgeschlossen ist.

Der *Richtigkeitssatz* besagt:

Lemma 2.4.16 $\vdash \varphi \to \models \varphi$.

Beweis. Die Axiome sind gültig nach Lemmata 2.4.8, 2.4.10, 2.4.11, 2.4.14, 2.4.15. Die Regeln führen von gültigen zu gültigen Formeln nach Lemmata 2.4.2, 2.4.12, 2.4.13. QED

Definition. $b = \langle b_i \mid i < n \rangle$ ist ein *Beweis* von φ gdw. $\varphi = b_i$ für ein $i < n$ und für alle $i < n$ gilt: b_i ist entweder ein Axiom oder b_i folgt aus $b_0, \ldots, b_{i-1}$ durch eine unmittelbare Anwendung von (MP), (Q1) oder (Q2).

Lemma 2.4.17 $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ *hat einen Beweis.*

Beweis. Genau wie in AL.

Lemma 2.4.18 *Alle PL Tautologien sind beweisbar.*

Beweis. Sei $\varphi = \bar{\varphi}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$, wo $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Fml}_{A^*}$ und $\underset{A^*}{\vdash} \bar{\varphi}$. Sei $\bar{b} = \langle \bar{\varphi}_i \mid i < p \rangle$ ein AL Beweis für $\bar{\varphi}$. Wir nehmen (o.B.d.A.) an, daß $\mathrm{prim}(\bar{\varphi}_i) \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$ für $i < p$. Setze $\varphi_i = \bar{\varphi}_i(\chi_1, \ldots, \chi_n)$. $b = \langle \varphi_i \mid i < p \rangle$ ist dann ein PL Beweis für φ. QED(Lemma 2.4.18)

Lemma 2.4.19 $\vdash \varphi,\ \vdash \psi\ \rightarrow \vdash \varphi \wedge \psi$.

Beweis. (MP) und $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.

Lemma 2.4.20 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi),\ \vdash (\psi \rightarrow \chi)\ \rightarrow \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$

Beweis. (MP) und $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.

(Lemma 2.4.20 ist die *Schnittregel* für $\vdash$.)

Lemma 2.4.21 $\vdash \varphi \rightarrow \vdash \bigwedge v\ \varphi$.

Beweis. Sei $\vdash \varphi$. Dann

$\vdash \varphi$	
$\vdash \varphi \rightarrow ((\psi \vee \neg\psi) \rightarrow \varphi) \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\psi))$	(Tautologie)
$\vdash (\psi \vee \neg\psi) \rightarrow \varphi$	(MP)
$\vdash (\psi \vee \neg\psi) \rightarrow \bigwedge v\ \varphi$	(Q1)
$\vdash (\psi \vee \neg\psi)$	(Tautologie)
$\vdash \bigwedge v\ \varphi$	(MP)

QED(Lemma 2.4.21)

Lemma 2.4.22 $\vdash \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\bigwedge v\ \varphi \rightarrow \bigwedge v\ \psi)$.

Beweis.

$\vdash \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	(Ax)
$\vdash \varphi \rightarrow (\bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$	(nach (MP) und
	$\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$
$\vdash \bigwedge v\ \varphi \rightarrow \varphi$	(Ax)
$\vdash \bigwedge v\ \varphi \rightarrow (\bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$	(Schnitt)
$\vdash \bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$	(nach (MP) und $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$
$\vdash \bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \bigwedge v\, \psi$	(Q1)
$\vdash \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\bigwedge v\, \varphi \rightarrow \bigwedge v\, \psi)$	((MP) und $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$

QED(Lemma 2.4.22)

Lemma 2.4.23 $\vdash \bigwedge v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\bigvee v\ \varphi \rightarrow \bigvee v\ \psi)$.

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi) & \text{(Ax)} \\
\vdash (\bigwedge v(\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi & \\
\vdash \psi \to \bigvee v\, \psi & \text{(Ax)} \\
\vdash (\bigwedge v(\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \bigvee v\, \psi & \text{(Schnitt)} \\
\vdash \varphi \to (\bigwedge v(\varphi \to \psi) \to \bigvee v\, \psi) & \\
\vdash \bigvee v\, \varphi \to ((\bigwedge v(\varphi \to \psi) \to \bigvee v\, \psi) & \text{(Q2)} \\
\vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi) \to (\bigvee v\, \varphi \to \bigvee v\, \psi) &
\end{array}$$

QED(Lemma 2.4.23)

Korollar 2.4.24 *Sei* $\vdash \varphi \to \psi$. *Dann* $\vdash \bigwedge v\, \varphi \to \bigwedge v\, \psi$, $\vdash \bigvee v\, \varphi \to \bigvee v\, \psi$.

Korollar 2.4.25 *Sei* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. *Dann* $\vdash \bigwedge v\, \varphi \leftrightarrow \bigwedge v\, \psi$, $\vdash \bigvee v\, \varphi \leftrightarrow \bigvee v\, \psi$.

Lemma 2.4.26 *Sei* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, $\vdash \varphi' \leftrightarrow \psi'$. *Dann* $\vdash (\varphi\, e\, \varphi') \leftrightarrow (\psi\, e\, \psi')$ $(e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$.

Beweis. $\vdash ((\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\varphi' \leftrightarrow \psi')) \to ((\varphi\, e\, \varphi') \leftrightarrow (\psi\, e\, \psi'))$.

Lemma 2.4.27 *Sei* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. *Dann* $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.

Beweis. Trivial.

Definition. Sei $p \in A$, $\chi, \varphi \in$ Fml. $\chi({}^p/_\varphi)$ wird durch Rekursion auf χ definiert:

$$\begin{array}{rcl}
\chi({}^p/_\varphi) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi & \text{falls } p = \chi \\ \chi & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad \text{für } \chi \in \text{Pfml} \\
 & & (\chi\, e\, \psi)({}^p/_\varphi) = (\chi({}^p/_\varphi)\, e\, \psi({}^p/_\varphi)) \quad (e = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow) \\
 & & (\neg\chi)({}^p/_\varphi) = \neg(\chi({}^p/_\varphi)) \\
 & & Qv\; \chi({}^p/_\varphi) = Qv(\chi({}^p/_\varphi)) \quad (Q = \bigwedge, \bigvee).
\end{array}$$

Unter Verwendung von Korollar 2.4.25, Lemma 2.4.26 und Lemma 2.4.27 erhalten wir dann:

Lemma 2.4.28 *Sei* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. *Dann* $\vdash \chi({}^p/_\varphi) \leftrightarrow \chi({}^p/_\psi)$.

Beweis. Induktion auf χ.

(**Bemerkung.** Wir sagen: φ, ψ sind PL-*äquivalent* gdw. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Lemma 2.4.28 besagt also: Geht χ' dadurch aus χ hervor, daß an einigen Stellen eine Teilformel φ durch eine äquivalente Formel φ' ersetzt wird, so ist χ äquivalent mit χ'.)

Lemma 2.4.29 $\vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi)$.

Beweis.

$$\begin{array}{rll}
(\to) & \vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \wedge \psi) & \text{(Ax)} \\
& \vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \to \varphi & \text{(Schnitt, Tautologie)} \\
& \vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \to \bigwedge v\, \varphi & \text{(Q1)} \\
\text{ähnlich:} & \vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \to \bigwedge v\, \psi & \\
\text{also} & \vdash \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) \to (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) & \text{(MP, Tautologie)} \\
\\
(\leftarrow) & \vdash (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) \to \bigwedge v\, \varphi & \text{(Tautologie)} \\
& \vdash (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) \to \varphi & \text{(Schnitt, Ax)} \\
\text{ähnlich} & \vdash (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) \to \psi & \\
& \vdash (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) \to (\varphi \wedge \psi) & \text{(MP, Tautologie)} \\
& \vdash (\bigwedge v\, \varphi \wedge \bigwedge v\, \psi) \to \bigwedge v(\varphi \wedge \psi) & \text{(Q1)}
\end{array}$$

QED(Lemma 2.4.29)

Lemma 2.4.30 $\vdash \bigwedge v\, \neg\varphi \leftrightarrow \neg \bigvee v\, \varphi$.

Beweis.

$$\begin{array}{rll}
(\to) & \vdash \bigwedge v\, \neg\varphi \to \neg\varphi & \text{(Ax)} \\
& \vdash \varphi \to \neg \bigwedge v\, \neg\varphi & \text{(MP, Tautologie)} \\
& \vdash \bigvee v\, \varphi \to \neg \bigwedge v\, \neg\varphi & \text{(Q2)} \\
& \vdash \bigwedge v\, \neg\varphi \to \neg \bigvee v\, \varphi & \text{(MP, Tautologie)} \\
(\leftarrow) & \vdash \varphi \to \bigvee v\, \varphi & \text{(Ax)} \\
& \vdash \neg \bigvee v\, \varphi \to \neg\varphi & \text{(MP, Tautologie)} \\
& \vdash \neg \bigvee v\, \varphi \to \bigwedge v\, \neg\varphi & \text{(Q1)}
\end{array}$$

QED(Lemma 2.4.30)

Korollar 2.4.31 $\vdash \bigvee v\, \neg\varphi \leftrightarrow \neg \bigwedge v\, \varphi$.

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\vdash \bigwedge v\, \neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg \bigvee v\, \neg\varphi & \text{Lemma 2.4.30} \\
\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi & \text{(Tautologie)} \\
\vdash \bigwedge v\, \varphi \leftrightarrow \neg \bigvee v\, \neg\varphi & \text{Lemma 2.4.28} \\
\vdash \bigvee v\, \varphi \leftrightarrow \neg \bigwedge v\, \varphi & \text{(MP, Tautologie)}
\end{array}$$

QED(Korollar 2.4.31)

Korollar 2.4.32 $\vdash \bigwedge v(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\bigvee v\, \varphi \vee \bigvee v\, \psi)$.

Beweis.

$$\begin{array}{rcl}
\vdash \bigvee v(\varphi \vee \psi) & \leftrightarrow & \bigvee v \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg \bigwedge v \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\bigwedge v \neg\varphi \wedge \bigwedge v\, \neg\psi) \\
& \leftrightarrow & (\neg \bigwedge v\, \neg\varphi \vee \neg \bigwedge v\, \neg\psi) \leftrightarrow (\bigvee v\, \varphi \vee \bigvee v\, \psi)
\end{array}$$

(durch iterierte Anwendung von Lemma 2.4.28). QED(Korollar 2.4.32)

Korollar 2.4.33 $\vdash \bigvee v(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\bigwedge v\, \varphi \to \bigvee v\, \psi)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\vdash \bigvee v(\varphi \to \psi) &\leftrightarrow \bigvee v(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\bigvee v\ \neg\varphi \vee \bigvee v\ \psi)\\ &\leftrightarrow (\neg\bigvee v\ \neg\varphi \to \bigvee v\ \psi) \leftrightarrow (\bigwedge v\ \varphi \to \bigvee v\ \psi)\end{aligned}$$

QED(Korollar 2.4.33)

Lemma 2.4.34 $\vdash \varphi \leftrightarrow \bigwedge v\ \varphi \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$.

Beweis.

$$\begin{array}{ll}(\leftarrow) & \vdash \bigwedge v\ \varphi \to \varphi\\ (\to) & \vdash \varphi \to \varphi;\ \text{also}\ \ \vdash \varphi \to \bigwedge v\ \varphi \qquad \text{nach (Q1).}\end{array}$$

QED(Lemma 2.4.34)

Lemma 2.4.35 $\vdash \varphi \leftrightarrow \bigvee v\ \varphi$.

Beweis. Wie oben.

Lemma 2.4.36 $\vdash \bigvee v(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \bigvee v\ \psi) \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$.

Beweis.

$$\begin{array}{lll}(\to) & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi & \text{(Tautologie)}\\ & \vdash \psi \to \bigvee v\ \psi & \text{(Ax)}\\ & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \bigvee v\ \psi & \text{(Schnitt)}\\ & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi & \text{(Tautologie)}\\ & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \bigvee v\ \varphi & \text{(MP, Tautologie)}\\ (\leftarrow) & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \bigvee v(\varphi \wedge \psi) & \text{(Ax)}\\ & \vdash \psi \to (\varphi \to \bigvee v(\varphi \wedge \psi)) & \\ & \vdash \bigvee v\psi \to (\varphi \to \bigvee v(\varphi \wedge \psi)) & \text{(Q2)}\\ & \vdash (\varphi \wedge \bigvee v\ \psi) \to \bigvee v(\varphi \wedge \psi) & \end{array}$$

QED(Lemma 2.4.36)

Lemma 2.4.37 $\vdash \bigwedge v(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \bigwedge v\ \psi) \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\vdash \bigwedge v(\varphi \vee \psi) &\leftrightarrow \neg\bigvee v(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \bigvee v\ \neg\psi)\\ &\leftrightarrow (\neg\neg\varphi \vee \neg\bigvee v\ \neg\psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \bigwedge v\ \psi)\end{aligned}$$

QED(Lemma 2.4.37)

Lemma 2.4.38 $\vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \bigwedge v\ \psi) \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$.

Beweis.

$$\vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \bigwedge v(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \bigwedge v\ \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \bigwedge v\ \psi)$$

QED(Lemma 2.4.38)

Lemma 2.4.39 $\vdash \bigwedge v(\psi \to \varphi) \leftrightarrow (\bigvee v\ \psi \to \varphi) \quad (v \notin \mathrm{Fr}(\varphi))$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\vdash \bigwedge v(\psi \to \varphi) \quad &\leftrightarrow \quad \bigwedge v(\neg\psi \vee \varphi) \leftrightarrow (\bigwedge v\ \neg\psi \vee \varphi)\\ &\leftrightarrow \quad (\neg\bigwedge v\ \neg\psi \to \varphi) \leftrightarrow (\bigvee v\ \psi \to \varphi)\end{aligned}$$

QED(Lemma 2.4.39)

Lemma 2.4.40 $\vdash \bigwedge v\, \varphi \leftrightarrow \bigwedge w\, \varphi({}^{v}/{w}) \quad (w \notin \mathrm{Fr}(\bigwedge v\, \varphi))$.

Beweis.

$$\begin{array}{lll}(\to) & \vdash \bigwedge v\, \varphi \to \varphi({}^{v}/{w}) & (Ax)\\ & \vdash \bigwedge v\, \varphi \to \bigwedge w\, \varphi({}^{v}/{w}) & (\mathrm{Q1})\\ (\leftarrow) & \text{Nach } (\to) \text{ gilt: } \vdash \bigwedge w\, \varphi({}^{v}/{w}) \to \bigwedge v\, \varphi({}^{v}/{w})({}^{w}/{v}) & \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad || & \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bigwedge v\, \varphi & \end{array}$$

QED(Lemma 2.4.40)

Lemma 2.4.41 $\vdash \bigvee v\, \varphi \leftrightarrow \bigvee w\, \varphi({}^{v}/{w}) \quad (w \notin \mathrm{Fr}(\bigvee v\, \varphi))$.

Beweis. Wie oben.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Gebundene Umbenennung

Definition. φ' ist eine *gebundene Umbenennung* von φ gdw. φ' durch iterierte Anwendung von Lemmata 2.4.40, 2.4.41 auf Teilformeln von φ hervorgeht.

Genauer: φ' ist eine *unmittelbare gebundene Umbenennung* von φ gdw. es gibt ψ, χ, p mit: $\varphi = \psi({}^{p}/{Qv\ \chi})$, $\varphi' = \psi({}^{p}/{Qw\ \chi({}^{v}/{w})})$ wobei $w \notin \mathrm{Fr}(Qv\ \chi)$ und $Q = \bigwedge, \bigvee$.
φ ist eine *gebundene Umbenennung* von φ gdw. es gibt $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$ mit $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = \varphi_n$ und φ_{i+1} ist eine unmittelbare gebundene Umbenennung von φ_i für $i < n$.
Eine gebundene Umbenennung kann manchmal wirklich nur durch eine Kette von einzelnen Umbenennungen vollbracht werden. Zum Beispiel ist $\bigwedge w \bigvee v(Pwv \to \bigvee w\ \ Awv)$ eine gebundene Umbenennung von $\bigwedge v \bigvee w(Pvw \to \bigvee v\ \ Avw)$, wie die folgende Kette zeigt:

$$\begin{array}{l}\bigwedge v \bigvee w(Pvw \to \bigvee v\ \ Avw)\\ \bigwedge v \bigvee u(Pvu \to \bigvee v\ \ Avu)\\ \bigwedge w \bigvee u(Pwu \to \bigvee v\ \ Avu)\\ \bigwedge w \bigvee u(Pwu \to \bigvee w\ \ Awu).\end{array}$$

Definition. $\varphi \sim_g \varphi'$ gdw. φ' eine gebundene Umbenennung von φ ist.
$\sim_g$ ist dann eine Äquivalenzrelation, d.h. $\varphi \sim_g \varphi$, $\varphi \sim_g \varphi' \to \varphi' \sim_g \varphi$, $\varphi \sim_g \varphi' \sim_g \varphi'' \to \varphi \sim_g \varphi''$.

Lemma 2.4.42 $\varphi \sim_g \varphi' \to \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Beweis. Sei $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = \varphi_n$, wobei φ_{i+1} eine unmittelbare gebundene Umbenennung von φ_i für $i < n$. Dann ist $\vdash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_{i+1}$ nach Lemmata 2.4.40, 2.4.41 und 2.4.28.

QED(Lemma 2.4.42)

Lemma 2.4.43 *Seien* $w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{Vbl}$. *Es gibt* $\varphi' \sim_g \varphi$ *mit* $w_1, \ldots, w_n \notin \mathrm{Geb}(\varphi')$.

Beweis. Induktion auf φ.

(Wir erinnern daran, daß $\mathrm{Geb}(\varphi)$ = die Menge der in φ gebunden vorkommenden Variablen ist.)

Lemma 2.4.44 *Sei* $u \notin \mathrm{Geb}(\varphi)$. *Dann ist* $\varphi({}^{v}/{u})$ *definiert für alle* v.

Beweis. Induktion auf φ.

Lemma 2.4.45 *Sei* $\varphi \sim_g \varphi'$ *s.t.* $\varphi({}^{v}/{u})$, $\varphi'({}^{v}/{u})$ *definiert sind. Dann* $\varphi({}^{v}/{u}) \sim_g \varphi'$.

Beweis. Induktion auf φ.

Da die Undefiniertheit von $\varphi({}^{v}/{u})$ lästig sein kann, verwendet man die folgende Konvention:
Ist $\varphi({}^{v}/{u})$ nicht definiert, so setzt man $\varphi({}^{v}/{u}) = \varphi'({}^{v}/{u})$ für ein $\varphi' \sim_g \varphi$ derart, daß $\varphi'({}^{v}/{u})$ definiert ist. Ein solches φ' gibt es nach Lemma 2.4.43, 2.4.44. Nach dieser Konvention ist $\varphi({}^{v}/{u})$ nicht eindeutig jedoch bis auf gebundene Umbenennung bestimmt nach Lemma 2.4.45.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Definition. Eine Formel φ ist in *pränexer Normalform* gdw. $\varphi = Q_1 v_1 \ldots Q_n v_n \psi$, wobei $Q_i = \bigwedge$ oder $\bigvee$ für $i = 1, \ldots, n$ und ψ quantorfrei ist.

Unter Verwendung von Lemmata 2.4.36 – 2.4.39 kann man beweisen

Lemma 2.4.46 *Zu* φ *gibt es ein* φ' *in pränexer Normalform mit* $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Lemma 2.4.46 wird durch Induktion auf φ bewiesen. Der Beweis ist dem Leser überlassen.

Herleitbarkeit aus einer Formelmenge

Definition. Sei $W \subset \mathrm{Fml}_S$. $W \underset{S}{\vdash} \varphi$ gdw. $\varphi \in W^*$ = die kleinste Menge $W^* \subset \mathrm{Fml}_S$ mit: $W \subset W^*$, $\{\varphi \mid \vdash \varphi\} \subset W^*$ und W^* ist unter (MP) abgeschlossen.

Bemerkung. Wir können nicht verlangen, daß W^* unter (Q1), (Q2) abgeschlossen ist, denn $\{\bigvee v\ Pv \to Pv\} \nvdash \bigvee v\ Pv \to \bigwedge v\ Pv$. Die in W frei vorkommenden Variablen fungieren wie unbestimmte Parameter in einem Beweis und man darf nicht über sie quantifizieren.

Definition. $b = \langle \varphi_i \mid i < n \rangle$ ist ein Beweis von φ aus W gdw. $\varphi = \varphi_i$ für ein $i < n$ und für jedes $i < n$ ist entweder $\vdash \varphi_i$ oder $\varphi_i \in W$ oder φ_i folgt durch (MP) aus $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Lemma 2.4.47 *$W \vdash \varphi$ gdw. φ hat einen Beweis aus W.*

Beweis wie in AL.

Bemerkung. Dieser Begriff von Beweis ist schlecht, denn $\{\varphi \mid \vdash \varphi\}$ ist nicht berechenbar. Infolgedessen ist die Menge der Beweise nicht berechenbar. Man kann dieses Problem beheben, indem man setzt:

Definition. $b = \langle\langle\varphi_i, d_i\rangle \mid i < n\rangle$ ist ein *expliziter Beweis* von φ aus W gdw. $\varphi = \varphi_i$ für ein $i < n$ und für $i < n$ gilt entweder

$\varphi_i \in W$ und $d_i = \emptyset$ oder
$\vdash \varphi_i$ und d_i ist ein Beweis von φ_i oder
$d_i = \emptyset$ und φ_i folgt durch (MP) aus $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Die Menge der expliziten Beweise ist berechenbar, wenn W berechenbar ist. Offensichtlich gilt aber: φ hat einen Beweis aus W gdw. φ einen expliziten Beweis aus W hat.
Aus Lemma 2.4.47 folgt der *Endlichkeitssatz* genau wie in AL:

Korollar 2.4.48 *$W \vdash \varphi \leftrightarrow \bigvee U \subset W$ (U ist endlich $\wedge$ $U \vdash \varphi$).*

Wie früher setzen wir:

$$W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \ \leftrightarrow \ W \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \vdash \psi.$$

Das *Deduktionsprinzip* folgt genau wie in AL:

Lemma 2.4.49 *$W, \varphi \vdash \psi \ \leftrightarrow \ W \vdash \varphi \to \psi$.*

Und sogar:

Lemma 2.4.50 *$W, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \ \leftrightarrow \ W \vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$.*

Nach Korollar 2.4.48 und Lemma 2.4.50 folgt:

Lemma 2.4.51 *$W \vdash \varphi$ gdw. es gibt $\psi_1, \ldots, \psi_n \in W$ mit $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$.*

Definition. $\mathrm{Fr}(W) = \bigcup_{\varphi \in W} \mathrm{Fr}(\varphi)$.

Lemma 2.4.52 *Sei $v \notin \mathrm{Fr}(W)$. Dann $W \vdash \varphi \ \to \ W \vdash \bigwedge v\, \varphi$.*

Beweis. Sei $W \vdash \varphi$. Also $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$, $\psi_1, \ldots, \psi_n \in W$. Also $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \bigwedge v \varphi$ nach (Q1). QED(Lemma 2.4.52)

Lemma 2.4.53 *Sei $W \vdash (\varphi \to \psi)$, $v \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(W)$. Dann $W \vdash (\varphi \to \bigwedge v\, \psi)$*

Beweis. $W \vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi)$ nach Lemma 2.4.52.
$\vdash \bigwedge v(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \bigwedge v\, \psi)$
$W \vdash \varphi \to \bigwedge v\, \psi$. QED(Lemma 2.4.53)

Lemma 2.4.54 *Sei* $W \vdash (\psi \to \varphi)$, $v \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(W)$. *Dann* $W \vdash \bigvee v\, \psi \to \varphi$.

Beweis. Wie oben.

Korollar 2.4.55 *Sei* $W \subset \mathrm{Aus}$. $\{\varphi \mid W \vdash \varphi\}$ *ist dann unter* (MP), (Q1), (Q2) *abge-*
schlos-
sen.

(Deshalb gelten z.B. Lemmata 2.4.19, 2.4.20, 2.4.21 sowie 2.4.24 – 2.4.28 mit $W \vdash$ statt $\vdash$, wenn $W \subset \mathrm{Aus}$.)

Lemma 2.4.56 $W \vdash U, \quad U \vdash V \;\to\; W \vdash V$.

Beweis. Sei $\varphi \in V$. Sei $\vdash (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n) \to \varphi$, wobei $\chi_1, \ldots, \chi_n \in U$. Dann $W \vdash (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$. Also $W \vdash \varphi$ nach (MP). QED(Lemma 2.4.56)

Definition. $\mathrm{con}(W)$ gdw. $\bigvee \varphi\; W \nvdash \varphi$.

Genau wie in AL folgt für beliebiges φ:

Lemma 2.4.57 $\neg\mathrm{con}(W) \leftrightarrow W \vdash \varphi, \neg\varphi$.

Wir definieren auch:

Definition. Eine *mathematische Theorie* ist ein Paar $\langle S, T\rangle$, wobei S eine PL Sprache ist und $T \subset \mathrm{Aus}_S$.

2.5 Vollständigkeit

Der *Vollständigkeitssatz* besagt:

Satz 2.5.1 *Sei* $\langle S, W\rangle$ *eine mathematische Theorie. Dann* $\mathrm{con}(W) \to \bigvee \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S\ \ \mathfrak{A} \models W$.

Beweis. Sei also $W \subset \mathrm{Aus}_S$ widerspruchsfrei.
Annahme: Sei $\bar{W} \supset W$ eine Formelmenge mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{con}(\bar{W})$

(b) Für alle Formeln φ gilt: $\bar{W} \vdash \varphi$ oder $\bar{W} \vdash \neg\varphi$.

(c) $\bar{W} \vdash \bigvee u\, \varphi \longleftrightarrow \bigvee w \in \mathrm{Vbl}\ \bar{W} \vdash \varphi(^u/_w)$

Der Leserlichkeit halber weisen wir die Existenz einer solchen Erweiterung $\bar{W}$ von W nach, erst nachdem wir mit Hilfe dieser Annahme ein Modell von W konstruiert haben.

Wir definieren zunächst eine Äquivalenzrelation auf den Variablen.

Definition. Für $v, w \in \mathrm{Vbl}$ sei $v \sim w$ gdw. $\bar{W} \vdash v = w$. Für $v \in \mathrm{Vbl}$ bezeichne $[v]$ die Äquivalenzklasse von v nach $\sim$, d.h. $[v] = \{w \in \mathrm{Vbl} \mid w \sim v\}$.

Nun definieren wir ein Modell $\mathfrak{A} = \langle B_{\mathfrak{A}}, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_m^{\mathfrak{A}}\rangle$ durch:

$$
\begin{aligned}
&B_{\mathfrak{A}} = \{[v] \mid v \in \mathrm{Vbl}\}\\
&P_i^{\mathfrak{A}}([v_1], \ldots, [v_{n_i}]) \longleftrightarrow \bar{W} \vdash P_i v_1 \ldots v_{n_i} \quad (i = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

wobei $n_i = \mathrm{Typ}(P_i)$.

Behauptung: Sei $\varphi = \varphi(w_1, \ldots, w_n)$. Dann

$$\mathfrak{A} \models \varphi[[w_1], \ldots, [w_n]] \longleftrightarrow \bar{W} \vdash \varphi(w_1, \ldots, w_n).$$

Also nach dieser Behauptung gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[f] \longleftrightarrow \bar{W} \vdash \varphi$ für alle $\varphi \in \mathrm{Fml}_S$, wobei die Belegung f definiert ist durch $f(w) = [w]$ für $w \in \mathrm{Vbl}$. Also $\mathfrak{A} \models \bar{W}[f]$ und insbesondere $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\varphi \in W$, d.h. $\mathfrak{A} \models W$.

Beweis der Behauptung durch Induktion über den Formelaufbau.
FALL 1: $\varphi \in \mathrm{Pfml}$. In diesem Fall machen wir hauptsächlich Gebrauch von der Definition von $\mathfrak{A}$.
FALL 1.1: $\varphi = P w_1 \ldots w_n$, $n = \mathrm{Typ}(P)$.
$\mathfrak{A} \models P[w_1] \ldots [w_n] \longleftrightarrow P^{\mathfrak{A}}[w_1] \ldots [w_n] \longleftrightarrow \bar{W} \vdash P w_1 \ldots w_n$.
FALL 1.2: $\varphi = (w_1 \dot{=} w_2)$.
$\mathfrak{A} \models (w_1 = w_2)[[w_1], [w_2]] \longleftrightarrow [w_1] = [w_2] \longleftrightarrow \bar{W} \vdash w_1 = w_2$.

FALL 2: $\varphi = \neg\psi$. Hier brauchen wir die Induktionsvoraussetzung zusammen mit Eigenschaft (b).
$\mathfrak{A} \models \neg\psi[[w_1], \ldots, [w_n]] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[[w_1], \ldots, [w_n]] \overset{\text{I.V.}}{\longleftrightarrow} \bar{W} \nvdash \psi(w_1, \ldots, w_n) \overset{\text{(b)}}{\longleftrightarrow} \bar{W} \vdash \neg\psi(w_1, \ldots, w_n)$.
FALL 3: $\varphi = (\psi e \chi)$ für $e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. In diesem Fall machen wir hauptsächlich Gebrauch von der Induktionsvorausetzung.
$\mathfrak{A} \models (\psi e \chi)[[w_1], \ldots, [w_n]] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[[w_1], \ldots, [w_n]]\ e\ \mathfrak{A} \models \chi[[w_1], \ldots, [w_n]] \overset{\text{I.V.}}{\longleftrightarrow} \bar{W} \vdash \psi(w_1, \ldots, w_n)\ e\ \bar{W} \vdash \chi(w_1, \ldots, w_n) \longleftrightarrow \bar{W} \vdash (\psi e \chi)(w_1, \ldots, w_n)$.
FALL 4: $\varphi = \bigvee u\, \psi$.
Wie im Beweis von Lemma 2.3.6 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $u \notin \{w_1, \ldots, w_n\}$ (siehe Seite 34). Also haben wir die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[[w_1], \ldots, [w_n]] &\longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \bigvee u\, \psi[[w_1], \ldots, [w_n]] \\
&\longleftrightarrow \bigvee v \in \mathrm{Vbl}\ \mathfrak{A} \models \psi[[v], [w_1], \ldots, [w_n]] \\
&\longleftrightarrow \bigvee v \in \mathrm{Vbl}\ \mathfrak{A} \models \psi'[[v], [w_1], \ldots, [w_n]], \text{ wobei } \psi' \text{ eine} \\
&\qquad \text{gebundene Umbennung von } \psi \text{ ist mit: } v \notin \mathrm{Geb}(\psi). \\
&\qquad \text{(Dann ist nämlich die Ersetzung } \psi'({}^u/_v) \text{ definiert.)} \\
&\longleftrightarrow \bigvee v \in \mathrm{Vbl}\ \mathfrak{A} \models \psi'({}^u/_v)[[v], [w_1], \ldots, [w_n]] \\
&\overset{\text{I.V.}}{\longleftrightarrow} \bigvee v \in \mathrm{Vbl}\ \bar{W} \vdash \psi'(u, w_1, \ldots, w_n)({}^u/_v) \\
&\overset{\text{(c)}}{\longleftrightarrow} \bar{W} \vdash \bigvee u\, (\psi'(u, w_1, \ldots, w_n)) \\
&\longleftrightarrow \bar{W} \vdash \bigvee u\, (\psi(u, w_1, \ldots, w_n)) \\
&\longleftrightarrow \bar{W} \vdash (\bigvee u\, \psi)(w_1, \ldots, w_n) \\
&\longleftrightarrow \bar{W} \vdash \varphi(w_1, \ldots, w_n)
\end{aligned}$$

Dabei ist die vierte Äquivalenz gültig nach dem Ersetzungslemma, das hier anwendbar ist, da ψ gerade so in ψ' umbenannt wurde, daß die Ersetzung $\psi'({}^u/_v)$ definiert ist.

FALL 5: $\varphi = \bigwedge \psi$. Angesichts der Äquivalenz $\mathfrak{A} \models \bigwedge u\, \psi[[w_1], \ldots, [w_n]] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg \bigvee u\, \neg\psi[[w_1], \ldots, [w_n]]$ braucht man hier nur die Fälle 1.1 und 3 anzuwenden.

QED(Behauptung)

QED(Vollständigkeitssatz)

Wir beweisen nun, daß eine widerspruchsfreie Aussagenmenge W so zu einem $\bar{W}$ erweitert werden kann, wie im obigen Beweis angenommen.

Lemma 2.5.2 *Sei $W \subset$ Aus widerspruchsfrei. Es existiert eine Erweiterung $\bar{W} \supset W$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) con($\bar{W}$)

(b) Für alle Formeln φ gilt: $\bar{W} \vdash \varphi$ oder $\bar{W} \vdash \neg\varphi$.

(c) $\bar{W} \vdash \bigvee u\, \varphi \longleftrightarrow \bigvee w \in \mathrm{Vbl}\, \bar{W} \vdash \varphi(^u/_w)$

Beweis. Sei $\langle \varphi_i \,|\, i \in \omega \rangle$ eine Aufzählung von Fml_S und $\langle v_i \,|\, i \in \omega \rangle$ eine Aufzählung von Vbl_S. Wir konstruieren rekursiv eine Kette $\langle W_i \,|\, i \in \omega \rangle$ von Formelmengen, um unser $\bar{W}$ als deren Vereinigung zu erhalten.

W_0: Setze $W_0 = W$.

W_{i+1}: Hier müssen wir eine Fallunterscheidung machen.

Fall 1: $\neg\mathrm{con}(W_i \cup \{\varphi_i\})$. Setze $W_{i+1} = W_i$.

Fall 2: $\mathrm{con}(W_i \cup \{\varphi_i\})$. Wir haben zwei Unterfälle.

Fall 2.1: $\varphi_i = \bigvee u\, \psi$. Setze $W_{i+1} = W_i \cup \{\psi(^u/_{v_j})\}$, wobei j minimal aus ω ist mit $v_j \notin \mathrm{Fr}(W_i \cup \{\psi\})$. Dann ist $\mathrm{con}(W_{i+1})$. (Angenommen nicht. Dann gilt $W_i \vdash \neg\psi(^u/_{v_j})$, also $W_i \vdash \bigwedge v_j \neg\psi(^u/_{v_j})$, also auch $W_i \vdash \bigwedge u \neg\psi$ und damit $W_i \vdash \neg \bigvee u\psi$. Widerspruch zur Vorausetzung von Fall 2!)

Fall 2.2: Fall 2.1 versagt. Setze $W_{i+1} = W_i \cup \{\varphi_i\}$.

Setze $\bar{W} = \bigcup_{i<\omega} W_i$.

Eigenschaft (a) gilt, da $\bar{W}$ die Vereinigung einer Kette widerspruchsfreier Formelmengen ist. (Siehe Lemma 1.5.10.)

Eigenschaft (b) ist ebenfalls gültig: Sei φ eine beliebige Formel mit $\bar{W} \nvdash \neg\varphi$. Dann gilt $\neg\mathrm{con}(\bar{W} \cup \{\neg\varphi\})$ nach Konstruktion von $\bar{W}$. Also $\bar{W}, \neg\varphi \vdash \varphi$, also auch $\bar{W} \vdash \neg\varphi \to \varphi$ und somit $\bar{W} \vdash \varphi$. Folglich gilt $\bar{W} \vdash \varphi$ oder $\bar{W} \vdash \neg\varphi$ für alle Formeln φ.

Es bleibt nur noch Eigenschaft (c) nachzuweisen:

$$\bar{W} \vdash \bigvee u\, \varphi \longleftrightarrow \bigvee w \in \mathrm{Vbl}\, \bar{W} \vdash \varphi(^u/_w).$$

$(\to)$ Sei $i < \omega$ mit $\varphi_i = \bigvee u\, \varphi$. Dann gilt $\mathrm{con}(W_i \cup \{\varphi_i\})$, denn sonst wäre $\neg\mathrm{con}(\bar{W})$. Also existiert ein $w \in \mathrm{Vbl}$ mit $W_{i+1} = W_i \cup \{\varphi(^u/_w)\}$. Also $\bigvee w \in \mathrm{Vbl}\, \bar{W} \vdash \varphi(^u/_w)$.

$(\leftarrow)$ Sei $w \in \mathrm{Vbl}$ mit $\bar{W} \vdash \varphi(^u/_w)$. Dann gilt $\bar{W} \vdash \bigvee u\, \varphi$ nach A12.

Also ist $\bar{W}$ eine Erweiterung von W mit den Eigenschaften (a),(b) und (c). QED(Lemma)

Korollar 2.5.3 *Sei $\langle S, W \rangle$ eine mathematische Theorie. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} W \vdash \varphi \;&\longleftrightarrow\; \bigwedge \mathfrak{A} \in Mod_S \bigwedge f \in Bel_{\mathfrak{A}}\, (\mathfrak{A} \models W \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f]) \\ &\longleftrightarrow\; \mathfrak{A} \models \varphi. \end{aligned}$$

Beweis. $(\to)$ Diese Richtung gilt nach dem Richtigkeitssatz.
$(\leftarrow)$ Sei $W \nvdash \varphi$. Dann ist $W \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei. Also $\mathrm{con}(W \cup \{\bigvee v_1 \ldots v_n \neg\varphi\})$, wobei $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Also existiert nach dem Vollständigkeitssatz ein $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_S$ mit: $\mathfrak{A} \models W \cup \{\bigvee v_1 \ldots v_n \neg\varphi\}$. Folgilich: $\bigvee a_1 \ldots a_n \in B_{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{A} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, also auch: $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[f]$ für $f(v_i) = a_i$ und somit: $\mathfrak{A} \nvDash \varphi[f]$.

Kapitel 3

Axiomatische Mengenlehre

In diesem Abschnitt werden wir die Mengenlehre in einer PL-Sprache formalisieren. Wir werden auch sehen, wie Begriffe der Mathematik, wie z.B. “geordnetes Paar”, “Relation”, “Funktion” und “natürlichen Zahlen” mit ihrer Struktur, sich in der Mengenlehre erklären lassen. Dabei werden die Rekursionssätze unsere wichtigsten Werkzeuge sein. Daß wir die Mengenlehre im Rahmen einer PL-Sprache entwickeln, ermöglicht uns metatheoretische Fragestellungen, z.B. nach der Beweisbarkeit, relativer Konsistenz und Unabhängigkeit von Aussagen bzgl. mathematischer Theorien, nachzugehen.

Wir werden die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF entwickeln. Anstatt Mengen von *Urelementen*, auch *Individuen* genannt, werden wir uns mit *reinen* Mengen befassen, also Mengen ohne Urelemente. Sie bestehen aus der leeren Menge $\emptyset$ und “Mengen von Mengen”. Wir verzichten auf Urelemente, erstens weil die gesamte Mathematik auch in einer Mengenlehre ohne Urelemente formalisiert werden kann, und zweitens weil die Systeme der Mengenlehre mit Urelemente in Systeme ohne sie interpretiert werden können.

3.1 Die Axiomatisierung von ZF

Die Sprache der Mengenlehre, $\langle\in\rangle$, werden wir mit E und die Sprache der Mengenlehre mit zusätzlichen Prädikaten, $\langle\in, P_1, \ldots, P_m\rangle$, mit $\mathrm{E}_{P_1,\ldots,P_m}$ bezeichnen. Das Prädikat $\in$ wird die Rolle der vertrauten Elementbeziehung spielen. Wie wir die Axiome nun festlegen, bestimmt unsere Mengen. Wir wollen auf alle Fälle, daß unsere Mengen durch ihre Elemente eindeutig bestimmt werden, was wir durch das *Extensionalitätsaxiom* ausdrücken:

A1 $\bigwedge x \bigwedge y (\bigwedge w (w \in x \longleftrightarrow w \in y) \longrightarrow x = y)$

Setze $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E} + \mathbf{A1}$. E_0 ist eine mathematische Theorie in der Sprache der Mengenlehre mit einem einzigen Axiom.

Wir werden es günstig finden, über *Klassen* von Mengen zu reden, auch wenn diese Klassen keine Mengen sind, also nicht zu den Objekten unserer Sprache gehören – es gibt keine Variablen für echte Klassen. Zum Beispiel wird die *Allklasse*, die Klasse aller Mengen, selber keine Menge sein; wir werden aber darüber reden wollen. Zwecks dessen benutzen wir eine metamathematische Sprache mit *Klassentermen*. Wohlbemerkt, die Klassenterme kommen nicht in der Sprache der Mengenlehre vor – wir wollen nur in der Metaebene so reden, als ob sie vorkämen. Man sagt, daß man *virtuelle Klassen* benutzt. Sie sind aber nur metasprachliche Abkürzungen für Formeln in der Sprache der Mengenlehre, die glücklicherweise meistens die von uns erwartete Bedeutung haben.

Seien $\dot{\{}$, $\dot{|}$, und $\dot{\}}$ neue Grundzeichen. (Diese kommen nicht in E-Formeln vor.)

Definition. Ein *Klassenterm* ist eine Zeichenreihe $\{v|\varphi\}$, wobei $\varphi \in \mathrm{Fml}_\mathrm{E}$.

$\{v \mid \varphi\}$ bedeutet also, die Zusammenfassung oder Klasse aller x, die φ erfüllen.

Definition. Ein *Term* ist eine Variable oder ein Klassenterm. Wir setzen $\mathrm{Tm} =_{\mathrm{Df}}$ die Menge aller Terme.

Definition. Sei $w \in \mathrm{Vbl}$ und $t = \{v|\varphi\}$ ein Klassenterm. Setze $w \dot{\in} t \ =_{\mathrm{Df}} \ \varphi({}^{v}/_{w})$. (Hiermit ist $w \in t$ erklärt für beliebige Terme t und beliebige Variablen w.)

Definition. $\mathrm{Fr}(\{v \mid \varphi\}) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{v\}$, $\mathrm{Fr}(w) =_{\mathrm{Df}} \{w\}$ für $w \in$ Vbl. (Hiermit ist $\mathrm{Fr}(t)$ erklärt für alle Terme t.)

Definition. Seien t, t' Terme, wobei t oder t' ein Klassenterm ist.
$t \dot{=} t' \ =_{\mathrm{Df}} \bigwedge w(w \in t \longleftrightarrow w \in t')$ für $w \notin \mathrm{Fr}(t), \mathrm{Fr}(t')$.

Dann gilt: $\mathrm{E}_0 \vdash t = t' \longleftrightarrow \bigwedge w(w \in t \longleftrightarrow w \in t')$ für alle Terme t, t'.
(Hierfür brauchen wir das Extensionalitätsaxiom, wenn t und t' beide Variablen sind.)

Definition. Sei t ein Klassenterm und t' ein Term.
$t \in t' \ =_{\mathrm{Df}} \bigvee w(w = t \wedge w \in t')$, falls $w \notin \ \mathrm{Fr(t)} \cup \mathrm{Fr}(t')$.

Definition. Sei $v \in \mathrm{Vbl}$ und $t \in \mathrm{Tm}$. Die *Einsetzung* $\varphi({}^{v}/_{t})$ wird durch Rekursion über φ definiert wie folgt:

Fall 1: $\varphi \in \mathrm{Pfml}$. Dieser Fall ist klar nach den vorhergehenden Definitionen.

Fall 2: $\varphi = (\psi e \chi)$ $(e = \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$. $\varphi({}^{v}/_{t}) =_{\mathrm{Df}} (\psi({}^{v}/_{t}) e \chi({}^{v}/_{t}))$.

Fall 3: $\varphi = \neg\psi$. $\varphi({}^{v}/_{t}) =_{\mathrm{Df}} \neg(\psi({}^{v}/_{t}))$.

Fall 4: $\varphi = Qx\psi$ $(x \in \mathrm{Vbl}, Q = \bigwedge, \bigvee)$.

$$\varphi =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \varphi & \text{falls } v = x; \\ Qx(\psi({}^{v}/_{t})) & \text{falls } \psi({}^{v}/_{t}) \text{ definiert ist und } x \notin \mathrm{Fr}(t); \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Induktion auf φ folgt: Falls kein $v \in \mathrm{Fr}(t)$ in φ gebunden vorkommt, dann ist $\varphi({}^{v}/_{t})$ definiert. Folglich gilt: Zu jedem φ existiert eine gebundene Umbenennung φ', so daß die Ersetzung $\varphi'({}^{v}/_{t})$ definiert ist.

Definition. $\varphi({}^{v}/_{t}) \ =_{\mathrm{Df}} \ \varphi'({}^{v}/_{t})$ für eine geeignete gebundene Umbenennung φ' von φ, falls $\varphi({}^{v}/_{t})$ nach der obigen Definition nicht definiert ist.

Bemerkung. Die durch Termeinsetzung entstehende Formel ist immer eine Formel der Sprache E.

Lemma 3.1.1 (E_0) $t = t' \longrightarrow (\varphi({}^{v}/_{t}) \longleftrightarrow \varphi({}^{v}/_{t'}))$ *für* $t, t' \in \mathrm{Tm}$.

Der Beweis läuft per Induktion über den Formelaufbau.

Definition. Zur Vereinfachung sagen wir, daß eine Variable *neu* ist, wenn sie in dem betrachteten Zusammenhang noch nicht vorgekommen ist.

Im folgenden bezeichnen $A, B, C, \ldots, t, s, \ldots$ beliebige Terme.

Lemma 3.1.2 (E_0) $(\bigwedge v\varphi \wedge \bigvee y\,(y = t)) \longrightarrow \varphi({}^{v}/_{t}) \quad (y \notin \mathrm{Fr}(t))$.

Beweis. Sei also $\bigwedge v\varphi \wedge \bigvee y\,(y = t)$. Sei $y = t$. Dann gelten $\varphi({}^{v}/_{y})$ und $\varphi({}^{v}/_{y}) \longleftrightarrow \varphi({}^{v}/_{t})$. Also $\varphi({}^{v}/_{t})$. QED(3.1.2)

Bemerkung. In Lemma 3.1.2 ist die Voraussetzung, daß t eine Menge ist, notwendig. Wir betrachten dazu eine Gegenbeispiel. Sei $\varphi = \bigvee y(v = y)$ und $t = \{x \mid x \notin x\}$. Dann haben wir $\mathrm{E}_0 \vdash w \in t \longleftrightarrow w \notin w$, also auch $\mathrm{E}_0 \vdash \bigwedge y(y \neq t)$. Aber aus $\bigwedge v\varphi$ folgt $\bigvee y(v = y)({}^{v}/_{t})$, d.h. $\mathrm{E}_0 \vdash \bigvee y(t = y)$. Widerspruch!

Definition.
$$\mathbf{V} = \{x \mid x = x\} \qquad \text{(die Allklasse)}$$
$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\} \qquad \text{(die leere Menge).}$$

Lemma 3.1.3 (E_0) $t \in \mathbf{V} \longleftrightarrow \bigvee y\,(y = t) \quad (y \notin \mathrm{Fr}(t))$.

Beweis. $t \in \mathbf{V} \longleftrightarrow \bigvee y(y = t \wedge y \in \mathbf{V}) \longleftrightarrow \bigvee y(y = t \wedge t \in \mathbf{V}) \longleftrightarrow (\bigvee y(y = t)) \wedge t \in \mathbf{V} \longleftrightarrow \bigvee y(y = t)$.

Bemerkung. Beachte, daß Lemma 3.1.3 ein *Schema* von Sätzen ist. Für einen Beweis muß man einen *Beweisschema* angeben, das jedem Term t einen Beweis von Lemma 3.1.3 zuordnet. Die nachfolgenden Definitionen und Lemmata sind ebenfalls Schemata.

Definition. $A \subset B \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigwedge x\,(x \in A \longrightarrow x \in B) \quad (x \notin \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B))$.

Lemma 3.1.4 (E_0) $A = B \longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Lemma 3.1.5 (E_0)

(a) $\emptyset \subset A \subset \mathbf{V}$

(b) $A \subset A$

(c) $(A \subset B \subset C \longrightarrow A \subset C)$

(d) $(A \subset B \wedge B \subset A) \longrightarrow A = B$

Definition.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (x \notin \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B))$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (x \notin \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B))$$
$$\neg A = \{x \mid x \notin A\} \quad (x \notin \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B))$$
$$A \setminus B = A \cap \neg B$$

Lemma 3.1.6 (E_0)

(a) $A \subset B \longleftrightarrow A = A \cap B \longleftrightarrow B = B \cup A \longleftrightarrow A \setminus B = \emptyset \longleftrightarrow B \cup \neg A = \mathbf{V}$

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup$

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis von (d).

$$\begin{aligned}&x \in A \cap (B \cup C) \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in (B \cup C)) \longleftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \longleftrightarrow\\ &\longleftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) \longleftrightarrow (x \in A \cap B \vee x \in A \cap C) \longleftrightarrow\\ &\longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).\end{aligned}$$
QED

Lemma 3.1.7 (E_0) *Die De Morganschen Gesetze:*

(a) $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

(b) $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

(c) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(d) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Beweis von (a).

$$\begin{aligned}&x \in \neg(A \cup B) \longleftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \longleftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \longleftrightarrow\\ &\longleftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \longleftrightarrow (x \in \neg A \wedge x \in \neg B) \longleftrightarrow x \in \neg A \cap \neg B.\end{aligned}$$
QED

Lemma 3.1.8 (E_0) $\neg\mathbf{V} = \emptyset, \quad \neg\emptyset = \mathbf{V}, \quad A \cup \neg A = \mathbf{V}, \quad A \cap \neg A = \emptyset.$

Definition.
$$\begin{aligned}\bigcap A &= \{x \mid \textstyle\bigwedge y \in A \quad x \in y\}\\ \bigcup A &= \{x \mid \textstyle\bigvee y \in A \quad x \in y\}\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir Operationen auf Termen so festlegen, daß sie die Allklasse ergeben, wenn sie nicht vernünftig definiert sind.

Definition. $\{t_1, \ldots, t_n\} = \{y \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{V} \longrightarrow (y = t_1 \vee \ldots \vee y = t_n)\}$.

Lemma 3.1.9 (E_0) $\neg(t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{V}) \longrightarrow \{t_1, \ldots, t_n\} = \mathbf{V}$ *und* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{V} \longrightarrow \{t_1, \ldots, t_n\} = \{y \mid y = t_1 \vee \ldots \vee y = t_n\} \longrightarrow \bigwedge(y\ y \in \{t_1, \ldots, t_n\} \longleftrightarrow y = t_1 \vee \ldots \vee y = t_n)$.

Unser nächstes Axiom besagt, daß gewisse Klassen auch Mengen sind. Nach der Definition von $\mathbf{V}$ haben wir: $X \in \mathbf{V} \longleftrightarrow \bigvee y \quad y = X$; d.h. $X \in \mathbf{V}$ besagt: X ist eine Menge.

A2 $\quad \emptyset \in \mathbf{V}, \quad \{x, y\} \in \mathbf{V}, \quad \bigcup x \in \mathbf{V}.$

Definition. $\mathrm{E}_1 =_{\mathrm{Df}} \mathrm{E}_0 + \mathrm{A2}$

Lemma 3.1.10 (E_1) $\bigcap\emptyset = \mathbf{V}$, $\bigcup\emptyset = \emptyset$, $\bigcap\mathbf{V} = \emptyset$, $\bigcup\mathbf{V} = \mathbf{V}$.

Beweis.

$$x \in \bigcap\emptyset \longleftrightarrow \bigwedge z(z \in \emptyset \longrightarrow x \in z) \longleftrightarrow x = x.$$
$$x \in \bigcup\emptyset \longleftrightarrow \bigvee z(z \in \emptyset \land x \in z) \longleftrightarrow x \neq x.$$
$$x \in \bigcap\mathbf{V} \longrightarrow \bigwedge z \in \mathbf{V}\; x \in z \longrightarrow x \in \emptyset \longrightarrow x \neq x.$$
$$x \in \{x\} \in \mathbf{V}, \text{also } x \in \bigcup\mathbf{V}.$$

QED

Lemma 3.1.11 (E_1)

(a) $x \cup y \in \mathbf{V}$ (*Beweis.* $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$)

(b) $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{V}$ (*Beweis.* $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$)

Wir führen jetzt den Begriff der *geordneten Paare* ein. Gesucht ist eine Operation $\langle\ ,\ \rangle$ auf Mengen mit den Eigenschaften:

(3.1) $\langle x, y\rangle \in \mathbf{V}$
(3.2) $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \longrightarrow (x = z \land y = w)$.

Der Bequemlichkeit halber wollen wir eine Operation, die auch auf Klassentermen angewandt einen Sinn ergibt. Die folgende Definition genügt:

Definition. $\langle t_1, t_2\rangle = \{\{t_1\}, \{t_1, t_2\}\}$

Eigenschaft (3.1) ist dann trivial nach **A2** und (3.2) folgt unter Verwendung von:

$\{a, b\} = \{c, d\} \longleftrightarrow ((a = c \land b = d) \lor (a = d \land b = c)$.

Nach der Defintion erhalten wir auch:

(3.3) $E_1 \vdash \neg(t_1,\, t_2 \in \mathbf{V}) \longrightarrow \{t_1,\, t_2\} = \mathbf{V}$.

Wir erlauben uns jedoch die Freiheit, zukünftig auch andere Definitionen von $\langle\ ,\ \rangle$ zu verwenden, solange (3.1), (3.2) noch erfüllt sind.

Geordnete n-Tupeln ($n \geq 1$) definieren wir dann durch:

$$\langle t\rangle = \{x \mid t \in \mathbf{V} \longrightarrow x \in t\}$$
$$\langle t_1, \dots, t_{n+1}\rangle = \langle t_1, \langle t_2, \dots, t_{n+1}\rangle\rangle.$$

Es folgt dann in E_1:

Lemma 3.1.12 (E_1)

(a) $t \in \mathbf{V} \longrightarrow \langle t\rangle = t$

(b) $t \notin \mathbf{V} \longrightarrow \langle t\rangle = \mathbf{V}$

(c) $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbf{V}$

(d) $\neg(t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{V}) \longrightarrow \langle t_1, \ldots, t_n\rangle = \mathbf{V}$

(e) $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \longrightarrow (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n)$.

(Auch hier werden wir uns später die Freiheit nehmen, andere Tupeldefinitionen zu verwenden. Ein Mangel bei dieser Definition ist z.B., daß jeder $n+1$-Tupel auch ein n-Tupel ist.)

Das *Cartesische Produkt* definieren wir durch:

Definition. $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Streng genommen ist der Ausdruck auf der rechten Seite noch nicht definiert. Er ist zu verstehen als eine Abkürzung für: $\{z \mid \bigvee xy\ (z = \langle x, y\rangle \wedge x \in A \wedge y \in B)\}$. Hierzu bemerken wir, daß für $K = \{z \mid \bigvee xy\ (z = \langle x, y\rangle \wedge \varphi(x, y))\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in K &\longleftrightarrow \bigvee zw\ (\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \wedge \varphi(z, w))\\ &\longleftrightarrow \bigvee zw\ (x = z \wedge y = w \wedge \varphi(z, w)) \longleftrightarrow \varphi(x, y).\end{aligned}$$

Folglich gilt in E_1:

(3.4) $\langle x, y\rangle \in A \times B \longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$.

Das *n-fache Cartesische Produkt* $(n \geq 1)$ definieren wir durch:

Definition. $A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$.

Dabei ist die rechte Seite wieder zu verstehen als:

$$\{z \mid \bigvee x_1 \ldots x_n\ (z = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n)\}.$$

Wie vorhin: $\mathrm{E}_1 \vdash \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in A_1 \times \cdots \times A_n \longleftrightarrow (x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n)$.

Bemerkung: Nach unserem obigen Tupelbegriff haben wir:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n) \quad (n \geq 2).$$

Bei anderen Tupelbegriffen braucht dies nicht zu gelten.

Definition. $A^n = \overbrace{A \times \cdots \times A}^{n} \qquad (n \geq 1)$

Nach unserem Tupelbegriff gilt also: $A^1 = A$; $A^{n+1} = A \times A^n$ $(n \geq 1)$. Bei anderen Tupelbegriffen braucht dies nicht zu gelten.

Wie wir oben bei der Definition der Kreuzprodukte $A \times B$ gesehen, erweist sich die Komprehensionstermschreibweise $\{x \mid \varphi(x)\}$ als etwas beschränkt. Ausdrücke wie etwa $\{F(x) \mid x \in A\}$ sind in der Mathematik durchaus üblich. Deshalb definieren wir:

Definition. Sei $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term. Wir setzen:

$$\{t(x_1, \ldots, x_n) \underset{x_1, \ldots, x_n}{\mid} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\} =_{\mathrm{Df}} \{y \mid \bigvee x_1, \ldots x_n (y = t(x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n))\},$$

falls $y \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(t) \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Bemerkung. Die Liste der Variablen unter dem Strich ist notwendig, um Zweideutigkeiten auszuschalten. z.B. ist $\{\langle x, a\rangle \underset{x,a}{|} x = a\} = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbf{V}\}$ und $\{\langle x, a\rangle \underset{x}{|} x = a\} = \{\langle a, a\rangle\}$. In der Praxis ist aber diese Liste meist aus dem Zusammenhang zu erkennen und kann deshalb weggelassen werden.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Definition. R ist eine *Relation* $=_{\mathrm{Df}}$ $R \subset \mathbf{V}^2$

Definition. $tRt' \longleftrightarrow Rtt' \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \langle t, t'\rangle \in R$

Definition. R ist eine *n-stellige Relation* $=_{\mathrm{Df}}$ $R \subset \mathbf{V}^n$ $(n \geq 1)$.

Definition.

$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \bigvee y \;\; yRx\}$	("Definitionsbereich von R")
$\mathrm{rng}(R) = \{y \mid \bigvee x \;\; yRx\}$	("Wertebereich von R")
$\mathrm{fld}(R) = \mathrm{rng}(R) \cup \mathrm{dom}(R)$	("Feld von R")
$R{\restriction}A = \{\langle y, x\rangle \mid yRx \wedge x \in A\}$	("R beschränkt auf A")
$R''A = \{y \mid \bigvee x \in A \;\; yRx\}$	("das Bild von A unter R")
$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid yRx\}$	("die Umkehrung von R").

Bemerkung: (a) Die obigen Operationen sind für beliebige Terme R definiert – jedoch hauptsächlich dann von Interesse, wenn R eine Relation ist.
(b) Die obigen Definitionen sind metasprachlich und sind wie die Klassenterme in der Sprache der Mengenlehre zu interpretieren. Dabei ist $\in$ natürlich ein Grundzeichen der Sprache und kein Klassenterm.

Definition. $\boldsymbol{\in} =_{\mathrm{Df}} \{\langle x, y\rangle \mid x \in y\}$, $\quad \mathrm{id} =_{\mathrm{Df}} \{\langle x, y\rangle \mid x = y\}$.

Also $x \boldsymbol{\in} y \longleftrightarrow x \in y$.

Lemma 3.1.13 (E_1) $\quad R''A = \mathrm{rng}(R \restriction A)$

Beweis.

$y \in R''A \longleftrightarrow \bigvee x(x \in A \wedge yRx) \longleftrightarrow \bigvee x \; y(R \restriction A)x \longleftrightarrow y \in \mathrm{rng}(R \restriction A)$ QED

(Folglich $R''\mathbf{V} = \mathrm{rng}(R)$, da $R \restriction \mathbf{V} = R$).

Definition. $R \circ P = \{\langle y, x\rangle \mid \bigvee z \; (yRz \wedge zPx)\}$ $\quad$ ("das Produkt von R, P")

Lemma 3.1.14 (E_1) $\quad (R \circ P)''A = R''P''A$

Beweis.

$$\begin{aligned} y \in (R \circ P)''A &\longleftrightarrow \bigvee x(x \in A \wedge y(R \circ P)x) \longleftrightarrow \bigvee x(x \in A \wedge \bigvee z(yRz \wedge zPx)) \\ &\longleftrightarrow \bigvee x \; z(x \in A \wedge yRz \wedge zPx) \longleftrightarrow \bigvee z(yRz \wedge \bigvee x(x \in A \wedge zPx) \\ &\longleftrightarrow \bigvee z(yRz \wedge z \in P''A) \longleftrightarrow y \in R''P''A. \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise:

Lemma 3.1.15 (E_1)

(a) $(R \circ P)^{-1} = P^{-1} \circ R^{-1}$

(b) $R''(A \cup B) = R''A \cup R''B$

(c) $R''(A \cap B) \subset R''A \cap R''B$ *(Bemerkung: '$\supset$' gilt nicht immer!)*

(d) $R \subset \mathbf{V}^2 \longrightarrow (R^{-1})^{-1} = R$

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Eine *Funktion* ist eine Relation mit Eindeutigkeitsbedingung:

Definition.
F ist eine *Funktion* = $\mathrm{Funk}(F) =_{\mathrm{Df}} F \subset \mathbf{V}^2 \wedge \bigwedge xyz((xFz \wedge yFz) \longrightarrow x = y)$.

Definition. $\bigvee!x\, \varphi =_{\mathrm{Df}} \bigvee z\, (\{x \mid \varphi\} = \{z\})$.

Definition. $\iota x\, \varphi =_{\mathrm{Df}} \{z \mid \bigwedge y(\{x \mid \varphi\} = \{y\} \longrightarrow z \in y)\}$

$\iota x\, \varphi$ heißt also: "dasjenige (eindeutig bestimmte) x mit φ".

Lemma 3.1.16 (E_1)

$$\mathrm{E}_1 \vdash \{y\} = \{x \mid \varphi\} \longrightarrow \iota x\, \varphi = y$$
$$\neg \bigvee!x\varphi \longrightarrow \iota x\varphi = \mathbf{V}$$

Mit Hilfe des Iota-Terms ι läßt sich *Definition durch Fallunterscheidung* ausführen, wie im folgenden Lemma beschrieben.

Lemma 3.1.17 (E_1) *Aus $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$, $\neg(\varphi_i \wedge \varphi_j)$ $(i \neq j)$ und $\varphi_i \longrightarrow t_i \in \mathbf{V}$ $(i = 1, \ldots, n)$ folgt für $s = \iota y((\varphi_1 \wedge y = t_1) \vee \ldots \vee (\varphi_n \wedge y = t_n))$, daß $s \in \mathbf{V}$ und $\varphi_i \longrightarrow s = t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Definition. $F(t) =_{\mathrm{Df}} \iota y\, yFt$.

Lemma 3.1.18 (E_1)

$$(t \in \mathbf{V} \wedge \bigvee!y\, yFt) \quad \longrightarrow \quad (F(t) \in \mathbf{V} \wedge F(t)Ft)$$
$$\neg(t \in \mathbf{V} \wedge \bigvee!y\, yFt) \quad \longrightarrow \quad F(t) = \mathbf{V}$$

Funktionen im obigen Sinne heißen auch *einstellige* Funktionen. Wir definieren auch:

Definition. F ist eine *n-stellige Funktion* $(n \geq 2) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Funk}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) \subset \mathbf{V}^n$. Hierzu schreiben wir auch $\mathrm{Funk}_n(F)$.

Definition. Für $n \geq 2$ setzen wir $F(t_1, \ldots, t_n) =_{\mathrm{Df}} F(\langle t_1, \ldots, t_n \rangle)$.

Bemerkung. Aufgrund unserer Tupeldefinition gilt: (a) Jede $n+1$-stellige Funktion ist eine n-stellige Funktion; (b) jede n-stellige Funktion ist eine $n+1$-stellige Relation. Bei anderen Tupeldefinitionen brauchen diese Sätze nicht zu gelten. Viele Autoren verwenden eine alternative Definition wonach – unabhängig vom Tupelbegriff – jede n-stellige Funktion eine $n+1$-stellige Relation ist.

Lemma 3.1.19 (E_1) *Sei Funk(F). Dann gelten:*

(a) $F''A = \{F(x) \mid x \in A \cap dom(F)\}$

(b) $F^{-1}{}''A = \{x \mid F(x) \in A \wedge x \in dom(F)\}$.

Beweis.

(a) $y \in F''A \longleftrightarrow \bigvee x(y = F(x) \wedge x \in A)$

(b) $y \in F^{-1}{}''A \longleftrightarrow \bigvee y(y = F(x) \wedge y \in A)$. QED

Unter Verwendung von Lemma 3.1.19(b) erhalten wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 3.1.20 (E_1) *Sei* $\mathrm{Funk}(F)$. *Dann* $F^{-1}{}''(A \cap B) = (F^{-1}{}''A) \cap (F^{-1}{}''B)$.

Lemma 3.1.21 (E_1) *Sei* $\mathrm{Funk}(F)$ *und* $\mathrm{Funk}(G)$. *Dann* $\mathrm{Funk}(F \circ G)$, $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x \in \mathrm{dom}(G) \mid F(x) \in \mathrm{dom}(F)\}$ *und* $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ *für* $x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$.

Wir führen die übliche Abbildungsschreibweise ein:

Definition. $F : A \longrightarrow B$ (“F ist eine *Abbildung* von A in B”)
gdw. $\mathrm{Funk}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{rng}(F) \subset B$.

$F : A \stackrel{\text{auf}}{\longrightarrow} B$ (“F ist eine *Surjektion* von A auf B”)
gdw. $F : A \longrightarrow B \wedge \mathrm{rng}(F) = B$.

$F : A \stackrel{1-1}{\longrightarrow} B$ (“F ist eine *Injektion* von A in B”)
gdw. $F : A \longrightarrow B \wedge F^{-1}$ ist eine Funktion.

$F : A \longleftrightarrow B$ (“F ist eine *Bijektion* von A auf B”)
gdw. $F : A \stackrel{1-1}{\longrightarrow} B \wedge F^{-1} : B \stackrel{1-1}{\longrightarrow} A$.
(Also $F : A \longleftrightarrow B$ gdw. $F : A \stackrel{1-1}{\longrightarrow} B \wedge B = \mathrm{rng}(F)$)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

In Analogie mit der Schreibweise $\{t(x) \mid \varphi(x)\}$ führen wir die “Familienschreibweise” $\langle t(x) \mid \varphi(x)\rangle$ für Funktionen ein. $\langle t(x) \mid \varphi(x)\rangle$ bezeichnet die Funktion F mit: $\mathrm{dom}(F) = \{x \mid x \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x)\}$ und $F(x) = t(x)$ für $x \in \mathrm{dom}(F)$. Mit anderen Worten: $F = \{\langle t(x), x\rangle \mid t \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x)\}$. Die strenge Definition lautet also:

Definition. Sei $t(x)$ ein Term.

$$\langle t(x) \underset{x}{\mid} \varphi(x)\rangle =_{\mathrm{Df}} \{\langle t(x), x\rangle \underset{x}{\mid} t(x) \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x)\}.$$

Die unter dem Strich stehende Variable ist normalerweise aus dem Zusammenhang erkennbar und wird deshalb meist weggelassen.

Für n-stellige Funktionen ($n \geq 2$) führen wir die analoge Schreibweise ein:

Definition.. Sei $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term. Wir setzen: $\langle t(x_1, \ldots, x_n) \underset{x_1,\ldots,x_n}{\mid} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\rangle =_{\mathrm{Df}}$

$$=_{\mathrm{Df}} \{\langle t(x_1, \ldots, x_n), \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle \underset{x_1,\ldots,x_n}{\mid} t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Die unter dem Strich stehende Variablenliste wird ebenfalls weggelassen, wenn sie aus dem Zusammenhang erkennbar ist.

Lemma 3.1.22 (E_1) *Für $F = \langle t \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n)\rangle$ gelten:*

(a) $\mathrm{Funk}(F)$

(b) $\mathrm{dom}(F) = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \underset{x_1,\ldots,x_n}{\mid} t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{V} \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$

(c) $\bigwedge x_1, \ldots, x_n\ (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathrm{dom}(F) \longrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n))$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Wir hatten früher die Booleschen Operationen $A \cup B$, $A \cap B$ definiert. Wir führen jetzt eine Schreibweise für unendliche Vereinigungen und Durchschnitte von Klassen ein. Sind A und B Terme, so definieren wir: $\bigcup\limits_{x \in B} A(x) = \{z \mid \bigvee x \in B\ \ z \in A(x)\}$.

Im allgemeinen:

Definition. Sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term. Wir definieren dann:

$$\bigcup_{\substack{\varphi(x_1,\ldots,x_n)\\ x_1,\ldots,x_n}} A(x_1, \ldots, x_n) =_{\mathrm{Df}} \{z \mid \bigvee x_1 \cdots x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge z \in A(x_1, \ldots, x_n)\}$$

$$\bigcap_{\substack{\varphi(x_1,\ldots,x_n)\\ x_1,\ldots,x_n}} A(x_1, \ldots, x_n) =_{\mathrm{Df}} \{z \mid \bigwedge x_1 \cdots x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow z \in A(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

(Die unter dem Strich stehenden Variablen sind normalerweise aus dem Zusammenhang erkennbar und werden weggelassen.)

Lemma 3.1.23 (E_1) *Für Terme A, B, I gelten:*

(a) $A \cap \bigcup\limits_{x \in I} B(x) = \bigcup\limits_{x \in I}(A \cap B(x))$

(b) $A \cup \bigcap\limits_{x \in I} B(x) = \bigcap\limits_{x \in I}(A \cup B(x))$

Beweis. von (a):

$$\begin{aligned} z \in A \cap \bigcup_{x \in I} B(x) &\longleftrightarrow (z \in A \wedge z \in \bigcup_{x \in I} B(x)) \longleftrightarrow (z \in A \wedge \bigvee x \in I\ \ z \in B(x)) \\ &\longleftrightarrow \bigvee x \in I(z \in A \wedge z \in B(x)) \longleftrightarrow \bigvee x \in I\ \ z \in A \cap B(x) \\ &\longleftrightarrow z \in \bigcup_{x \in I}(A \wedge B(x)) \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

Lemma 3.1.24 (E_1) *Für Terme A, B, I gelten:*

(a) $\neg \bigcup\limits_{x \in I} B(x) = \bigcap\limits_{x \in I} \neg B(x)$

(b) $\neg \bigcap\limits_{x \in I} B(x) = \bigcup\limits_{x \in I} \neg B(x)$

(c) $A \setminus \bigcup\limits_{x \in I} B(x) = \bigcap\limits_{x \in I}(A \setminus B(x))$

(d) $A \setminus \bigcap\limits_{x \in I} B(x) = \bigcup\limits_{x \in I}(A \setminus B(x))$

Beweis. von (a):

$$z \notin \bigcup_{x\in I} B(x) \longleftrightarrow \bigwedge x \in I \;\; z \notin B(x) \longleftrightarrow \bigwedge x \in I \;\; z \in \neg B(x)$$

$$\longleftrightarrow z \in \bigcap_{x\in I} \neg B(x). \qquad \text{QED}$$

Bemerkung. Ist $t(x) \in \mathbf{V}$ für $x \in I$, so folgt: $\bigcup\limits_{x\in I} t(x) = \bigcup\{t(x) \mid x \in I\}$ und $\bigcap\limits_{x\in I} t(x) = \bigcap\{t(x) \mid x \in I\}$. Insbesondere: $\bigcup A = \bigcup\limits_{x\in A} x$, $\bigcap A = \bigcap\limits_{x\in A} x$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Das *Aussonderungsaxiom* lautet:

A3 Die $\bigwedge$-Abschließung von $A \cap x \in \mathbf{V}$, d.h. alle Formeln der Gestalt: $\bigwedge z_1 \ldots z_n \, A \cap x \in \mathbf{V}$, wobei $\mathrm{Fr}(A) \subset \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Das Aussonderungsaxiom ist eigentlich ein *Axiomsschema* — zu jedem Term A haben wir eine *Instanz* von **A3**, also ein Axiom der Form $\bigwedge z_1 \ldots z_n \, A \cap x \in \mathbf{V}$, wobei $\mathrm{Fr}(A) \subset \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Lemma 3.1.25 (E_1 + **A3**)

(a) $A \subset x \longrightarrow A \in \mathbf{V}$

(b) $A \neq \emptyset \longrightarrow \bigcap A \in \mathbf{V}$

(c) $\mathbf{V} \notin \mathbf{V}$

(d) $\neg x \notin \mathbf{V}$.

Beweis.

(a) $A \subset x \longleftrightarrow A = A \cap x$.

(b) Sei $x \in A$. Dann $\bigcap A \subset x$.

(c) Angenommen nicht. Dann $A = A \cap \mathbf{V} \in \mathbf{V}$ für alle A. Insbesondere $A \in \mathbf{V}$ für $A = \{x \mid x \notin x\}$. Folglich: $A \in A \longleftrightarrow A \notin A$. Widerspruch!

(d) Sonst wäre $\mathbf{V} = x \cup \neg x \in \mathbf{V}$. $A \subset x \longleftrightarrow A = A \cap x$.

Das *Ersetzungsaxiom* lautet:

A4 (Die $\bigwedge$-Abschließung aller Formeln der Gestalt:) $\mathrm{Funk}(F) \longrightarrow F\,''u \in \mathbf{V}$.

Das Ersetzungsaxiom ist ebenfalls ein Axiomsschema.

Bemerkung. **A3** folgt aus **A4**.

Beweis der Bemerkung.

Es gilt $\mathrm{id} = \langle x \mid x \in \mathbf{V}\rangle$. Also $\mathrm{Funk(id)}$, $\mathrm{dom(id)} = \mathbf{V}$, $\mathrm{id}(x) = x$.

Dann ist: $x \cap A = (\mathrm{id} \upharpoonright A)\,''x$. QED(Bemerkung)

Lemma 3.1.26 ($\mathrm{E}_1 + \mathbf{A4}$) $\quad u \times v \in \mathbf{V}$.

Beweis.

(a) $\quad u \times \{x\} = F_x{}''u \in \mathbf{V}$, wobei $F_x(y) = \langle y, x \rangle$.

(b) $\quad u \times v = \bigcup_{x \in v} u \times \{x\} = \bigcup G{}''v$, $\quad$ wobei $G = \langle u \times \{x\} \mid_x x \in v \rangle$. $\qquad$ QED

Lemma 3.1.27 ($\mathrm{E}_1 + \mathbf{A4}$) $\quad u_1 \times \cdots \times u_n \in \mathbf{V} \qquad (n \geq 2)$.

Beweis. (Induktion auf n)
$n = 2$ ist durch Lemma 3.1.26 gegeben. Sei nun $n = m + 1$, $m \geq 2$. Dann
$u_1 \times \cdots \times u_n = G{}''(u_1 \times (u_2 \times \cdots \times u_n))$, wobei $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^m \to \mathbf{V}$ definiert ist durch:
$G(\langle y, \langle z_1, \ldots, z_m \rangle \rangle) = \langle y, z_1, \ldots, z_m \rangle$. $\qquad$ QED

Bemerkung. Bei unserer speziellen Tupeldefinition ist $G = \mathrm{id} \restriction \mathbf{V} \times \mathbf{V}^m$ im Beweis von Lemma 3.1.27.

Lemma 3.1.28 ($\mathrm{E}_1 + \mathbf{A4}$) $\quad \mathrm{Funk}(F) \longrightarrow F \restriction u \in \mathbf{V}$.

Beweis. $\quad F \restriction u = G{}''u$, wobei $G = \langle \langle F(x), x \rangle \mid x \in u \cap \mathrm{dom}(F) \rangle$.

Die *Potenzklasse von* A ist die Klasse aller Teil*mengen* von A:

Definition. $\mathfrak{P}(A) = \{x \mid x \subset A\}$.

Das *Potenzmengenaxiom* lautet:

A5 $\qquad \bigwedge x \, (\mathfrak{P}(x) \in \mathbf{V})$.

Das *Fundierungsaxiom* soll verhindern, daß Ketten der Form $x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$ existieren. Insbesondere verhindert es endliche Schleifen wie $x \in x$, $x \in z \in x$, $x \in z \in y \in x$ usw.

Definition. x ist $\in$-*minimal in* $A =_{\mathrm{Df}} x \in A \wedge \bigwedge y \in x \, y \notin A$.

Das Fundierungsaxiom lautet:

A6 $\qquad A \neq \emptyset \longrightarrow \bigvee x \quad x$ ist $\in$-minimal in A.

Dieses Axiom ist auch ein Axiomsschema.

Lemma 3.1.29 ($\mathrm{E}_1 + \mathbf{A6}$) $\quad \neg(x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1) \qquad (n \geq 1)$.

Beweis. Setze $u = \{x_1, \ldots, x_n\}$. u hat kein $\in$-minimales Element. Widerspruch! $\quad$ QED

Definition. $\quad \mathrm{E}_2 =_{\mathrm{Df}} \mathrm{E}_1 + (\mathbf{A3} - \mathbf{A6})$

Von den Axiomen von ZF fehlt nur noch das *Unendlichkeitsaxiom*, welches besagt, daß es eine unendliche Menge gibt. Später werden wir sehen, daß das Modell der *erblich endlichen Mengen* die Theorie E_2 erfüllt, ohne dabei das Unendlichkeitsaxiom zu erfüllen. Also ist die Negation des Unendlichkeitsaxioms verträglich mit E_2, d.h. sie ist relativ konsistent mit E_2.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Wie wir vorhin erwähnt haben, sind andere Tupeldefinitionen möglich. Eine besonders nützliche Definition von geordneten Paaren erhält man wie folgt. Setze: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$. Dann $0 \neq 1$.

Definition. $\langle A, B\rangle =_{\mathrm{Df}} A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

Offensichtlich folgt:

(a) $\langle x, y\rangle \in \mathbf{V}$

(b) $\langle A, B\rangle = \langle C, D\rangle \longrightarrow (A = B \wedge C = D)$.

Der Vorteil dieser Definition ist, daß (b) für beliebige Terme und nicht nur für Mengen gilt.
In ähnlicher Weise können wir definieren:

$$2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\}\ldots \quad \text{usw.}$$
$$\langle A, B, C\rangle = A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \cup C \times \{2\}$$
$$\langle A, B, C, D\rangle = A \times \{0\} \cup \cdots \cup D \times \{3\} \quad \text{usw.}$$

An allen Stellen, wo geordnete Tupel von beliebigen Klassen benutzt werden, soll diese Definition zugrunde liegen.

(**Bemerkung.** Diese Definition fußt auf die früheren Definitionen von $\langle x, y\rangle$ und $A \times B$. Wenn die neue Definition zugrunde gelegt wird, so müssen die Definitionen von “Kreuzprodukt”, “Relation”, “Funktion” usw. entsprechend neu formuliert werden.)

3.2 Die natürlichen Zahlen

Definition. $\langle U, R\rangle$ ist ein *binäres System* gdw. $R \subset U^2$.

Definition. S ist ein *binäres System* gdw.

$$S = \langle S''\{\emptyset\}, S''\{\{\emptyset\}\}\rangle \ \wedge \ S''\{\{\emptyset\}\} \subset (S''\{\{\emptyset\}\})^2.$$

Definition. $\langle U, R\rangle$ ist ein *linear geordnetes System* (LS) gdw.
$R \subset U^2 \wedge \bigwedge x, y, z \in U((\neg xRx) \wedge ((xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz) \ \wedge (xRy \vee yRx \vee x = y))$.

Definition. S ist ein *linear geordnetes System* (LS) gdw.
$R \subset U^2 \wedge \bigwedge x, y, z \in U((\neg xRx) \wedge ((xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz) \ \wedge (xRy \vee yRx \vee x = y))$,
wobei $U = S''\{\emptyset\}$ und $R = S''\{\{\emptyset\}\}$.

Bemerkung: Falls $\langle U, R\rangle$ ein LS ist, so auch $\langle U, R^{-1}\rangle$.

Definition.
t ist *S-minimal* in $A =_{\mathrm{Df}} S$ ist ein binäres System $\wedge t \in U \cap A \wedge \bigwedge y(yRt \longrightarrow y \notin U \cap A)$
t ist *S-maximal* in $A =_{\mathrm{Df}} S$ ist ein binäres System $\wedge t \in U \cap A \wedge \bigwedge y(tRy \longrightarrow y \notin U \cap A)$

Also ist x *S-maximal* in A gdw. x $\langle U, R^{-1}\rangle$-minimal in A ist.

Lemma 3.2.1 (E_2) *Sei $S = \langle U, R\rangle$ ein LS. $A \subset U$ hat höchstens ein S-minimales (S-maximales) Element.*

Beweis. Da $\langle U, R^{-1}\rangle$ ein LS ist, genügt es zu zeigen, daß S höchstens ein minimales Element hat. x, y seien minimal. Dann $\neg xRy$, $\neg yRx$. Folglich $x = y$.QED(Lemma 3.2.1)

Definition. Sei $S = \langle U, R\rangle$ ein LS.

$$\begin{aligned}\min_S A &= \iota x(S \text{ ist ein binäres System} \wedge x \text{ ist } S\text{-minimal in } A)\\ \max_S A &= \iota x(S \text{ ist ein binäres System} \wedge x \text{ ist } S\text{-maximal in } A)\end{aligned}$$

Definition. F ist ein *Isomorphismus von S auf S'* (in Symbolen: $F : S \overset{\sim}{\longleftrightarrow} S'$) gdw.

(a) S und S' sind binär.

(b) $F : U_S \longleftrightarrow U_{S'}$

(c) $\bigwedge x, y \in U_S \; xR_Sy \longleftrightarrow F(x)R_{S'}F(y)$

Definition. S ist *isomorph zu S'* ($S \simeq S'$) gdw. $\bigvee F \quad F : S \overset{\sim}{\longleftrightarrow} S'$.

Bemerkung. $\{\langle s, s'\rangle \mid s \simeq s'\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\{s \mid s \text{ ist binär}\}$.

Definition. $S = \langle U, R\rangle$ ist ein *endliches* LS (ELS) $=_{\mathrm{Df}}$ $S \in \mathbf{V}$ und S ist ein LS und

$$\bigwedge z((z \subset U \wedge z \neq \emptyset) \longrightarrow \min_S z, \max_S z \in \mathbf{V}).$$

Bemerkung. $\min_S z \in \mathbf{V}$ heißt, daß das Minimum existiert; sonst ist $\min_S z$ so definiert, daß eine echte Klasse ist.

Bemerkung. Sei $S \simeq S'$, S ist genau dann ein ELS, wenn S' ein ELS ist.

Definition. U ist *endlich* gdw. $\bigvee R \ \langle U, R\rangle$ ist ein ELS.

Definition. Ein Term A heißt *transitiv* $\longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigwedge x \in A \bigwedge z \in x (z \in x)$.

Bemerkung. Für Terme A gilt: $\mathrm{E}_0 \vdash A$ ist transitiv $\longleftrightarrow \bigcup A \subset A \longleftrightarrow A \subset \mathfrak{P}(A)$.

Satz 3.2.2 (E_2) *Sei $S = \langle U, R\rangle$ ein ELS. Dann existiert genau ein Paar $\langle v, f\rangle$ mit: v ist transitiv und $f : S \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \langle v, \in\restriction v\rangle$. (Folglich $S \in \mathbf{V}$.)*

(**Bemerkung.** Für transitives V gilt: $\in\restriction V = \in \cap V^2$.)

Beweis. *Existenz*. Angenommen nicht. Dann $U \neq \emptyset$, da sonst $S \simeq \langle\emptyset, \in\restriction\emptyset\rangle$. Für $x \in U$ setze: $U_x = \{y \mid y\,R\,x\}$, $R_x = R \cap U_x^2$, $S_x = \langle U_x, S_x\rangle$. Setze: $A = \{x \in U \mid \bigvee v(v$ ist transitiv$\wedge$ $S_x \simeq \langle v, \in\restriction v\rangle)\}$. $A \neq \emptyset$, denn für $x = \min_S U$ ist $S_x \simeq \langle\emptyset, \in\restriction\emptyset\rangle$. Sei $x = \max_S A$. Sei $f : S_x \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v, \in\restriction v\rangle$, wobei v transitiv ist. Setze:

$$U' = U_x \cup \{x\}, \quad R' = R \cap U'^2, \quad S' = \langle U', R'\rangle.$$

Setze: $v' = v \cup \{v\}$. v' ist dann transitiv. $f' : S' \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v', \in\restriction v'\rangle$ sei definiert durch:

$$f'(y) = \begin{cases} f(y) & \text{falls} \quad y \in U_x \\ v & \text{falls} \quad y = x. \end{cases}$$

Wir behaupten: $S' = S$. Angenommen nicht.
Dann $U \setminus U' \neq \emptyset$. Sei $z = \min_S (U \setminus U')$. Dann $S_z = S' \simeq \langle v', \in\restriction v'\rangle$.
Folglich $z \in A$. Also $z\,R\,x$. Also $z \in U_x$. Widerspruch! QED (Existenz)

Eindeutigkeit. Sei $f_i : S \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v_i, \in\restriction v_i\rangle$ $(i = 0, 1)$, wobei v_0, v_1 transitiv sind.
Behauptung. $f_0 = f_1$.
Wir zeigen zuerst:

(1) $\quad f_i(x) = f_i{}''R''\{x\}$ für $x \in U$.

($\supset$) Trivial, da $f_i : S \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v, \in\restriction v\rangle$
($\subset$) Sei $z \in f_i(x)$. Dann $z \in v$, da v transitiv. Folglich $z = f_i(y)$ für ein $y \in U$. Folglich $y\,R\,x$, da $f_i(y) \in f_i(x)$. QED(1)
Sei nun $f_0 \neq f_1$. Es gibt dann ein $\in$-minimales $w \in v_0$ mit:

$$\bigvee x \in U \quad w = f_0(x) \neq f_1(x).$$

Gegeben sei ein solches x. Dann:

$$z\,R\,x \to f_0(z) \in w \to f_0(z) = f_1(z).$$

Folglich $f_0(x) = f_0{}''R''\{x\} = f_1{}''R''\{x\} = f_1(x)$. Widerspruch! QED(Satz 3.2.2)

Bemerkung. Dieser Eindeutigkeitsbeweis geht für beliebige binäre Systeme $S = \langle U, R\rangle$ durch. Als Korollar des Beweises erhalten wir also:

Korollar 3.2.3 (E_2) *$S = \langle U, R\rangle$ sei binär. Es gibt höchstens ein Paar $\langle v, F\rangle$ mit: v ist transitiv und $F : S \tilde{\leftrightarrow} \langle v, \in\restriction v\rangle$. Für ein solches Paar gilt außerdem:*

$$F(x) = F''R''\{x\} \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Endliche Ordnungszahlen

Im Rest dieses Abschnitts sind alle Resultate Sätze der Theorie E_2.
Definition Sei s ein ELS. $|s| =_{\mathrm{Df}} \iota v(v$ ist transitiv $\wedge\ s \simeq \langle v, \in\restriction v\rangle$.
$\langle |s|, \in\restriction|s|\rangle$ ist also ein ausgezeichnetes Element der Äquivalenzklasse $\{t \mid t \simeq s\}$. $|s|$ heißt der *Ordnungstyp von s*.

Die Klasse der *endlichen Ordnungszahlen* oder *natürlichen* Zahlen wird definiert durch:

Definition. $\omega = \{|s| \mid s$ ist ein ELS$\}$.

$n, m, \ldots,$ werden als Variablen für natürliche Zahlen verwendet.
Ist also s ein ELS und $n = |s|$, so existiert genau ein Isomorphismus $f : s \tilde{\leftrightarrow} \langle n, \in\restriction n\rangle$. n ist selber – wie wir sehen werden – eine endliche Menge von Ordnungszahlen und $f^{-1} : n \to s$ ist die Abzählung von s in der von s angegebenen Reihenfolge. Die Struktur von f ist durch den folgenden *Zählsatz* beschrieben:

Satz 3.2.4 *Sei $s = \langle u, r\rangle$ ein ELS mit $n = |s|$. Dann*
(a) *$\langle n, \in\restriction n\rangle$ ist ein ELS.*
(b) *Für $x \in u$ setze:*

$$u_x = \{y \mid y\, r\, x\}, \quad r_x = r \cap u_x^2, \quad s_x = \langle u_x, r_x\rangle.$$

Sei $f : s \tilde{\leftrightarrow} \langle n, \in\restriction n\rangle$. Dann ist $f(x) = |s_x|$ für $x \in u$.

Beweis. (a) $\langle n, \in\restriction n\rangle$ ist ein ELS weil isomorph zu dem ELS s.
(b) Nach Korollar 3.2.3 gilt:

$$f\restriction u_x : s_x \tilde{\leftrightarrow} \langle f(x), \in \cap f(x)^2\rangle.$$

Behauptung. $f(x)$ ist transitiv.
Sei $z' \in y' \in f(x)$. Dann $y' = f(y)$ für ein $y\, r\, x$ nach Korollar 3.2.3. Also ist $z' = f(z)$ für ein $z\, r\, y$ nach Korollar 3.2.3. Also $z\, r\, x$. Folglich $z' = f(z) \in f(x)$. QED(Satz 3.2.4)

Korollar 3.2.5 *ω ist transitiv.*

Lemma 3.2.6 *Sei u transitiv, wobei $\langle u, \in\restriction u\rangle$ ein ELS ist. Dann ist*

$$u = |\langle u, \in\restriction u\rangle|.$$

Beweis. $\mathrm{id}\restriction u : \langle u, \in\restriction u\rangle \tilde{\leftrightarrow} \langle u, \in\restriction u\rangle$.

Korollar 3.2.7 $\omega = \{v \mid v \text{ ist transitiv} \wedge \langle v, \in \upharpoonright v\rangle \text{ ist ein ELS}\}$.

Lemma 3.2.8 $(u \subset n \wedge u \text{ ist transitiv}) \longrightarrow (u \in n \vee u = n)$.

Beweis. Annahme: $u \neq n$. Behauptung: $u \in n$.
Sei $m = \min_{\langle n, \in \upharpoonright n\rangle}(n \setminus u)$. Dann $m \subset u$, $m \notin u$. Aber $m \in p \in n \to p \notin u$, da sonst $m \in u$ wegen der Transitivität von u. Für $p \in u$ folgt also: $p \not\ni m$ und $p \in n$; folglich $p \in m$, da $m, p \in n$ und $\langle n, \in\upharpoonright m\rangle$ ein LS ist. Also $u \subset m$. Also $u = m \in n$. QED(Lemma 3.2.8)

Definition. $n < m \longleftrightarrow n \in m$

$n \leq m \longleftrightarrow (n \in m \vee n = m)$

Korollar 3.2.9 $n \leq m \longleftrightarrow n \subset m$.

Lemma 3.2.10 $\langle \omega, <\rangle$ *ist ein LS.*

Beweis.
(a) $n \not< n$ nach Fundierung
(b) $n < m < p \longrightarrow n < p$ nach der Transitivität von p.
(c) $n \leq m \vee m \leq n$.
Beweis von (c). Angenommen nicht.
Dann $n \not\subset m$, $m \not\subset n$. Also $n \cap m \subsetneqq n, m$. Also $n \cap m \in n, m$. Also $n \cap m \in n \cap m$.
Widerspruch! QED(Lemma 3.2.10)

Satz 3.2.11 $A \cap \omega \neq \emptyset \longrightarrow \min\limits_{\langle \omega, <\rangle} A$ *existiert, d.h.* $\min\limits_{\langle \omega, <\rangle} A \in \mathbf{V}$.

Beweis. Nach dem Fundierungsaxiom.

Wir werden gleich sehen, daß $\max\limits_{\langle \omega, <\rangle} A$ nicht zu existieren braucht. $\max\limits_{\langle \omega, <\rangle} A$ wird jedoch existieren, wenn $A \neq \emptyset$ in ω *beschränkt* liegt – d.h. $\bigvee n\, A \subset n$ – denn:

Lemma 3.2.12 *Sei* $\emptyset \neq A \subset n$. *Dann*

$$\begin{aligned} \max_{\langle \omega, <\rangle} A &= \max_{\langle n, \in\upharpoonright n\rangle} A \\ \min_{\langle \omega, <\rangle} A &= \min_{\langle n, \in\upharpoonright n\rangle} A. \end{aligned}$$

Beweis. Trivial, da $\langle n, \in\upharpoonright n\rangle$ ein "Anfangssegment" von $\langle \omega, <\rangle$ ist.

Definition. $sn = n \cup \{n\}$.

Wir definieren auch: $0 = \emptyset$, $1 = s0$, $2 = s1, \ldots$ usw.

Lemma 3.2.13 $0 \in \omega$, $sn \in \omega$

Beweis. Trivial.

Korollar 3.2.14 *Sei* $A \subset \omega$ *unbeschränkt in* ω (*d.h.* $A \not\subset n$ *für alle* $n \in \omega$).
$\max\limits_{\langle \omega, <\rangle} A$ *existiert nicht, d.h.* $\max\limits_{\langle \omega, <\rangle} A \notin \mathbf{V}$.

Beweis. Angenommen nicht. Sei $m = \max A$. Dann $A \subset sm \in \omega$. Widerspruch! QED(8.1.1)

Lemma 3.2.15 $n = 0 \vee \bigvee m \;\; n = sm$

Beweis. Sei $n \neq \emptyset$. Sei $m = \max\limits_{\langle n, \in \restriction n\rangle} n$. Dann $x \in n \leftrightarrow (x \in m \vee x = m) \leftrightarrow x \in m \vee \{m\} = sm$.

QED(Lemma 3.2.15)

Lemma 3.2.16 (a) $n \leq m \longleftrightarrow n < sm$

(b) $n < m \longleftrightarrow sn \leq m$

Beweis.
(a) $n \leq m \longleftrightarrow (n \in m \vee n = m) \longleftrightarrow n \imath n m \cup \{m\}$
(b) $n < m \longleftrightarrow n \in m \longleftrightarrow n \cup \{n\} \subset m$,
wegen Transitivität von m. QED(Lemma 3.2.16)

Das Prinzip der *vollständigen Induktion* wird ausgedrückt durch:

Satz 3.2.17 *Sei $\varphi(0)$ und $\bigwedge n(\varphi(n) \to \varphi(sn))$. Dann folgt: $\bigwedge n\, \varphi(n)$.*

Beweis. Angenommen nicht. Setze $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ und $n = \min(\omega \setminus A)$ (in $\langle \omega, < \rangle$). Dann $n \neq 0$, da $0 \in A$. Folglich $n = sm$ für ein $n \in \omega$. Also $m \in A$; folglich $n \in A$. Widerspruch!
QED(Satz 3.2.17)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Monotone Funktionen

Definition. $F : \omega \to \omega$ ist *monoton* gdw. $\bigwedge n, m(n < m \to F(n) < F(m))$.

Satz 3.2.18 *Sei $F : \omega \to \omega$. F ist monoton gdw. $\bigwedge n \;\; F(n) < F(sn)$.*

Beweis.
$(\to)$ Trivial, da $n < sn$.
$(\leftarrow)$ Durch Induktion auf n folgt: $\bigwedge i < n \quad F(i) < F(n)$. QED(Satz 3.2.18)

Satz 3.2.19 $F : \omega \to \omega$ sei monoton. Dann $n \leq F(n)$ für $n \in \omega$.

Beweis. Induktion auf n.

Satz 3.2.20 *$F : \omega \to \omega$ sei monoton. Dann ist F eine Injektion.*

Beweis. Sei $m \neq n$. Dann $m < n \vee n < m$. Folglich $F(m) < F(n) \vee F(n) < F(m)$.
QED(Satz 3.2.20)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Der *Rekursionssatz* für ω besagt die Existenz und Eindeutigkeit von Funktionen, die "durch Rekursion definiert" sind. Die übliche Form des Satzes lautet:

Satz 3.2.21 *Seien a, G und A Terme. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie* E_2 *aus der Annahme*

$(*)$ $a \in A,\ G : \omega \times A \to A$

folgt:

$$F : \omega \to A \quad \wedge \quad F(0) = a \quad \wedge \quad \bigwedge n\,(F(sn) = G(n, F(n))).$$

Falls F und F' zwei solche Terme sind, so gilt $\mathrm{E}_2 \vdash (*) \longrightarrow F = F'$.
Außerdem gilt: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(a) \cup \mathrm{Fr}(G)$.

Beweis. *Eindeutigkeit.* F, F' seien solche Terme. Setze: $Z = \{n \mid F(n) = F'(n)\}$.
Behauptung. $Z = \omega$. Angenommen nicht. Sei $n = \min(\omega \setminus Z)$.
Fall 1. $n = 0$. Dann $F(n) = F'(n) = a$. Widerspruch!
Fall 2. $n = sm$. Dann $m \in Z$ und $F(n) = G(m, F(m)) = G(m, F'(m)) = F'(n)$.
Widerspruch! QED(Eindeutigkeit)

Existenz. Wir definieren eine Relation $I\!\!F$ durch:
$I\!\!F(f, u) \longleftrightarrow (u \subset \omega \wedge u$ ist transitiv $\wedge\ \mathrm{Funk}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = u \wedge (0 \in u \to f(0) = a) \wedge$
$\wedge \bigwedge n(sn \in u \to f(sn) = G(n, f(n))))$.
Dann:

$$(3.1) \qquad I\!\!F(f, u) \wedge I\!\!F(f', u) \longrightarrow f = f'.$$

Beweis. Genau wie im Eindeutigkeitsbeweis.

Definition. $D = \{u \mid \bigvee f\ I\!\!F(f, u)\}$.

Für $u \in D$ setze:

$$f_u = \iota f(I\!\!F(f, u)).$$

$$(3.2) \qquad (v \subset u \in D \wedge v \text{ ist transitiv}) \longrightarrow (v \in D \wedge f_v = f_u \restriction v)$$

Beweis. $I\!\!F(f_u \restriction v, v)$.

Definition. $X = \bigcup D$; $F = \bigcup\limits_{u \in D} f_u$.

An dieser Stelle bemerken wir, daß nach der Konstruktion von F gilt:

$$\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(a) \cup \mathrm{Fr}(G).$$

$$(3.3) \qquad u \in D \longrightarrow F \restriction u = f_u$$

Beweis. $\supset$ ist trivial, Wir beweisen $\subset$.
Sei $\langle y, n\rangle \in F \restriction u$. Dann $\langle y, n\rangle \in f_v$ für ein $v \in D$. $u \cap v$ ist aber transitiv. Also $u \cap v \in D$ und $f_{u \cap v} = f_u \restriction (u \cap v) = f_v \restriction (u \cap v)$. Da $n \in u \cap v$ folgt: $\langle y, n\rangle \in f_u$. QED(3.3)

$$(3.4) \qquad F : X \longrightarrow A.$$

Beweis. Offensichtlich ist F eine Relation mit $\mathrm{dom}(F) = X$, $\mathrm{rng}(F) \subset A$. F ist aber eine Funktion nach (3.3), denn zu $\langle y, n\rangle, \langle z, n\rangle \in F$ gibt es $u \in D$ mit $n \in u$. Folglich $y = z = f_u(n)$. QED(3.4)

(3.5) (a) $0 \in X \longrightarrow F(0) = a$

(b) $sn \in X \longrightarrow F(sn) = G(n, F(n))$

Beweis. (a) Sei $0 \in u \in D$. Dann $F(0) = f_u(0) = a$.
(b) Sei $sn \in u \in D$. Dann: $F(sn) = f_u(sn) = G(n, f_u(n)) = G(n, F(u))$. QED(3.5)
Wir brauchen also lediglich zu zeigen:

(3.6) $X = \omega$

Angenommen nicht. Sei $n = \min(\omega \setminus X)$. Dann ist $n \subset X$, $n \notin X$.
$f : sn \to A$ sei definiert durch:

$$f(i) = \begin{cases} F(i) & \text{falls} \quad i < n \\ b & \text{falls} \quad i = n, \end{cases}$$

wobei $b = a$ falls $n = 0$ und $b = G(m, F(m))$ falls $n = sm$. Dann $f = F\lceil n \cup \{\langle b, n\rangle\} \in \mathbf{V}$ und $\mathbb{F}(f, sn)$ nach (3.5). Also $sn \in D$ und $n \in sn \subset X$. Widerspruch! QED(Satz 3.2.21)

Korollar 3.2.22 *Seien H, G, A und B Terme. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie* E_2 *aus der Annahme*

$(*')$ $H : B^n \to A$, $G : \omega \times B^n \times A \to A$

folgt:

$$F : \omega \times B^n \to A \quad \wedge \quad F(0, x_1, \ldots, x_n) = H(x_1, \ldots, x_n) \quad \wedge$$
$$\bigwedge k \in \omega \bigwedge x_1, \ldots, x_n \in B \; F(sk, x_1, \ldots, x_n) = G(k, x_1, \ldots, x_n, F(k)).$$

Falls F und F' zwei solche Terme sind, so gilt $\mathrm{E}_2 \vdash (*') \longrightarrow F = F'$.
Außerdem gilt: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(B) \cup \mathrm{Fr}(H) \cup \mathrm{Fr}(G)$.

Beweis. *Existenz*. Für $x_1, \ldots, x_n \in B$ setze:

$$a_{x_1,\ldots,x_n} = H(x_1, \ldots, x_n)$$
$$G_{x_1,\ldots,x_n}(k, u) = G(k, x_1, \ldots, x_n, u)$$

für $k \in \omega$, $u \in A$. $F_{x_1,\ldots,x_n} : \omega \to A$ sei definiert durch:

(3.7) $F_{x_1,\ldots,x_n}(0) = a_{x_1,\ldots,x_n}$;

(3.8) $F_{x_1,\ldots,x_n}(sk) = G_{x_1,\ldots,x_n}(k, F_{x_1,\ldots,x_n}(k))$.

Setze $F(k, x_1, \ldots, x_n) =_{\mathrm{Df}} F_{x_1,\ldots,x_n}(k)$
(mit anderen Worten: $F = \langle F_{x_1,\ldots,x_n}(k) \mid x_1, \ldots, x_n \in B \wedge k \in \omega\rangle$).
F hat die gewünschte Eigenschaft.
Eindeutigkeit. F, F' seien zwei solche Terme. Für $x_1, \ldots, x_n$ setze:

$$F_{x_1,\ldots,x_n}(k) = F(k, x_1, \ldots, x_n),$$
$$F'_{x_1,\ldots,x_n}(k) = F'(k, x_1, \ldots, x_n).$$

$F_{x_1,\ldots,x_n}$ und $F'_{x_1,\ldots,x_n}$ erfüllen dann die Gleichungen (3.7) und (3.8). Folglich $F_{x_1,\ldots,x_n} = F'_{x_1,\ldots,x_n}$ nach Satz 3.2.21. Folglich $F(k, x_1, \ldots, x_n) = F'(k, x_1, \ldots, x_n)$ für $k \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in B$. Folglich $F = F'$. QED(Korollar 3.2.22)

Wir definieren nun die üblichen *arithmetischen Operationen*:

Arithmetische Operationen

Definition.
$$p + 0 = p$$
$$p + sn = s(p + n)$$

$$p \cdot 0 = 0$$
$$p \cdot sn = p \cdot n + p$$

$$\left.\begin{array}{l} p^0 = 1 \\ p^{sn} = p^n \cdot p \end{array}\right\} \quad \text{für } p > 0.$$

Mit anderen Worten: $p+n = F(n, p)$, wobei F dasjenige $F : \omega\times\omega \to \omega$ ist mit $F(0, p) = p$; $F(sn, p) = sF(n, p) = G(n, F(n, p))$, wobei $G : \omega \times \omega \to \omega$ definiert ist durch: $G(n, q) = sq$. Ähnlich für $p\cdot n$. Ähnlich für p^n, wobei $p^n = F(n, p)$, wobei F dasjenige $F : \omega\times(\omega\setminus\{0\})$ ist mit:

$$F(0, p) = 1; \qquad F(sn, p) = F(n, p) \cdot p.$$

Bemerkung: $p + 1 = p + s0 = s(p + 0) = sp$

Aus diesen Definitionen folgt:

(1) $\langle p + n \mid n \in \omega\rangle$ ist monoton, denn $p + n < s(p + n) = p + sn$.

(2) $0 + n = n$ (Beweis. Induktion auf n)
(Also $p \cdot 1 = p \cdot s0 = p0 + p = 0 + p = p$)

(3) $p + (q + n) = (p + q) + n$ (Beweis. Induktion auf n)

(4) $0 \cdot n = 0$ (Induktion auf n)

(5) $p > 0 \to \langle p \cdot n \mid n \in \omega\rangle$ ist monoton, denn $p \cdot n = p \cdot n + 0 < p \cdot n + p = p \cdot sn$.

(6) $q \cdot (p + n) = q \cdot p + q \cdot n$ (Induktion auf n)

(7) $q \cdot (p \cdot n) = (q \cdot p) \cdot n$ (Induktion auf n)

(8) $1^n = 1$ (Induktion auf n)

(9) $1 < p \to \langle p^n \mid n \in \omega\rangle$ ist monoton

Beweis.
(a) $0 < p \to 0 < p^n$ durch Induktion auf n
(b) Sei $1 < p$. Dann: $p^n < p^n \cdot p = p^{sn}$ nach (5), (a). QED(9)

(10) $p^{q+n} = p^q \cdot p^n$ (Induktion auf n)

(11) $p^{q\cdot n} = (p^q)^n$ (Induktion auf n)

(12) $sp + n = s(p + n)$ (Induktion auf n)

(13) $p + n = n + p$ (Induktion auf n)

(14) $sp \cdot n = pn + n$

Beweis. Induktion auf n:

$$sp \cdot 0 = 0 = p \cdot 0 + 0$$
$$sp \cdot sn = sp \cdot n + sp = (p \cdot n + n) + sp = (p \cdot n + p) + sn = p \cdot sn + sn. \quad \text{QED(14)}$$

Also $p^1 = p^{s0} = p^0 \cdot p = s0 \cdot p = p0 + p = p$

(15) $p \cdot n = n \cdot p$ (Induktion auf n)

Wir beweisen jetzt die Möglichkeit der Subtraktion:

(16) Sei $p \leq n$. Dann existiert genau ein q mit $p + q = n$.

Beweis. *Eindeutigkeit*. Nach (1).
Existenz. Setze $X = \{q \mid p + q \leq n\}$. Dann $X \neq \emptyset$, da $0 \in X$. $X \subset sn$, da $\langle p + q \mid q \in \omega\rangle$ monoton ist. Sei $q = \max X$. Dann $p+q \leq n$. Aber $p+q \not< n$, da sonst $s(p+q) = p+sq \leq n$ und somit $sq \in X$. Widerspruch! Also $p + q = n$. QED(16)

Definition. Sei $p \leq n$. $n - p =$ dasjenige q mit $p + q = n$.

Die Möglichkeit von *Division mit Rest* ergibt sich aus:

(17) Sei $1 \leq m$, $n \geq 0$. Dann existiert genau ein Paar $\langle q, p\rangle$ mit:

$$p < m \wedge n = mq + p.$$

Beweis. *Existenz*. Setze $X = \{q \mid mq \leq n\}$. $X \neq \emptyset$ da $m \cdot 0 \leq n$. $X \subset sn$ wie vorhin. Sei $q = \max X$. Dann $mq \leq n$. Setze $p = n - mq$. Dann $p < m$, da sonst $mq + m = m \cdot sq \leq n$; folglich $sq \in X$. Dann $mq + p = n$.
Eindeutigkeit. Sei $n = mq+p = mq'+p'$, wobei $p, p' < m$. Sei o.B.d.A. $q \leq q'$ Sei $q' = q+r$. Dann $mq' + p' = m(q + r) + p' = mq + (mr + p') = mq + p$. Folglich $mr + p' = p < m$. Also $r = 0$, da $m > 0$. Also $q' = q$. Also $r = r' = p - mq$. QED(17)

Definition. Sei $1 \leq m$, $n \geq 0$.

$$[n/m] = \text{ dasjenige } q \text{ mit } n - mq < m$$
$$(n/m) = n - m \cdot [n/m].$$

(Also $n = m \cdot [n/m] + (n/m)$.)

(18) Sei $2 \leq m \leq n$. Dann existiert genau ein Tripel $\langle p, q, r\rangle$ mit:

$$0 < p < m, \qquad r < m^q, \qquad n = m^q \cdot p + r.$$

Beweis. *Existenz*. Sei $X = \{q \mid m^q \leq n\}$. Dann $X \neq \emptyset$, da $m^1 \leq n$. $X \subset sn$ wie vorhin. Sei $q = \max X$. Dann $q \geq 1$. Sei $p = [n/m^q]$, $r = (n/m^q)$. Dann $p \neq 0$, da $n \neq 0$. $p < m$, da sonst $m^q \cdot p \geq m^q \cdot m = m^{sq}$; folglich $sq \in X$. Widerspruch! Also $0 < p < m$. $r < m^q$, $n = m^q \cdot p + r$ sind dann trivial.
Eindeutigkeit. Sei $n = m^q$

Definition. Sei $1 \leq m$, $n \geq 0$.
$[n/m] = q$, $(n/m) = r$, wobei $\langle q, r\rangle =$ dasjenige Paar mit: $n = mq + r$, $r < m$.

(19) Sei $2 \leq m$, $n \geq 1$. Dann existiert genau ein Tripel $\langle p, q, r\rangle$ mit:

$$n = m^q \cdot p + r, \qquad 0 < p < m, \qquad r < m^q.$$

Beweis: *Existenz*. Sei $X = \{q \mid m^q \leq n\}$. Dann $X \neq \emptyset$, da $m^0 \leq n$. Sei $q = \max X$. Sei $p = [n/m^q]$, $r = (n/m^q)$. Dann $p \neq 0$, da $n \neq 0$. $p < m$, da sonst $n \geq m^q \cdot p \geq m^q \cdot m = m^{sq}$; folglich $sq \in X$. Widerspruch! Trivialerweise: $r < m^q$, $n = m^q \cdot p + r$.

Eindeutigkeit. Sei $n = m^q \cdot p + r = m^{q'} \cdot p' + r'$, wobei $p, p' < m$, $r < m^q$, $r' < m^{q'}$. Sei o.B.d.A. $q \leq q'$. Setze $h = q' - q$. Für $h > 0$ folgt:
$n \geq m^{q'} = m^q \cdot m^h \geq m^q \cdot m \geq m^q(p+1) = m^q p + m^q > m^q + r = n$. Widerspruch!
Also $h = 0$ und $q = q'$. Also ist $p = p' = [n/m^q]$, $r = r' = (n/m^q)$. QED(19)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Endliche Kardinalzahlen

Die Beziehung der *kardinalen Gleichheit* oder *Gleichmächtigkeit* zwischen Klassen ist definiert durch:

Definition. $A \sim B \longleftrightarrow \bigvee F \;\; F : A \longleftrightarrow B$

($\{\langle u, v\rangle \mid u \sim v\}$ ist dann eine *Äquivalenzrelation* – d.h. $u \sim u$, $u \sim v \sim w \to u \sim w$, $u \sim v \to v \sim u$.)

Lemma 3.2.23 *Sei $x \notin X$, $y \notin Y$. Dann $X \sim Y \longleftrightarrow X \cup \{x\} \sim Y \cup \{y\}$.*

Beweis. ($\to$) Sei $F\colon X \longleftrightarrow Y$. Dann $G\colon X \cup \{x\} \longleftrightarrow Y \cup \{y\}$, wobei $G = F \cup \{\langle y, x\rangle\}$.
($\leftarrow$) Sei $F : X \cup \{x\} \longleftrightarrow Y \cup \{y\}$. Setze $y_0 = F(x) \in Y$, $x_0 = F^{-1}(y) \in X$. Setze $X' = X \setminus \{x_0\}$, $Y' = Y \setminus \{y_0\}$. Dann $F\restriction X' : X' \longleftrightarrow Y'$.
Folglich $X = X' \cup \{x_0\} \sim Y' \cup \{y_0\} = Y$ nach ($\to$). QED(Lemma 3.2.23)

Lemma 3.2.24 *u ist endlich $\longleftrightarrow \bigvee n \;\; u \sim n$.*

Beweis. ($\to$) Sei $\langle u, r\rangle$ ein ELS. Dann $u \sim |\langle u, r\rangle|$.
($\leftarrow$) Sei $f : u \longleftrightarrow n$. Setze:

$$r = \{\langle x, y\rangle \in u^2 \mid f(x) < f(y)\}.$$

Dann $f : \langle u, r\rangle \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \langle n, \in \restriction n\rangle$. $\langle u, r\rangle$ ist also ein ELS. QED(Lemma 3.2.24)

Bemerkung. Nach Satz 3.2.2 gilt: U endlich $\longrightarrow U \in \mathbf{V}$.

Lemma 3.2.25 *$m < n \longrightarrow m \not\sim n$.*

Beweis. Durch Induktion auf n zeigen wir:

$$\bigwedge i < n \quad i \not\sim n.$$

Fall 1 $n = 0$ ist trivial.
Fall 2 $n = sm$. Angenommen nicht.
Sei $i < n$, $i \sim n$. Dann $i \neq \emptyset$, da $n \neq \emptyset$. Sei $i = sj$. Dann $i = j \cup \{j\} \sim m \cup \{m\} = n$. Folglich $i \sim m$ nach Lemma 3.2.23. Aber $i < m < n$. Also $i \not\sim m$ nach der Induktionshypothese. QED(Lemma 3.2.25)

Korollar 3.2.26 *Sei u endlich. Es gibt genau ein n mit $u \sim n$.*

Definition. Sei u endlich. $\overline{\overline{u}} = \mathrm{card}(u) =$ dasjenige n mit $u \sim n$.

Lemma 3.2.27 *Sei $v \subsetneqq u$, wobei u endlich ist. Dann ist v endlich und $\overline{\overline{v}} < \overline{\overline{u}}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen:

$$v \subsetneqq n \longrightarrow (v \text{ endlich } \wedge \overline{\overline{v}} < n).$$

v ist endlich, da $\langle v, \in \cap v^2 \rangle$ ein ELS.
Behauptung. $\overline{\overline{v}} < n$.
Beweis. Induktion auf n
Fall 1 $n = 0$. Also $v \subset n \to v = n$. Wid.
Fall 2 $n = sm$.
Fall 2.1 $m \notin v$. Dann $v \subset m$. Also $\overline{\overline{v}} \leq m < n$ nach Induktionshypothese.
Fall 2.2 $m \in v$. Dann $m \backslash v \neq \emptyset$, da sonst $v = n$. Sei $p \in m \backslash v$. Dann $v \sim v' = (v \backslash \{m\}) \cup \{p\}$ nach Lemma 3.2.23. Aber v' erfüllt Fall 2.1. Also $\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{v}}' < n$. QED(Lemma 3.2.27)

Lemma 3.2.28 $(u$ *endlich* $\wedge F : u \xrightarrow{\text{auf}} v) \to (v$ *endlich* $\wedge \ \overline{\overline{v}} \leq \overline{\overline{u}})$.

Beweis. Sei $r = \langle u, r \rangle$ ein ELS. Für $y \in v$ setze: $G(y) = \min_s \{x \mid F(x) = y\}$. Setze $u' = G''u$. Dann gilt: $G : v \leftrightarrow u' \subset u$. Also $\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{u}}' \leq \overline{\overline{u}}$ nach Lemma 3.2.27.QED(Lemma 3.2.28)

Lemma 3.2.29
(a) $(u, v$ *endlich* $\wedge \ u \cap v = \emptyset) \to \overline{\overline{u \cup v}} = \overline{\overline{u}} + \overline{\overline{v}}$
(b) $(u, v$ *endlich*$) \to \overline{\overline{u \times v}} = \overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{v}}$
(c) u *endlich* $\to \overline{\overline{\mathfrak{P}(u)}} = 2^{\overline{\overline{u}}}$

Beweis. (a) Durch Induktion auf n:

$$\bigwedge v((\overline{\overline{v}} = n \wedge u \cap v = \emptyset) \to \overline{\overline{u \cup v}} = \overline{\overline{u}} + n)$$

(b) Durch Induktion auf n: $u \times n \sim \overline{\overline{u}} \cdot n$
(c) Durch Induktion auf n: $\mathfrak{P}(n) \sim 2^n$. QED

Bemerkung. Der Beweis von Lemma 3.2.29 – wie die früheren Lemmata – macht keinen Gebrauch vom Potenzmengenaxiom. Also:

Korollar 3.2.30 Ohne *Potenzmengenaxiom folgt: u endlich $\to \mathfrak{P}(u)$ endlich (also $\mathfrak{P}(u) \in \mathbf{V}$).*

Lemma 3.2.31 *Sei $\langle u, r \rangle$ ein LS mit u endlich. $\langle u, r \rangle$ ist dann ein ELS.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert $a \subset u$ mit $a \neq \emptyset$ und $\max a$ oder $\min a$ existiert nicht. Man wähle a mit $\overline{\overline{a}}$ minimal für diese Eigenschaft. Sei $x \in a$. $a \setminus \{x\} \neq \emptyset$, da sonst $\min a = \max a = x$. $\overline{\overline{a \setminus \{x\}}} < \overline{\overline{a}}$ nach Lemma 3.2.27. Also existieren: $x_0 = \min(a \setminus \{x\})$, $x_1 = \max(a \setminus \{x\})$. Folglich

$$\min a = \begin{cases} x_0 & \text{falls } x_0 \, r \, x \\ x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \max a = \begin{cases} x_1 & \text{falls } x \, r \, x_1 \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Widerspruch! QED

Korollar 3.2.32 *Sei $u \subset \omega$, u endlich. Dann $\bigvee n \;\; u \subset n$.*

Beweis. Setze $r = \{\langle i, j\rangle \in u^2 \mid i < j\}$. $\langle u, r\rangle$ ist ein ELS nach Lemma 3.2.31. $u \subset 0$, falls $u = \emptyset$. Sonst sei $n = \max\limits_{\langle u,r\rangle} u$. Dann $u \subset sn$. QED(Korollar 3.2.32)

Korollar 3.2.33 *ω ist unendlich.*

Definition. $\langle \mathbf{V}_n \mid n \in \omega\rangle$ sei definiert durch: $\mathbf{V}_0 = \emptyset$; $\mathbf{V}_{n+1} = \mathfrak{P}(\mathbf{V}_n)$.

Lemma 3.2.34
(a) $\mathbf{V}_n$ *ist transitiv.*

(b) $n \leq m \longrightarrow \mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_m$

(c) $n < m \longrightarrow \mathbf{V}_n \in \mathbf{V}_m$

(d) $\omega \cap \mathbf{V}_n = n$

(e) $\mathbf{V}_n$ *ist endlich.*

Beweis.
(a) Induktion auf n.
(b) Durch Induktion auf m: $\bigwedge n \leq m \quad \mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_m$.
(c) $n < m \longrightarrow sn \leq m \longrightarrow \mathbf{V}_n \in \mathfrak{P}(\mathbf{V}_n) = \mathbf{V}_{sn} \subset \mathbf{V}_n$
(d) Induktion auf n
(e) Induktion auf n unter Verwendung von Korollar 3.2.30. QED

Definition. $\mathbf{V}_\omega = \bigcup\limits_n \mathbf{V}_n$.

Lemma 3.2.35 $(u \subset \mathbf{V}_\omega \wedge u$ *endlich*$) \longrightarrow u \in \mathbf{V}_\omega$.

Beweis. Für $x \in u$ setze: $F(x) = \min\{u \mid x \in \mathbf{V}_n\}$. Dann $F''u \subset \omega$ ist endlich. Sei $F''u \subset n$. Dann $x \subset \mathbf{V}_n$. Also $x \in \mathbf{V}_{n+1}$. QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Die transitive Hülle

Definition. $TC : \omega \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ sei definiert durch:

$$TC(0, x) = x; \quad TC(n+1, x) = \bigcup TC(n, x).$$

Definition. $TC(x) = \bigcup\limits_n TC(n, x)$.

Lemma 3.2.36
(a) $x \subset TC(x) \wedge TC(x)$ *ist transitiv.*

(b) $(x \subset B \wedge B$ *transitiv*$) \longrightarrow TC(x) \subset B$

(c) $TC(x) = x \cup \bigcup\limits_{y \in x} TC(y)$

(d) $TC(x) \in \mathbf{V}$

Beweis.
(a) ist trivial.
(b) Durch Induktion auf n: $TC(n,x) \subset B$.
(c) ($\subset$) Setze: $B = x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y)$. Dann $x \subset B \wedge B$ ist transitiv.
($\supset$) $x \subset TC(x)$. Falls $y \in x$, dann $y \in TC(x)$; folglich $y \subset TC(x)$, da $TC(x)$ transitiv. Also $TC(y) \subset TC(x)$, da $TC(x)$ transitiv.
(d) Angenommen nicht. x sei $\in$-minimal in $\{x \mid TC(x) \notin \mathbf{V}\}$. Also $TC(y) \in \mathbf{V}$ für $y \in x$. Also $TC(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y) \in \mathbf{V}$. Widerspruch! QED

Die Klasse H der *erblich endlichen Mengen* ist definiert durch:

Definition. $H = \{x \mid TC(x) \text{ ist endlich}\}$.

Lemma 3.2.37 $H = \mathbf{V}_\omega$

Beweis. ($\supset$) $x \in \mathbf{V}_n \longrightarrow TC(x) \subset \mathbf{V}_n$, da $\mathbf{V}_n$ transitiv $\longrightarrow TC(x)$ ist endlich.
($\subset$) Angenommen nicht. x sei $\in$-minimal in $H \setminus \mathbf{V}_\omega$. Dann $TC(y) \in \mathbf{V}_\omega$ für $y \in x$. Setze: $F(y) = \min\{n \mid TC(y) \in \mathbf{V}_n\}$. Dann $F''x \subset \omega$ ist endlich, da x endlich ist. Sei $F''x \subset n$. Dann $TC(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} TC(y) \subset \mathbf{V}_n$. Also $TC(x) \in \mathbf{V}_{n+1} \subset \mathbf{V}_\omega$. QED

Das Unendlichkeitsaxiom

Lemma 3.2.38 (E_2) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\omega \in \mathbf{V}$
(b) $\bigvee u$ *u ist unendlich.*
(c) $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}_\omega$.

Beweis. (a) $\to$ (b) $\to$ (c) Trivial.
(c) $\to$ (a) x sei $\in$-minimal in $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_\omega$. Dann $x \subset \mathbf{V}_\omega$, $x \notin \mathbf{V}_\omega$. Für $y \in x$ setze $F(y) = \min\{n \mid y \in \mathbf{V}_n\}$. $F''x$ ist unbeschränkt in ω, denn falls $F''x \subset n$, folgt $x \subset \mathbf{V}_n$ und $x \in \mathbf{V}_{n+1} \subset \mathbf{V}_\omega$. Folglich $\omega = \cup F''x \in \mathbf{V}$. QED(Lemma 3.2.38)

In der Theorie E_2 kann man nicht beweisen, daß es eine unendliche Menge gibt. Wir müssen also ein neues Axiom hinzunehmen, nämlich das *Unendlichkeitsaxiom*:

A7 $\omega \in \mathbf{V}$

Bevor wir Gebrauch von diesem Axiom machen, wollen wir zeigen, daß es aus den anderen Axiomen *nicht* folgt.

Satz 3.2.39 (E_2) *Setze* $\mathbf{H} = \langle H, \in \cap H^2 \rangle$. *Es gilt* $\mathbf{H} \models E_2 + \omega \notin \mathbf{V}$. *Also* $E_2 \nvdash \omega \in \mathbf{V}$.

Beweis.(i) (Extensionalität) $\mathbf{H} \models \bigwedge xy(\bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$
Beweis. Seien $a, b \in H$ mit $\mathbf{H} \models \bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)[{}^{x,\,y}/_{a,\,b}]$.
Behauptung: $\mathbf{H} \models (x = y)[a,b]$, d.h. $a = b$. Es gilt: $\bigwedge c \in H$ $\mathbf{H} \models (z \in x \longleftrightarrow z \in$

$y)[^{x,\,y,\,z}/_{a,\,b,\,c}]$. Also: $\bigwedge c \in H(c \in a \longleftrightarrow c \in b)$. Weil $a,\, b \in H$ und H transitiv ist, gilt $a = a \cap H$ und $b = b \cap H$. Somit: $\bigwedge c(c \in a \longleftrightarrow c \in b)$. Also $a = b$.

(ii) (**A2**) $\emptyset \in \mathbf{V}$, $\quad \bigwedge xy\, \{x,\, y\} \in \mathbf{V}$, $\quad \bigwedge x \bigcup x \in \mathbf{V}$.

Beweis. (a) $\quad \mathbf{H} \models \emptyset \in \mathbf{V}$.
Natürlich ist $\emptyset \in H$ und für $a \in H$ gilt:

$$\mathbf{H} \models (x \in y)[a, \emptyset] \longleftrightarrow a \in \emptyset \longleftrightarrow a \neq a \longleftrightarrow \mathbf{H} \models (x \neq x)[a].$$

Also $\mathbf{H} \models \bigwedge x(x \in \emptyset \longleftrightarrow x \neq x)$. Außerdem gilt $\mathbf{H} \models (x = x)[\emptyset, \emptyset]$, also $\mathbf{H} \models (x \in \mathbf{V})[\emptyset]$.
(b) $\quad \bigwedge xy\, \{x,\, y\} \in \mathbf{V}$
Für $a,\, b \in H$ ist auch $\{a, b\} \in H$. Also gilt: $\bigvee\, c \in H\; c = \{a, b\}$. Außerdem haben wir:

$$\begin{aligned} \bigvee c \in H\; c = \{a, b\} \quad &\longleftrightarrow \quad \bigvee c \in H\; \mathbf{H} \models (v = y)[c, \{a, b\}] \\ &\longleftrightarrow \quad \mathbf{H} \models \bigvee v(v = y)[\{a, b\}] \\ &\longleftrightarrow \quad \mathbf{H} \models (y \in \mathbf{V})[\{a, b\}]. \end{aligned}$$

(c) $\quad \mathbf{H} \models \bigwedge x \bigcup x \in \mathbf{V}$.
Aus Extensionalität folgt:

$$\bigcup x \in \mathbf{V} \longleftrightarrow \bigvee y\, (y = \bigcup x) \longleftrightarrow \bigvee y \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow \bigvee w(z \in w \wedge w \in x)).$$

Behauptung: Für $a \in H$ gilt: $\mathbf{H} \models \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow \bigvee w(z \in w \wedge w \in x))[a]$.
Sei also $a \in H$. Setze $b = \bigcup a \in H$. Dann

$$\bigwedge c \in H\, (c \in b \longleftrightarrow \bigvee d(c \in d \wedge d \in a)),$$

wobei $a \in H$ und $a \subset H$. Also

$$\bigwedge c \in H\, (c \in b \longleftrightarrow \bigvee d \in H(c \in d \wedge d \in a))$$

Somit gilt: $\mathbf{H} \models \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow \bigvee w(z \in w \wedge w \in x))[^{xy}/_{ab}]$.

(iii) (Aussonderung) Für alle $\varphi = \varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$ gilt:

$$\mathbf{H} \models \bigwedge u_1 \ldots u_n \bigwedge v \bigvee y \bigwedge x(x \in y \longleftrightarrow (x \in v \wedge \varphi)).$$

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in H$.
Behauptung: $\mathbf{H} \models \bigvee y \bigwedge x(x \in y \longleftrightarrow (x \in v \wedge \varphi))[^{u_1 \ldots u_n v}/_{a_1 \ldots a_n b}]$.
Tatsache: Falls $X \subset H$ endlich, so ist $X \in H$.
Sei $c = b \cap \{d \mid$ "$\mathbf{H} \models \varphi[^{u_1 \ldots u_n x}/_{a_1 \ldots a_n d}]$"$\} \in H$.
Dann $\mathbf{H} \models \bigwedge x(x \in y \longleftrightarrow (x \in v \wedge \varphi))[^{u_1 \ldots u_n v y}/_{a_1 \ldots a_n b c}]$, d.h.:
$\bigwedge d \in H\, (d \in c \longleftrightarrow (d \in b \wedge \mathbf{H} \models \varphi[a_1 \ldots a_n d]))$.

(iv) (Ersetzung) Ersetzung folgt aus dem folgenden Prinzip.

Beschränkungsaxiom: $\bigwedge x \bigvee y\; \varphi(x, y) \;\longrightarrow\; \bigwedge u \bigvee v \bigwedge x \in u \bigvee y \in v\; \varphi(x, y)$, wobei $u,\, v \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$ und $u,\, v \neq x,\, y$.

Beweis. Sei also $\mathbf{H} \vDash \bigwedge x \bigvee y \varphi(x,y)$ und $a \in H$ beliebig gewählt. Dann gilt insbesondere $\mathbf{H} \vDash \bigwedge x \in u \bigvee y\, \varphi(x,y)[a]$. Nach Transitivität von H haben wir dann: $\bigwedge b \in a \bigvee c \in H\ \mathbf{H} \vDash \varphi(x,y)[b,c]$. Da a endlich ist, können wir zu jedem $b \in a$ ein $c_b \in H$ mit $\mathbf{H} \vDash \varphi(x,y)[b,c_b]$ auswählen. Dann ist $d = \{c_b \mid b \in a\}$ eine endliche Teilmenge von H, also auch ein Element von H. Damit haben wir: $\bigwedge b \in a \bigvee c \in d \quad \mathbf{H} \vDash \varphi(x,y)[b,c]$, also auch: $\mathbf{H} \vDash \bigwedge x \in \bigvee y \in v\, \varphi(x,y)[a,d]$.

(v) (Potenzmengenaxiom) $\quad \bigwedge x \quad \mathfrak{P}(x) \in \mathbf{V}$.

Beweis. Sei $a \in H$. Behauptung: $\mathbf{H} \vDash \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow z \subset x)[{}^{x}/{}_{a}]$.
Setze $b = \mathfrak{P}(a)$. Dann gilt: $\bigwedge c \in H(c \in b \longleftrightarrow c \subset y)$. Also $\mathbf{H} \vDash \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow z \subset x)[{}^{xy}/{}_{ab}]$.

(vi) (Fundierung) $\quad \mathbf{H} \vDash A \neq \emptyset \longrightarrow \bigvee x \in A \bigwedge y \in x\, y \notin A$

Beweis. Sei $A = \{x \mid \varphi\}$, $\varphi = \varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$ und $u_1, \ldots, u_n \in H$. Sei nun b $\in$-minimal in $\{b \mid$ "$\mathbf{H} \vDash \varphi[a_1 \ldots a_n b]$"$\}$. Mit Argumenten wie vorhin erhalten wir: $\mathbf{H} \vDash$ "x ist $\in$-minimal in A"$[a_1 \ldots a_n b]$.

Also ist $\mathbf{H}$ ein Modell der Theorie E_2.

(vii) $\mathbf{H} \vDash \omega \notin \mathbf{V}$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathbf{H} \vDash \bigwedge y\, y \neq \omega$. Angenommen nicht. Sei $a \in A$ mit $\mathbf{H} \vDash u = \omega[a]$. Dann $\mathbf{H} \vDash \bigwedge y \in u \bigvee z \in u\, y \in z[a]$. Also gilt $\bigwedge y \in a \bigvee z \in a\, y \in z$. Seien $b_0 \in b_1 \in \ldots \in b_n \ldots$, wobei $b_n \in a$ für alle n. Dann $b_i \neq b_j$ für $i < j$ wegen Fundierung. Also ist a unendlich und somit $a \notin H$.

QED(Satz 3.2.39)

Bemerkung. Bei Aussonderung, Ersetzung und Fundierung müssten wir Mengen der Form $\{x \mid$ "$\mathbf{H} \vDash \varphi$"$\}$ bilden. Daß "$\mathbf{H} \vDash \varphi$" als eine Formel der E-Sprache ausgedruckt werden kann, werden wir später sehen.

Ab jetzt benutzen wir die Axiome **A1** — **A7**.

Definition. $\mathrm{ZF} = \mathrm{E}_2 + \mathbf{A7}$.

Die Theorie ZF heißt die ZERMELO-FRANKEL-Axiomatisierung der Mengenlehre.

3.3 Ordinalzahlen

Folgende Resultate sind Sätze der Theorie ZF.

Wertverlaufsrekursion

Der *Rekursionssatz für* ω besagt, daß es zu gegebenen $a \in \omega$, $G : \omega \times A \to A$ einen Term $F : \omega \to A$ gibt mit:

$$(*) \qquad F(0) = a; \quad F(sn) = G(n, F(n)).$$

Wir nennen $(*)$ die "rekursive Definition" von F. Es gibt aber andere "rekursive Definitionen", die nicht ohne erheblichen Aufwand in diese Form gebracht werden können. Man betrachte z.B. die Folge: $0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, \ldots, 0, 1, \ldots, n, \ldots$ Ist $f(n)$ das n-te Glied dieser Folge, so läßt sich die Funktion f "definieren" durch:

$$f(0) = 0; \quad f(n+1) = \begin{cases} f(n) + 1 & \text{falls es } i < n \text{ gibt mit } f(i) = f(n); \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist eine "Rekursion" in dem Sinne, daß $f(n)$ definiert wird durch Bezugnahme auf die früheren Werte von f – jedoch nicht allein durch Bezugnahme auf den *unmittelbar* vorhergehenden Wert. Man braucht vielmehr den ganzen vorhergehenden *Wertverlauf* von f, um den Wert an der Stelle n zu ermitteln. Dieser Wertverlauf kann identifiziert werden mit $f{\restriction}n$. Die obige "rekursive Definition" läßt sich tatsächlich zusammenfassen durch die Gleichung:

$$f(n) = G(n, f{\restriction}n)$$

für eine geeignete Funktion $G : \omega \times \mathbf{V} \to \omega$. Der hier zugrunde liegende Rekursionssatz lautet:

Sei $G : \omega \times \mathbf{V} \to A$. Dann gibt es einen Term $F : \omega \to A$ mit:

$$F(n) = G(n, F{\restriction}n).$$

Man kann aber hoffen, diesen Satz zu verallgemeinern, indem man ω durch einen Term W und $\in{\restriction}\omega$ durch eine Relation $R \subset W^2$ ersetzt. Sei $G : W \times \mathbf{V} \to A$. Bei passendem $R \subset W^2$ gibt es tatsächlich ein $F : W \to A$ mit: $F(x) = G(x, F{\restriction}R''\{x\})$. (Hier ist natürlich $F{\restriction}R''\{x\} = \langle F(z) \mid z\,R\,x\rangle$.) Dies gilt unter der Voraussetzung, daß R *stark fundiert* ist. Wir definieren:

Definition.
R ist *fundiert* $=_{\text{Df}}$ $R \subset \mathbf{V}^2 \wedge \bigwedge u(u \neq \emptyset \longrightarrow$ "u hat ein R-minimales Element").

Wir werden beweisen:

$$\text{ZF} + \text{“}R \text{ ist fundiert”} \vdash A \neq \emptyset \longrightarrow \text{“}A \text{ hat ein } R\text{-minimales Element”}$$

für beliebige Terme A.

Definition. R ist *mengenähnlich* (setlike) $=_{\text{Df}}$ $R \subset \mathbf{V}^2 \wedge \bigwedge x\, R''\{x\} \in \mathbf{V}$.

Definition. R ist *stark fundiert* $=_{\mathrm{Df}}$ R ist fundiert und mengenähnlich.

Bevor wir diesen Wertverlaufsrekursionssatz beweisen, bringen wir einige Hilfslemmata über mengenähnliche Relationen. Im folgenden sei vorausgesetzt, daß R mengenähnlich ist.

Lemma 3.3.1 $\bigwedge u \;\; R''u \in \mathbf{V}$.

Beweis. $R''u = \bigcup\limits_{x \in u} R''\{x\} = \cup F''u$, wobei $F(x) = R''\{x\}$. QED

Definition. A ist *R-abgeschlossen* $=_{\mathrm{Df}}$ $R''A \subset A$.

Bemerkung. A ist $\in$-abgeschlossen gdw. A transitiv ist, denn $\in {}''A = \cup A$.

Definition. $R_* : \omega \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sei definiert durch: $R_*(0,u) = u$; $R_*(n+1,u) = R''R_*(n,u)$.

Definition. $R_*(u) = \bigcup\limits_{n<\omega} R_*(n,u)$. $R_*(u)$ heißt die *R-Abschließung* von u.

Bemerkung. $\in_*(u) = TC(u)$.

Lemma 3.3.2 (a) $R_*(x) \in \mathbf{V}$

(b) $x \subset R_*(x)$; $R''R_*(x) \subset R_*(x)$

(c) $(x \subset A \wedge R''A \subset A) \to R_*(x) \subset A$.

Der Beweis ist genau wie für TC.

Lemma 3.3.3 *(R ist stark fundiert $\wedge$ $A \neq \emptyset$) $\longrightarrow \bigvee x$($x$ ist R-minimal in A).*

Beweis. Sei $x \in A$. Setze $a = R^*(\{x\})$. Dann ist $x \in a \cap A$ und a ist R-abgeschlossen. Sei also y R-minimal in $a \cap A$. Behauptung: y ist R-minimal in A.
Angenommen nicht. Sei $z \in A$ mit zRy. Dann ist $z \in a$, da $y \in a$ und a R-abgeschlossen ist. Widerspruch zur R-Minimalität von y in $a \cap A$!

Wir können jetzt beweisen:

Satz 3.3.4 (Wertverlaufsrekursionssatz)
Seien A, R und G Terme. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie ZF *aus der Annahme*

($*$) *$R \subset A^2$ stark fundiert, $R''A \subset A$, $G : A \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*

folgt:

$$F : A \to \mathbf{V} \quad \wedge \quad \bigwedge x \; F(x) = G(x, F{\upharpoonright}R''\{x\}).$$

Falls F und F' zwei solche Terme sind, so gilt ZF $\vdash (*) \longrightarrow F = F'$.
Außerdem gilt: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(R)$.

Beweis.
Eindeutigkeit: F, F' seien solche Abbildungen. Setze: $Z = \{x \in A \mid F(x) = F'(x)\}$.

Behauptung. $Z = A$.
Angenommen nicht. $x \in A \setminus Z$ sei R-minimal. Dann $R''\{x\} \subset Z$, $x \notin Z$. Folglich: $F{\restriction}R''\{x\} = F'{\restriction}R''\{x\}$. Also: $F(x) = G(x, F{\restriction}R''\{x\}) = G(x, F'{\restriction}R''\{x\}) = F'(x)$. Also $x \in Z$. Widerspruch!

Existenz: Man definiere eine Relation $\mathbb{F}$ durch: $\mathbb{F}(f, u)$ gdw. folgende Bedingungen zutreffen:

(a) $u \subset A \wedge R''u \subset u$

(b) $\mathrm{dom}(f) = u$

(c) $\bigwedge x \in u \;\; f(x) = G(x, f{\restriction}R''\{x\})$.

(1) $\mathbb{F}$ ist eine Funktion.

Beweis. Sei $\mathbb{F}(f, u)$, $\mathbb{F}(f', u)$. Eine Wiederholung des obigen Eindeutigkeitsbeweises zeigt: $f = f'$. QED(1)

Definition. $D = \mathrm{dom}(\mathbb{F})$. Für $u \in D$ setze: $f_u = \mathbb{F}(u) = \iota f \; \mathbb{F}(f, u)$.

(2) $(v \subset u \in D \wedge R''v \subset v) \longrightarrow (v \in D \wedge f_v = f_u{\restriction}v)$

Beweis. $\mathbb{F}(f_u{\restriction}v, v)$. QED(2)

Definition. $X = \bigcup D$, $F = \bigcup\{f \mid \bigvee u \, \mathbb{F}(f, u)\}$.
F ist dann eine Relation mit:

$$\mathrm{dom}(F) = X, \quad \mathrm{rng}(F) \subset B, \quad \mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(R).$$

(3) $u \in D \longrightarrow F{\restriction}u = f_u$

Beweis. Sei $\langle y, x\rangle \in F$, $x \in u$. Dann $y = f_v(x)$ für ein $v \in D$. Nach (2) aber: $u \cap v \in D$ und $f_{u \cap v} = f_u{\restriction}u \cap v = f_v{\restriction}u \cap v$. Da $x \in u \cap v$ folgt: $y = f_{u\cap v}(x) = f_u(x)$. QED(3)

(4) $F : X \longrightarrow B$.

Beweis. Zu zeigen ist: F ist eine Funktion. Sei $\langle y, x\rangle, \langle z, x\rangle \in F$. Sei $x \in u \in D$. Dann $F{\restriction}u = f_u$. Also $y = z = f_u(x)$. QED(4)

(5) $F(x) = G(x, F{\restriction}R''\{x\})$ für $x \in X$.

Beweis. Sei $x \in u \in D$. Dann $F(x) = f_u(x) = G(x, f_u{\restriction}R''\{x\}) = G(x, F{\restriction}R''\{x\})$ nach (3). QED(5)

Es bleibt nur zu zeigen:

(6) $X = A$

Beweis. Angenommen nicht. $x \in A \setminus X$ sei R-minimal. Also $R''\{x\} \subset X$, $x \notin X$. X ist aber R-abgeschlossen. Folglich $u \subset X$, wo $u = R_*(R''\{x\})$. Nach (5) folgt: $\mathbb{F}(F{\restriction}u, u)$. Also $u \in D$. Setze: $v = u \cup \{x\}$. Dann $R''v \subset v$. $g : v \to B$ sei definiert durch:

$$g = F{\restriction}u \cup \{\langle G(x, F{\restriction}R''\{x\}), x\rangle\}.$$

Man sieht leicht ein, daß $\mathbb{F}(g, v)$. Folglich ist $v \in D$ und $x \in v \subset X$.
Widerspruch! QED(Satz 3.3.4)

Definition. Der eben im obigen Beweis konstruierte Term $F = \bigcup\{f \mid \bigvee u\, \mathbb{F}(f,u)\}$ heißt der *kanonische Term bestimmt durch* die Gleichung $F(x) = G(x, f\restriction R''\{x\})$.

Bemerkung. Es gibt sogar einen Term F' mit $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow F = F'$, wobei F der kanonische Term ist, und $\mathrm{Fr}(F') \subset \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(R)$.

Korollar 3.3.5 *Seien A,B, C, R und G Terme. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie* ZF *aus der Annahme*

$(*)$ $R \subset A^2$ *stark fundiert,* $R''A \subset A$, $G : A \times B^n \times \mathbf{V} \to C$

folgt:

$$F : A \times B^n \to \mathbf{V} \quad \wedge$$
$$\bigwedge x \bigwedge y_1, \ldots, y_n \in B\; F(x, y_1, \ldots, y_n) = G(x, y_1, \ldots, y_n, \langle F(z, y_1, \ldots, y_n) \mid zRx\rangle).$$

Falls F und F′ zwei solche Terme sind, so gilt $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow F = F'$.
Außerdem gilt: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) \cup \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(R)$.

Beweis. Wir imitieren den Beweis des entsprechenden Korollars aus dem früheren Rekursionssatz: Für $\vec{z} \in B^n$ setze: $G_{\vec{z}}(x,u) = G(x, \vec{z}, u)$ für $x \in A$, $u \in \mathbf{V}$. $F_{\vec{z}}$ sei der kanonische Term bestimmt durch:

$$F_{\vec{z}}(x) = G_{\vec{z}}(x, F_{\vec{z}}\restriction R''\{x\})$$

für $x \in A$, $\vec{z} \in B^n$. Setze: $F = \langle F_{\vec{z}}(x) \mid x \in A \wedge \vec{z} \in B^n\rangle$. F hat dann die gewünschten Eigenschaften. QED(Korollar 3.3.5)

Definition. Der eben im obigen Beweis konstruierten Term $F = \langle F_{\vec{z}}(x) \mid x \in A \wedge \vec{z} \in B^n\rangle$ heißt der *kanonische Term bestimmt durch* die Gleichung $F(x, \vec{y}) = G(x, \vec{y}, \langle F(z, \vec{y}) \mid zRx\rangle)$.

Definition. $\langle U, R\rangle$ ist ein *extensionales fundiertes System* (EFS) gdw.
(a) $R \subset U^2$ ist stark fundiert
(b) $\bigwedge x, y \in U\, (R''\{x\} = R''\{y\} \to x = y)$.

Bemerkung. Falls U transitiv ist, dann ist $\langle U, \in \cap\, U^2\rangle$ ein EFS.

Der *Mostowskische Isomorphismensatz* (MIT) lautet:

Satz 3.3.6 *Zu Termen U, R existieren Terme F, V derart, daß aus:*

$(*)$ $\langle U, R\rangle$ *ist ein EFS*

folgt in ZF*:*

V *ist transitiv und* $F : \langle U, R\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle V, \in \restriction V\rangle$.

Falls F und F′ solche Terme sind, so folgt $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow (F = F' \wedge V = V')$.
Außerdem gilt: $\mathrm{ZF} \vdash F(x) = F''R''\{x\}$ *für* $x \in U$.

Beweis. Aus Korollar 3.2.3 folgt die Eindeutigkeit von $\langle V, F\rangle$ sowie die Tatsache, daß $F(x) = F''R''\{x\}$. Wir beweisen die Existenz.

$F : U \to \mathbf{V}$ sei der kanonische Term bestimmt (nach dem Wertverlaufsrekursionssatz) durch: $F(x) = F''R''\{x\}$ für $x \in U$. Setze: $V = F''U$. F ist dann eine Abbildung von U auf V mit:

(1) $x\,R\,y \to F(x) \in F(y)$

(2) V ist transitiv

(denn für $y \in V$ ist $y = f(x)$ für ein $x \in U$. Also $y = F''R''\{x\} \subset V$.)
Um die Eineindeutigkeit von F zu beweisen, versuchen wir, eine Umkehrfunktion G zu definieren. $G : V \to U \cup \{0\}$ sei definiert durch:

$$G(x) = \begin{cases} \iota z(z \in U \wedge G''x = R''\{z\}, & \text{falls } \bigvee! z \in U\, G''x = R''\{z\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dies hat die Form $G(x) = H(x, G\restriction x)$, wobei $H : V \times \mathbf{V} \to U \cup \{a\}$. Man definiere z.B.

$$H(x, f) = \begin{cases} z & \text{falls } z \in U,\ \mathrm{Funk}(f), x \subset \mathrm{dom}(k) \text{ und } f''x = R''\{z\}; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

z ist eindeutig wegen der Extensionalität von $\langle U, R\rangle$.) Dann:

(3) $GF(x) = x$ für $x \in U$.

Beweis. Angenommen nicht.
Setze $A = \{x \in U \mid GF(x) = x\}$. Sei $x \in U \setminus A$ ein R-minimales Element. Dann $R''\{x\} \subset A$, $x \notin A$. Folglich:
$G''F(x) = G''F''R''\{x\} = \{GF(z) \mid z\,R\,x\} = \{z \mid z\,R\,x\} = R''\{x\}$. Also:
$GF(x) = \iota x'(x' \in U \wedge R''\{x'\} = G''F(x' = x)$. Widerspruch! QED(3)

Also:

(4) $F(x) \in F(y) \to x\,R\,y$.

Beweis. $F(x) \in F(y) \to x = G(x) \in G''F(y) = G''F''R''\{y\} = R''\{y\}$.

QED(Satz 3.3.6)

Definition. Das eben konstruierte Paar $\langle V, F\rangle$ heißt der *kanonische Kollaps* von $\langle U, R\rangle$.

Korollar 3.3.7 (ZF) $\bigwedge u, r(\langle u, r\rangle$ ist ein EFS $\longrightarrow$ *Es gibt genau ein Paar* $\langle v, f\rangle$ *mit:* v *transitiv und* $f : \langle u, r\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v, \in \cap\, v^2\rangle$.

Beweis. Annahme: ZF $+ \langle u, r\rangle$ ist ein EFS.
Existenz. Seien F, V Terme mit V transitiv und $F : \langle u, r\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle V, \in \cap\, V^2\rangle$.
Behauptung: $F, V \in \mathbf{V}$. Es gilt: $V = F''u \in \mathbf{V}$, also auch $F \subset u \times V \in \mathbf{V}$.
Eindeutigkeit. Sei $f' : \langle u, r\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle v', \in \cap\, v'^2\rangle$. Dann ist $f = f'$ nach Satz 3.3.6.
QED(Korollar 3.3.7)

Definition. $\langle U, R\rangle$ ist ein *wohlgeordnetes System* (WS) $=_{\mathrm{Df}}$ $\langle U, R\rangle$ ist ein linear geordnetes System (LS) und R fundiert.

Definition. $\langle U, R\rangle$ ist ein *stark wohlgeordnetes System* (SWS) $=_{\mathrm{Df}}$ $\langle U, R\rangle$ ist ein WS und R stark fundiert.

Definition. R ist eine (starke) *Wohlordnung* $=_{\mathrm{Df}}$ $\langle U, R\rangle$ ist ein WS (SWS) für ein U.

Bemerkung. U ist nicht eindeutig wenn $R = \emptyset$, denn sowohl $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ als $\langle \{x\}, \emptyset\rangle$ ist ein SWS.

Lemma 3.3.8 *$\langle U, R\rangle$ ist ein WS gdw. $R \subset U^2$ fundiert ist und:*

$$(x\,R\,y \vee y\,R\,x \vee x = y) \quad \textit{für alle} \;\; x, y \in U.$$

Beweis. $(\rightarrow)$ Trivial.
$(\leftarrow)$ Wir zeigen:

(a) $\neg x\,R\,x$, (b) $x\,R\,y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z$.

Zu (a): Sonst hat $\{x\}$ kein R-minimales Element.
Zu (b): Sei $\neg x\,R\,z$. Dann $z\,R\,x \vee z = x$. $\{x, y, z\}$ hat also kein R-minimales Element. Widerspruch! QED

Lemma 3.3.9 *Sei $\langle U, R\rangle$ ein WS. Sei $A \cap U \neq \emptyset$. Es gibt genau ein R-kleinstes $x \in A \cap U$ (d.h. $x\,R\,y \vee x = y$ für $y \in A \cap U$).*

Beweis. $x \in A \cap U$ sei R-minimal. Für $y \in A \cap U$ ist $\neg y\,R\,x$, also $x\,R\,y \vee x = y$. QED

Definition. Sei $S = \langle U, R\rangle$ ein WS. Sei $A \cap U \neq \emptyset$.
$\min\limits_{S} A =$ das R-kleinste Element von $A \cap U$.

Lemma 3.3.10 *Jedes SWS ist ein extensional fundiertes System (EFS).*

Beweis. Trivial.

MIT liefert dann:

Definition. Sei $\langle U, R\rangle$ ein SWS und $\langle V, F\rangle$ der kanonische Kollaps von $\langle U, R\rangle$.

$$|\langle U, R\rangle| =_{\mathrm{Df}} V$$

$|\langle U, R\rangle|$ heißt dann der *Ordnungstyp* von $\langle U, R\rangle$.

Bemerkung. $|\langle U, R\rangle| \in \mathbf{V} \leftrightarrow \langle U, R\rangle \in \mathbf{V}$.

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Ordinalzahlen

Definition. On $=_{\text{Df}} \{|s| \mid s \in \mathbf{V} \text{ ist ein } WS\}$.

Bemerkung. Falls $s \in \mathbf{V}$ ein WS, so auch ein SWS.

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ werden als Variablen für Ordinalzahlen verwendet.
Zu jedem SWS $S = \langle U, R\rangle$ existiert genau ein Isomorphismus F mit $F : S \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \langle |S|, \in \restriction |S|\rangle$.
F^{-1} heißt dann die *Aufzählung* von S durch $|S|$.
Der folgende *Zählsatz* gibt uns eine explizite Darstellung der Funktion F:

Lemma 3.3.11 *Sei $S = \langle U, R\rangle$ ein SWS. Sei $\Gamma = |S|$. Dann gilt:*

(a) $\langle \Gamma, \in\restriction\Gamma\rangle$ *ist ein SWS.*

(b) *Für $x \in U$ setze: $u_x = \{y \mid y\, R\, x\}$, $r_x = R\restriction u_x$, $s_x = \langle u_x, r_x\rangle$.*
Sei $F : S \leftrightarrow \langle \Gamma, \in\restriction\Gamma\rangle$. Dann gilt:

$$F(x) = |s_x| \quad \textit{für} \;\; x \in U.$$

Beweis. (a) $\langle \Gamma, \in\restriction\Gamma\rangle$ ist ein SWS, weil isomorph zu S.
(b) Offensichtlich:

$$F\restriction u_x : s_x \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \langle F(x), \in \cap F(x)^2\rangle,$$

da $F(x) = F''u_x$ und $x\, R\, y \leftrightarrow F(x) \in F(y)$.
Zu zeigen bleibt:
Behauptung. $F(x)$ ist transitiv.
Sei $z \in y \in F(x)$. Dann $y = F(y')$ für ein $y'\, R\, x$. Also $z = F(z')$ für ein $z'\, R\, y'$. Also $z'\, R\, x$.
Folglich $z = F(z') \in F(x)$. QED(Lemma 3.3.11)

Korollar 3.3.12 *Sei S ein SWS. Dann $|S| \subset$ On und $|S|$ ist transitiv.*

Beweis. Wir wissen, daß $|S|$ transitiv ist. Sei $x \in |S|$. Dann $x = F(y) = |s_y| \in$ On für ein $y \in U$. QED

Korollar 3.3.13 On *ist transitiv.*

Beweis. Sei $\alpha = |s|$, wo $s \in \mathbf{V}$ ein WS ist. Dann $|s| \subset$ On nach Korollar 3.3.12. QED

Definition. U ist *konnex* $=_{\text{Df}} \bigwedge xy \in U(x \in y \vee y \in x \vee y = x)$.

Lemma 3.3.14 *Sei U transitiv. Dann*
(a) *U ist konnex $\longleftrightarrow \langle U, \in\restriction U\rangle$ ein SWS ist.*
(b) *U ist konnex $\longrightarrow U = |\langle U, \in\restriction U\rangle|$.*

Beweis. (a) Nach Lemma 3.3.8.
(b) $\mathrm{id}\restriction U : \langle U, \in\restriction U\rangle \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \langle U, \in\restriction U\rangle$ QED

Korollar 3.3.15 $\mathrm{On} = \{x \mid x$ *transitiv und konnex*$\}$

Korollar 3.3.16 Γ *transitiv und konnex* $\longrightarrow \Gamma \subset \mathrm{On}$.

Lemma 3.3.17 *Sei Γ transitiv und konnex. Sei U transitiv mit $U \subset \Gamma$. Dann ist $U \in \Gamma$ oder $U = \Gamma$.*

Beweis. Sei $U \neq \Gamma$. Setze $\alpha = \min_{\langle \Gamma, \in \restriction \Gamma \rangle}\{\beta \mid \beta \in \Gamma \setminus U\}$. Dann $\alpha \subset U$, $\alpha \notin U$. Aber: $\alpha \in \beta \to \beta \notin U$, da sonst $\alpha \in \beta \in U$, folglich $\alpha \in U$, wegen der Transitivität von U. Also $U \subset \alpha$. Also $U = \alpha \in \Gamma$. QED

Definition. $\alpha < \beta \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} \alpha \in \beta$

$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$.

Korollar 3.3.18 $\alpha \leq \beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta$.

Lemma 3.3.19 $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann $\alpha \not\subseteq \beta$, $\beta \not\subseteq \alpha$. Also $\alpha \cap \beta \subsetneqq \alpha, \beta$. Also $\alpha \cap \beta \in \alpha, \beta$. Also $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. Widerspruch! QED

Korollar 3.3.20 $\langle \mathrm{On}, < \rangle$ *ist ein SWS und* $\mathrm{On} = |\langle \mathrm{On}, < \rangle|$.

Beweis. Nach Lemma 3.3.14.

Korollar 3.3.21 $\mathrm{On} \notin \mathbf{V}$.

Beweis. Sonst $\mathrm{On} = |\langle \mathrm{On}, < \rangle| \in \mathrm{On}$.

Korollar 3.3.22 *Sei S ein SWS. Dann ist* $|S| \in \mathrm{On}$ *oder* $|S| = \mathrm{On}$.

On fungiert also wie die “größte Ordinalzahl”. Wir definieren:

Definition. $\infty =_{\mathrm{Df}} \mathrm{On}$

$$\begin{aligned} \Gamma \leq \infty &\quad\longleftrightarrow\quad (\Gamma \in \infty \vee \Gamma = \infty) \\ \Gamma < \infty &\quad\longleftrightarrow\quad \Gamma \in \infty. \end{aligned}$$

Es folgt also: $\Gamma \leq \infty \leftrightarrow \Gamma \subset \infty$ für transitives Γ.

Definition. Sei $A \cap \mathrm{On} \neq \emptyset$.

$$\min A =_{\mathrm{Df}} \min_{\langle \mathrm{On}, < \rangle} A\,.$$

Definition. $s\alpha =_{\mathrm{Df}} \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma 3.3.23

(a) $0 \in \mathrm{On}$

(b) $s\alpha \in \mathrm{On}$

(c) $\alpha \leq \beta \longleftrightarrow \alpha < s\beta$

(d) $\alpha < \beta \longleftrightarrow s\alpha \leq \beta$.

Beweis.
(a) 0 ist transitiv und konnex.
(b) $s\alpha$ ist transitiv und konnex.
(c) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta) \leftrightarrow \alpha \in \beta \cup \{\beta\}$.
(d) $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$, da β transitiv. QED

Korollar 3.3.24 $s\alpha = \min\{\nu \mid \nu > \alpha\}$.

Definition. α ist eine *Limeszahl* ($\mathrm{Lim}(\alpha)$) $=_{\mathrm{Df}}$ $\alpha \neq 0 \wedge \bigwedge \nu < \alpha \bigvee \tau < \alpha \quad \nu < \tau$.

Lemma 3.3.25 $\alpha = 0 \vee \bigvee \beta \;\; \alpha = s\beta \vee \mathrm{Lim}(\alpha)$.

Beweis. Sei $\alpha \neq 0$, $\bigwedge \beta \;\; \alpha \neq s\beta$. Dann:
$\beta < \alpha \longrightarrow (s\beta \leq \alpha \wedge s\beta \neq \alpha) \longrightarrow \beta < s\beta < \alpha$. QED

Lemma 3.3.26
(a) $\omega \in \mathrm{On}$
(b) $\omega = \min\{\alpha \mid \mathrm{Lim}(\alpha)\}$

(Der Beweis ist dem Leser überlassen.)

Definition. Sei $A \subset \mathrm{On}$. $\inf A =_{\mathrm{Df}} (\bigcap A) \cap \mathrm{On}$.

Lemma 3.3.27 *Sei* $A \subset \mathrm{On}$.
(a) $\inf A \leq \infty$.
(b) $\Gamma \leq \inf A \longleftrightarrow \bigwedge \nu \in A \;\; \Gamma \leq \nu$ *für* $\Gamma \leq \infty$.

Beweis.
(a) $\infty \cap \bigcap A \subset \infty$, $\infty \cap \bigcap A$ transitiv.
(b) $X \subset \bigcap A \leftrightarrow \bigwedge a \in A \;\; X \subset a$.

Korollar 3.3.28 $\inf A = \begin{cases} \min A & \textit{falls } \; A \neq \emptyset \\ \infty & \textit{sonst.} \end{cases}$

Definition. $\inf\limits_{z \in I} \alpha_z = \inf\{\alpha_z \mid z \in I\}$ für $\langle \alpha_z \mid z \in I \rangle : I \to \mathrm{On}$.

Definition. Sei $A \subset \mathrm{On}$. $\sup A =_{\mathrm{Df}} \bigcup A$.

Lemma 3.3.29 *Sei* $A \subset \mathrm{On}$. *Dann*
(a) $\sup A \leq \infty$.
(b) $\sup A \leq \Gamma \longleftrightarrow \bigwedge \nu \in A \;\; \nu \leq \Gamma$ *für* $\Gamma \leq \infty$.

Beweis.
(a) $\bigcup A \subset \infty$, $\bigcup A$ transitiv.
(b) $\bigcup A \subset X \leftrightarrow \bigwedge a \in A \;\; a \subset X$ QED

Korollar 3.3.30 $\sup A = \begin{cases} \min\{\alpha \mid \bigwedge \nu \in A \;\; \nu \leq \alpha\} & \textit{falls } A \textit{ beschränkt in } \infty, \\ \infty & \textit{sonst.} \end{cases}$

Korollar 3.3.31 $\sup A = \max A$ *falls* $\max A$ *existiert, d.h. falls* $\max A \neq \mathbf{V}$.
($\max A =_{\mathrm{Df}} \iota\alpha(\alpha \in A \wedge \bigwedge \beta \in A \ \beta \leq \alpha)$*).*

Definition. Sei $A \subset \mathrm{On}$. $\quad \mathrm{lub}\, A = \sup\{s\alpha \mid \alpha \in A\}$.*

Lemma 3.3.32 *Sei* $A \subset \mathrm{On}$. *Dann*

(a) $\mathrm{lub}\, A \leq \infty$.

(b) $\mathrm{lub}\, A \leq \Gamma \longleftrightarrow A \subset \Gamma$ *für* $\Gamma \leq \infty$.

Beweis.
(a) Nach Lemma 3.3.29(a).
(b) $\mathrm{lub}\, A \leq \Gamma \longleftrightarrow \bigwedge \alpha \in A \ s\alpha \subset \Gamma \longleftrightarrow \bigwedge \alpha \in A \ \alpha \in \Gamma \longleftrightarrow A \subset \Gamma$ QED

Korollar 3.3.33 $\mathrm{lub}\, A = \begin{cases} \min\{\alpha \mid \bigwedge \nu \in A \ \nu < \alpha\} & \textit{falls } A \textit{ beschränkt in } \infty, \\ \infty & \textit{sonst.} \end{cases}$

Definition. $\sup\limits_{z \in I} \alpha_z = \sup\{\alpha_z \mid z \in I\}$
$\mathop{\mathrm{lub}}\limits_{z \in I} \alpha_z = \mathrm{lub}\{\alpha_z \mid z \in I\}$

Satz 3.3.34 (Vollständige Induktion für On)
Annahme: $\varphi(0) \wedge \bigwedge \alpha(\varphi(\alpha) \to \varphi(s\alpha)) \wedge \bigwedge \lambda((\mathrm{Lim}(\lambda) \wedge \bigwedge \nu < \lambda \ \varphi(\nu)) \to \varphi(\lambda))$
Behauptung: $\bigwedge \alpha \ \varphi(\alpha)$.

Beweis. Angenommen nicht. Setze $A = \{\alpha \mid \varphi(\alpha)\}$.
Sei $\alpha = \min(\mathrm{On} \setminus A)$. Dann $\alpha \subset A$, $\alpha \notin A$. Wir betrachten drei Fälle:

Fall 1 $\quad \alpha = 0$. Dann $\alpha \in A$. Widerspruch!

Fall 2 $\quad \alpha = s\beta$. Dann $\beta \in A$, da $\alpha \subset A$. Also $s\beta \in A$. Widerspruch!

Fall 3 $\quad \mathrm{Lim}(\alpha)$. Dann $\alpha \subset A$. Also $\alpha \in A$. Widerspruch! QED

Entsprechend diesem Induktionssatz haben wir einen speziellen Rekursionssatz für On, der sich aus dem Wertverlaufsrekursionssatz herleiten läßt.

Definition. A ist $\bigcup$-*abgeschlossen* $=_{\mathrm{Df}} \bigwedge u \subset A \quad \bigcup u \in A$.

(Also sind On, $\mathbf{V}$ $\bigcup$-abgeschlossen.)

Satz 3.3.35 (Rekursionssatz für On)
Seien A, G_0 *und* G_1 *Terme. Es gibt einen Term* F *derart, daß in* ZF *aus der Annahme*

$(*)$ $\Gamma \leq \infty$, $a \in A$, $G_i : \Gamma \times A \to A$ $(i = 0, 1)$ *und* A *ist* $\bigcup$-*abgeschlossen*

folgt:

(a) $F : \Gamma \to A$

(b) $F(0) = a$, *falls* $0 < \Gamma$.

(c) $F(s\beta) = G_0(\beta, F(\beta))$, *falls* $s\beta < \Gamma$.

*'lub' heißt 'least upper bound'

(d) $F(\lambda) = G_1(\lambda, \bigcup_{\nu<\lambda} F(\nu))$, *falls* $\mathrm{Lim}(\lambda)$ *und* $\lambda < \Gamma$.

Außerdem gilt $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(a)$ *und* $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow F = F'$, *falls* F' *noch ein solcher Term ist wie* F.

Beweis. $G : \Gamma \times \mathbf{V} \to A$ sei definiert durch:

$$G(\alpha, f) = \begin{cases} G_0(\beta, f(\beta)) & \text{falls } \alpha = s\beta \wedge f : \alpha \to A; \\ G_1(\alpha, \bigcup_{\nu<\alpha} f(\nu)) & \text{falls } \mathrm{Lim}(\alpha),\ f : \alpha \to A; \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingungen (a), (b), (c) sind dann gleichwertig mit:

$$F(\alpha) = G(\alpha, F{\restriction}\alpha) \quad \text{für } \alpha < \Gamma.$$ QED(Satz 3.3.35)

Wie gewöhnlich erhalten wir auch:

Korollar 3.3.36 *Seien* Γ, A, B, G_0, G_1, H *Terme. Es gibt einen Term* F *derart, daß in* ZF *aus der Annahme*

$(*')$ $\Gamma \leq \infty$, $G_i : \Gamma \times A^n \times B \to B$ $(i = 0, 1)$, $H : A^n \to B$, *und* B *ist* $\bigcup$*-abgeschlossen*

folgt:

(a) $F : \Gamma \times A^n \longrightarrow B$

(b) $F(0, x_1, \dots, x_n) = H(x_1, \dots, x_n)$, *falls* $0 < \Gamma$,

(c) $F(s\alpha, x_1, \dots, x_n) = G_0(\alpha, x_1, \dots, x_n, F(\alpha, x_1, \dots, x_n))$, *falls* $s\alpha < \Gamma$,

(d) $F(\lambda, x_1, \dots, x_n) = G_1(\alpha, x_1, \dots, x_n, \bigcup_{\nu<\lambda} F(\nu, x_1, \dots, x_n))$, *falls* $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma$.

Außerdem gilt $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(G_0) \cup \mathrm{Fr}(G_1) \cup \mathrm{Fr}(H) \cup \mathrm{Fr}(A)$ *und* $\mathrm{ZF} \vdash (*') \longrightarrow F = F'$, *falls* F' *noch ein solcher Term ist wie* F.

Definition. $\langle \mathbf{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ sei definiert durch:

$$\mathbf{V}_0 = \emptyset; \quad \mathbf{V}_{s\alpha} = \mathfrak{P}(\mathbf{V}_\alpha); \quad \mathbf{V}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathbf{V}_\nu \ \text{ für } \mathrm{Lim}(\lambda).$$

$\langle \mathbf{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ heißt die *von Neumannsche Hierarchie*. $\mathbf{V}_\alpha$ wird in der Literatur auch oft mit R_α bezeichnet.

Satz 3.3.37
(a) $\mathbf{V}_\alpha$ *ist transitiv.*
(b) $\beta \leq \alpha \longrightarrow \mathbf{V}_\beta \subset \mathbf{V}_\alpha$
(c) $\beta < \alpha \longrightarrow \mathbf{V}_\beta \in \mathbf{V}_\alpha$
(d) $\mathrm{On} \cap \mathbf{V}_\alpha = \alpha$.

Beweis.
(a) Induktion auf α.
(b) $\bigwedge \beta \leq \alpha \quad \mathbf{V}_\beta \subset \mathbf{V}_\alpha$ durch Induktion auf α.
(c) $\beta < \alpha \to s\beta \leq \alpha \to \mathbf{V}_\beta \in \mathfrak{P}(\mathbf{V}_\beta) = \mathbf{V}_{s\beta} \subset \mathbf{V}_\alpha$
(d) Induktion auf α. QED

Bemerkung. Hier haben wir unseren ersten Gebrauch des Potenzmengenaxiomes gemacht!

Definition. $\mathbf{V}_\infty = \bigcup_\alpha \mathbf{V}_\alpha$.

Der eigentliche Inhalt des Fundierungsaxiomes kommt zum Ausdruck in:

Satz 3.3.38 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty$.

Beweis. Angenommen nicht. $x \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_\infty$ sei $\in$-minimal. Dann
(1) $x \subset \mathbf{V}_\infty$, $x \notin \mathbf{V}_\infty$. Für $z \in x$ setze: $F(z) = \min\{\alpha \mid z \in \mathbf{V}_\alpha\}$. Setze $\rho = \bigcup F''x$.
(2) $\rho \in \mathrm{On}$ (da $\rho \subset \mathrm{On}$ transitiv ist aber $\rho \neq \mathrm{On}$, da $\rho \in \mathbf{V}$).
(3) $x \subset \mathbf{V}\rho$, da $y \in x \to y \in \mathbf{V}_{F(y)} \subset \mathbf{V}_\rho$.
Folglich:
(4) $x \in \mathbf{V}_{s\rho} \subset \mathbf{V}_\infty$.
Widerspruch! QED

Definition. $\mathrm{rn}(x) = \min\{\alpha \mid x \subset \mathbf{V}_\alpha\}$.

Satz 3.3.39 $\mathrm{rn}(x) = \mathrm{lub}\{\mathrm{rn}(y) \mid y \in x\}$

Den Beweis hierzu überlassen wir dem Leser. Es sei aber bemerkt, daß hiermit eine alternative Definition von rn gegeben ist durch eine Rekursion der Form: $\mathrm{rn}(x) = G(x, \mathrm{rn}\restriction x)$. Diese Definition ist auch dann gerechtfertigt, wenn wir das Potenzmengenaxiom nicht voraussetzen. Wir könnten dann $\mathbf{V}_\alpha = \{x \mid \mathrm{rn}(x) < \alpha\}$ definieren und Sätze 3.3.37, 3.3.38 beweisen. Wir wären jedoch *nicht* in der Lage, zu beweisen, daß $\mathbf{V}_\alpha$ eine Menge ist, ohne das Potenzmengenaxiom zu benutzen.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Monotone Funktionen

Definition.
F ist *monoton* $=_{\mathrm{Df}}$ $F : \Gamma \to \mathrm{On} \wedge \Gamma \leq \infty \wedge \alpha < \beta < \Gamma \to F(\alpha) < F(\beta)$.

Lemma 3.3.40 *Sei* $\Gamma \leq \infty$. $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *ist monoton gdw.*
(a) $F(\alpha) < F(s\alpha)$ *für* $s\alpha < \Gamma$.
(b) $\sup_{\nu<\lambda} F(\nu) \leq F(\lambda)$ *für* $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma$.

Beweis. ($\rightarrow$) Trivial.
($\leftarrow$) Durch Induktion auf $\alpha : \alpha < \Gamma \rightarrow \bigwedge \nu < \alpha \quad F(\nu) < F(\alpha)$. QED

Lemma 3.3.41 $F : \Gamma \rightarrow \mathrm{On}$ *sei monoton. Dann* $\alpha \leq F(\alpha)$ *für* $\alpha < \Gamma$.

Beweis. Induktion auf α.

Definition. Sei $A \subset \mathrm{On}$. Der *Ordnungstyp von* A ($|A|$) wird definiert durch:

$$|A| = |\langle A, \in \cap A^2 \rangle|.$$

Definition. Sei $A \subset \mathrm{On}$. Die *monotone Aufzählung von* A ist derjenige Term

$$F : \langle |A|, \in \cap |A|^2 \rangle \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \langle A, \in \cap A^2 \rangle,$$

wobei $\langle V, F^{-1} \rangle$ der kanonische Kollaps von $\langle A, \in \cap A^2 \rangle$ ist.

Lemma 3.3.42 *Sei* F *die monotone Aufzählung von* A*. Dann* $F^{-1}(\alpha) = |A \cap \alpha|$ *für* $\alpha \in A$*.*

Beweis. Nach dem Zählsatz (Lemma 3.3.11).

Trivialerweise gilt:

Lemma 3.3.43 *F ist die monotone Aufzählung von A gdw.*
(a) $\bigvee \Gamma \leq \infty \quad F : \Gamma \stackrel{\text{auf}}{\longrightarrow} A$.
(b) *F ist monoton.*

Daher:

Lemma 3.3.44 *F ist monoton gdw. F die monotone Aufzählung von* $\mathrm{rng}(F)$ *ist.*

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Abgeschlossene Mengen

Definition. λ ist ein *Limespunkt von A* ($\mathrm{Lim}_A(\lambda)$) $=_{\mathrm{Df}}$

$$A \subset \mathrm{On} \wedge \lambda \neq 0 \wedge \bigwedge \xi < \lambda \bigvee \nu \in A \cap \lambda \quad \xi < \nu.$$

Also aus $A \subset B$ folgt: $\mathrm{Lim}_A(\lambda) \longrightarrow \mathrm{Lim}_B(\lambda)$ und $\mathrm{Lim}(\lambda) \longleftrightarrow \mathrm{Lim}_{\mathrm{On}}(\lambda)$.

Definition. Sei $A \subset \Gamma \leq \infty$. A ist *abgeschlossen in* Γ gdw.

$$\bigwedge \lambda < \Gamma (\mathrm{Lim}_A(\lambda) \longrightarrow \lambda \in A).$$

Lemma 3.3.45 *A ist abgeschlossen in Γ gdw.*

$$\bigwedge x \subset A\,(x \neq \emptyset \wedge \sup x < \Gamma \longrightarrow \sup x \in A).$$

Beweis. ($\leftarrow$) Trivial, da $\lambda = \sup A \cap \lambda$ für $\mathrm{Lim}_A(\lambda)$.
($\rightarrow$) *Fall* 1 $\max x$ existiert. Dann $\sup x = \max x \in A$.
Fall 2 Fall 1 versagt. Setze $\lambda = \sup X$. Eine einfache Überlegung zeigt: $\mathrm{Lim}_A(\lambda)$. Also $\lambda \in A$. QED

Lemma 3.3.46 *Sei A_i abgeschlossen in Γ für $i \in I$. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in Γ.*

Beweis.

$$\mathrm{Lim}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}(\lambda) \to \bigwedge i \in I\ \mathrm{Lim}_{A_i}(\lambda) \to \bigwedge i \in I\ \lambda \in A_i \to \lambda \in \bigcap_{i \in I} A_i \qquad \text{QED}$$

Lemma 3.3.47 *Seien A, B abgeschlossen in Γ. Dann ist $A \cup B$ abgeschlossen in Γ.*

Beweis. Sei $\mathrm{Lim}_{A\cup B}(\lambda)$. Es genügt zu zeigen:

Behauptung. $\mathrm{Lim}_A(\lambda) \vee \mathrm{Lim}_B(\lambda)$.

Angenommen nicht. Dann existieren $\nu_0, \nu_1 < \lambda$ mit: $A \cap \lambda \subset \nu_0$, $B \cap \lambda \subset \nu_1$. Setze: $\nu = \max(\nu_0, \nu_1)$. Dann $(A \cup B) \cap \lambda \subset \nu < \lambda$. Also $\neg\mathrm{Lim}_{A\cup B}(\lambda)$. Widerspruch!
QED(Lemma 3.3.47)

Lemma 3.3.48 *Sei $A \subset \Gamma \leq \infty$. Setze:*

$$A' = \{\lambda < \Gamma \mid \mathrm{Lim}_A(\lambda)\}, \quad A^* = A \cup A'.$$

A' und A^* sind in Γ abgeschlossen.

Beweis.

$$\mathrm{Lim}_{A'}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{Lim}_A(\lambda) \longrightarrow \lambda \in A'$$
$$\mathrm{Lim}_{A^*}(\lambda) \longrightarrow (\mathrm{Lim}_{A'}(\lambda) \vee \mathrm{Lim}_A(\lambda)) \longrightarrow \lambda \in A^*. \qquad \text{QED}$$

Bemerkung. A^* heißt die *Abschließung* von A in Γ. Falls A eine Menge ist, ist A^* die kleinste Obermenge, die abgeschlossen ist.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Normalfunktionen

Definition. F ist eine *Normalfunktion* gdw.

(a) $F : \Gamma \longrightarrow \mathrm{On}$, wobei $\Gamma \leq \infty$.

(b) $F(\alpha) < F(s\alpha)$ für $s\alpha < \Gamma$.

(c) $F(\lambda) = \sup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu)$ für $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma$.

Lemma 3.3.49 *Sei* $\Gamma \leq \infty$, $F : \Gamma \to \mathrm{On}$, $\Delta = \operatorname*{lub}_{\nu<\Gamma} F(\nu)$. *F ist eine Normalfunktion gdw. F monoton und* $\mathrm{rng}(F)$ *abgeschlossen in* Δ *ist.*

Beweis. Setze $A = \mathrm{rng}(F)$.
$(\to)$ F ist monoton nach Lemma 3.3.40. Sei nun $\mathrm{Lim}_A(\alpha)$, $\alpha < \Delta$.
Behauptung. $\alpha \in A$.
Setze $\lambda = |A \cap \alpha|$. Dann $\mathrm{Lim}(\lambda)$ und

$$F{\restriction}\lambda : \langle \lambda, \in \cap \lambda^2 \rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle A \cap \alpha, \in \cap (A \cap \alpha)^2 \rangle$$

$\lambda < \Gamma$, da $\mathrm{lub}\, F''\lambda = \alpha < \Delta$. Also $F(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} F(\nu) = \alpha \in A$. QED($\to$)
$(\leftarrow)$ Sei $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma$.
Behauptung. $F(\lambda) = \sup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu)$
Setze $\alpha = \sup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu)$. Dann $\mathrm{Lim}_A(\alpha)$. Folglich $\alpha \in A$ und $F(\lambda) = \min(A \setminus F''\lambda) = \alpha$.
QED(Lemma 3.3.49)

Lemma 3.3.50 *Sei* $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *eine Normalfunktion. Sei* $\lambda < \Gamma$, $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $x \subset \lambda$, $\lambda = \sup x$. *Dann* $F(\lambda) = \sup\limits_{\nu\in x} F(\nu)$.

Beweis. Setze: $z = F''\lambda$, $y = F''x$.
Behauptung. $\sup y = \sup z$.
$(\leq)$ $y \subset z$.
$(\geq)$ $\bigwedge \xi \in z \bigvee \nu \in y\ \ \xi \leq \nu$. QED(Lemma 3.3.50)

Lemma 3.3.51 *Sei* $\Gamma \leq \Delta \leq \infty$. $F : \Gamma \to \Delta$, $G : \Delta \to \mathrm{On}$ *seien Normalfunktionen. Dann ist GF normal.*

Beweis. (a) GF ist monoton, denn

$$\alpha < \beta < \Gamma \longrightarrow F(\alpha) < F(\beta) < \Delta \longrightarrow GF(\alpha) < GF(\beta).$$

(b) Sei $\lambda < \Gamma$, $\mathrm{Lim}(\lambda)$. Setze: $X = F''\lambda$, $\rho = \sup X$. Dann $\rho < \Delta$ und $\mathrm{Lim}(\rho)$. Folglich:

$$G(\rho) = \sup_{\xi\in X} G(\xi) = \sup_{\nu<\lambda} GF(\nu),$$

nach Lemma 3.3.50. QED

Definition. x ist ein *Fixpunkt von* $F =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Funk}(F) \wedge x \in \mathrm{dom}(F) \wedge F(x) = x$.

Lemma 3.3.52 $F : \Gamma \to \Delta = \mathrm{lub}(\mathrm{rng}(F))$ *sei eine Normalfunktion. Setze:* $B = \{\alpha < \Gamma \mid F(\alpha) = \alpha\}$. *B ist dann abgeschlossen in* Δ *(also auch in* Γ*).*

Beweis. Setze $A = \mathrm{rng}(F)$. A ist abgeschlossen in Δ. Sei $\lambda < \Delta$ ein Limespunkt von B. λ ist also ein Limespunkt von A. Also $\lambda \in A$. Sei $F(\gamma) = \lambda$. Dann $\gamma \leq \lambda$. Aber $\gamma = \lambda$, denn sonst existiert $\alpha \in \lambda \cap B$ mit $\gamma < \alpha = F(\alpha)$; also $\lambda = F(\gamma) < \alpha$.
Widerspruch! QED(Lemma 3.3.52)

Definition. F ist *stetig* gdw.

(a) $F : \Gamma \to \mathrm{On}$, wobei $\Gamma \leq \infty$.

(b) $\alpha \leq \beta < \Gamma \longrightarrow F(\alpha) \leq F(\beta)$.

(c) $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma \longrightarrow F(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} F(\nu)$.

Bemerkung. Die Bedingung (a) heißt *schwache Monotonie*.

Einige Lemmata über Normalfunktionen lassen sich auf stetige Funktionen übertragen:

Lemma 3.3.53 *Sei* $\Gamma \leq \infty$. $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *ist stetig gdw.*

$$X \subset \Gamma,\ \sup X < \Gamma \longrightarrow F(\sup X) = \sup F''X.$$

Beweis.
$(\rightarrow)$ Genau wie Lemma 3.3.50.
$(\leftarrow)$ Problematisch ist nur die schwache Monotonie. Sei $\alpha \leq \beta < \Gamma$. Dann $F(\beta) = F(\sup\{\alpha, \beta\}) = \sup\{F(\alpha), F(\beta)\}$. Also $F(\alpha) \leq F(\beta)$. QED(Lemma 3.3.53)

Korollar 3.3.54 *Sei* $\Gamma, \Delta \leq \infty$. $F : \Gamma \to \Delta$, $G : \Delta \to \mathrm{On}$ *seien stetig.*
Dann ist GF *stetig.*

Beweis. Genau wie Lemma 3.3.51.

Außerdem erwähnen wir:

Lemma 3.3.55 $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *sei stetig. Sei* $A = F''\Gamma$. A *ist abgeschlossen in* $\Delta = \mathrm{lub}A$.

Beweis. Sei $\lambda < \Delta$ ein Limespunkt von A. Für $\xi \in A \cap \lambda$ setze: $\eta_\xi = \min\{\eta \mid F(\eta) = \xi\}$. Dann $\xi < \xi' \to \eta_\xi < \eta_{\xi'}$ für $\xi, \xi' \in A$. Setze: $\eta = \sup\{\eta_\xi \mid \xi \in A \cap \lambda\}$. Dann ist $F(\eta) = \sup_{\xi<\lambda}(\eta_\xi) = \lambda$ nach Lemma 3.3.53. QED(Lemma 3.3.55)

Lemma 3.3.56 *Sei* $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *schwach monoton. Sei* $A = F''\Gamma$. *Dann ist*

$$F(\alpha) \leq \min(A \setminus F''\alpha) \quad \textit{für} \quad \alpha < \Gamma.$$

Beweis. Angenommen nicht. Sei $\gamma = \min(A \setminus F''\alpha)$, $\gamma = F(\beta)$. Dann $\beta \geq \alpha$, $F(\beta) < F(\alpha)$. Widerspruch! QED(Lemma 3.3.56)

Lemma 3.3.57 *Sei* $F : \Gamma \to \mathrm{On}$ *schwach monoton.* $G : \Delta \to \mathrm{On}$ *sei die monotone Aufzählung von* $A = F''\Gamma$. *Dann*

$$\nu < \Delta \longrightarrow (\nu \in \mathrm{dom}(F) \wedge F(\nu) \leq G(\nu)).$$

Beweis. Angenommen nicht. Sei ν das kleinste Gegenbeispiel. Dann ist $G(\nu) = \min(A \setminus G''\nu)$, da $G : \langle \Delta, \in\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle A, \in\rangle$. Aber $(A \setminus G''\nu) = (A \setminus \mathrm{lub}\, G''\nu) \subset A \setminus F''\nu \neq \emptyset$. Also $\nu \in \mathrm{dom}(F)$, da $\nu \subsetneqq \mathrm{dom}(F)$ und $\mathrm{dom}(F)$ transitiv ist. Also $G(\nu) \geq \min(A \setminus F''\nu) \geq F(\nu)$ nach Lemma 3.3.56. QED(Lemma 3.3.57)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Ordinale Arithmetik

Wir benutzen den Rekursionssatz für On (Satz 3.3.35) um die arithmetischen Operationen auf Ordnungszahlen zu definieren:

Definition.

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$\alpha + s\nu = s(\alpha + \nu)$$
$$\alpha + \lambda = \sup_{\nu<\lambda}(\alpha + \nu) \quad (\mathrm{Lim}(\lambda))$$

$$\alpha \cdot 0 = 0$$
$$\alpha \cdot s\nu = \alpha \cdot \nu + \alpha$$
$$\alpha \cdot \lambda = \sup_{\nu<\lambda}(\alpha \cdot \nu) \quad (\mathrm{Lim}(\lambda))$$

Für $\alpha > 0$ definieren wir:

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{s\nu} = \alpha^\nu \cdot \alpha$$
$$\alpha^\lambda = \sup_{\nu<\lambda} \alpha^\nu \quad (\mathrm{Lim}(\lambda))$$

Dann gilt:

(1) $\langle \alpha + \nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist eine Normalfunktion.

Beweis. $\alpha + \nu < \alpha + s\nu = s(\alpha + \nu)$.

(2) $0 + \nu = \nu$ (Beweis. Induktion auf ν)

(3) $\alpha + (\beta + \nu) = (\alpha + \beta) + \nu$ (Beweis. Induktion auf ν)

(4) $0 \cdot \nu = 0$ (Induktion auf ν)

(5) $\alpha > 0 \to \langle \alpha \cdot \nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist eine Normalfunktion

Beweis. $\alpha \cdot \nu < \alpha \cdot s\nu = \alpha \cdot \nu + \alpha$ nach (1)
(Folglich: $\langle \alpha \cdot \nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist stetig für alle $\alpha \in \mathrm{On}$)

(6) $\alpha \cdot (\beta + \nu) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \nu$ (Induktion auf ν)

(7) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \nu = \alpha \cdot (\beta \cdot \nu)$ (Induktion auf ν)

(8) $1^\nu = 1$ (Induktion auf ν)

(9) $\alpha > 1 \to \langle \alpha^\nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist eine Normalfunktion.

Beweis. (a) $\alpha > 0 \to \alpha^\nu > 0$ (Induktion auf ν)
(b) $\alpha^\nu < \alpha^{s\nu} = \alpha^\nu \cdot \alpha$ für $\alpha > 1$, nach (5). QED(9)
(Folglich: $\langle \alpha^\nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist stetig für alle $\alpha > 0$)

(10) $\alpha^{\beta+\nu} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\nu$ (Induktion auf ν)

(11) $\alpha^{\beta\cdot\nu} = (\alpha^\beta)^\nu$ (Induktion auf ν)

Bemerkungen. $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ sind *nicht* kommutativ, denn z.B. $1 + \omega = \omega$ aber $\omega + 1 > \omega$; $2 \cdot \omega = \omega$ aber $\omega \cdot 2 = \omega + \omega > \omega$. Die Funktion $\langle \nu + \alpha \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ ist *nicht* monoton, denn $1 + \omega = 2 + \omega$. Diese Funktion ist auch *nicht* stetig, denn $\sup_{n<\omega}(n + \omega) = \omega < \omega + \omega$.

Andererseits:

(12) $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \nu \leq \beta + \nu$ (Induktion auf ν)

(13) $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \nu \leq \beta \cdot \nu$ (Induktion auf ν)

(14) $0 < \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha^\nu \leq \beta^\nu$ (Induktion auf ν)

(15) Sei $\alpha \leq \beta$. Dann exisitert genau ein ν mit: $\alpha + \nu = \beta$.

Beweis. *Eindeutigkeit*: Nach (1).
Existenz: Setze $X = \{\xi \mid \alpha + \xi \leq \beta\}$.
(a) $X \subset s\beta$, da $\xi \in X \rightarrow \xi \leq \alpha + \xi \leq \beta < s\beta$.
(b) $\max X$ existiert.

Beweis. Angenommen nicht. Setze $\lambda = \sup X$. Dann $\mathrm{Lim}(\lambda)$, da $X \neq \emptyset$ und X kein Maximum hat. Nach Stetigkeit: $\alpha + \lambda = \sup\limits_{\xi \in X} \alpha + \xi \leq \beta$. Also $\lambda \in X$. Widerspruch! QED(b)

Setze $\nu = \max X$. Dann $\alpha + \nu = \beta$, da sonst $\alpha + s\nu \leq \beta$, also $\nu < s\nu \in X$. Widerspruch! QED(15)

Definition. Sei $\alpha \leq \beta$. $\beta - \alpha =$ dasjenige ν mit $\alpha + \nu = \beta$.

Der Beweis von (15) ist also genau wie der Beweis des entsprechenden Satzes für natürliche Zahlen – mit dem Zusatz, daß die Existenz von $\max X$ jetzt bewiesen werden muß. Wir erhalten auch die folgenden Sätze, indem wir die Beweise für natürliche Zahlen in entsprechender Weise abändern:

(16) Sei $1 \leq \alpha$, $0 \leq \beta$. Es gibt genau ein Paar $\langle \gamma, \nu \rangle$ mit: $\beta = \alpha\gamma + \nu$ und $\nu < \alpha$.

Dieser Satz besagt die Möglichkeit der *Division mit Rest*. Wir setzen:

Definition. Sei $1 \leq \alpha$. $[\beta/\alpha] = \gamma$, $(\beta/\alpha) = \nu$, wobei $\beta = \alpha \cdot \gamma + \nu$ und $\nu < \alpha$.

(17) Sei $2 \leq \alpha \leq \beta$. Es gibt genau ein Tripel $\langle \rho, \gamma, \nu \rangle$ mit: $\beta = \alpha^\rho \cdot \gamma + \nu$, $0 < \gamma < \alpha$, $\nu < \alpha^\rho$.

Bemerkung. Subtraktion und Division mit Rest verhalten sich etwas anders als bei den natürlichen Zahlen. Z.B. ist $\beta - \alpha = \beta$ möglich für $\alpha > 0$, denn $\omega - n = \omega$ für $n < \omega$. Für $0 < n < \omega$ gilt auch: $n + (\omega - n) = \omega$, jedoch $(\omega - n) + n = \omega + n > \omega$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Wir führen auch Operationen $\sum\limits_{\xi<\alpha} \gamma_\xi$, $\prod\limits_{\xi<\alpha} \gamma_\xi$ ein, wobei α auch unendlich sein kann.

Definition. Sei $f : \alpha \rightarrow \mathrm{On}$. Wir definieren Abbildungen $\sum_f : s\alpha \rightarrow \mathrm{On}$, $\prod_f : s\alpha \rightarrow \mathrm{On}$ durch:

$$\sum(0) = 0$$
$$\sum(s\nu) = \sum(\nu) + f(\nu) \qquad (s\nu \leq \alpha)$$
$$\sum(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} \sum(\nu) \qquad (\mathrm{Lim}(\lambda),\ \lambda \leq \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&\prod(0) = 0\\
&\prod(s\nu) = \prod(\nu)\cdot f(\nu) \qquad (s\nu \le \alpha)\\
&\prod(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda}\prod(\nu) \qquad (\mathrm{Lim}(\lambda),\ \lambda \le \alpha).
\end{aligned}$$

Für $f = \langle \gamma_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ setzen wir dann:

$$\sum_{\xi<\nu}\gamma_\xi = \sum\nolimits_f(\nu); \qquad \prod_{\xi<\nu}\gamma_\xi = \prod\nolimits_f(\nu).$$

Wir schreiben auch gelegentlich:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\beta\le\xi<\nu}\gamma_\xi &= \sum_{\xi<\nu-\beta}\gamma_{\beta+\xi}\\
\prod_{\beta\le\xi<\nu}\gamma_\xi &- \prod_{\xi<\nu-\beta}\gamma_{\beta+\xi}
\end{aligned}\right\} \quad \text{für } \ \beta\le\nu\le\alpha.$$

Durch Induktion auf ν folgt:

(18) $$\sum_{\xi<\alpha+\nu}\gamma_\xi = \sum_{\xi<\alpha}\gamma_\xi + \sum_{\alpha\le\xi<\nu}\gamma_\xi$$

(19) $$\prod_{\xi<\alpha+\nu}\gamma_\xi = \prod_{\xi<\alpha}\gamma_\xi \cdot \prod_{\alpha\le\xi<\nu}\gamma_\xi$$

(20) $$\alpha\cdot\sum_{\xi<\nu}\gamma_\xi = \sum_{\xi<\nu}\alpha\cdot\gamma_\xi$$

(21) $$\alpha^{\sum_{\xi<\nu}\gamma_\xi} = \prod_{\xi<\nu}\alpha^{\gamma_\xi}.$$

Für $n<\omega$ benutzen wir die Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\gamma_0+\cdots+\gamma_{n-1} &= \sum_{i<n}\gamma_i\\
\gamma\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1} &= \prod_{i<n}\gamma_i.
\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Die Cantorsche Normalform

(22) Sei $\alpha\ge 2$. Jedes β hat eine eindeutige Darstellung: $\beta = \sum\limits_{i<n}\alpha^{\tau_i}\gamma_i$ mit $0<\gamma_i<\alpha$ und $\alpha^{\tau_i} > \sum\limits_{i<j<n}\alpha^{\tau_j}\gamma_j$.

Beweis. *Existenz.* $\langle \beta_i \mid i < \omega \rangle$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta \\ \beta_{i+1} &= \begin{cases} \text{dasjenige } \delta \text{ mit: } \beta_i = \alpha^\tau \cdot \gamma + \delta, & \\ \text{wobei } 0 < \gamma < \alpha,\ \delta < \alpha^\tau & \text{falls } \beta_i > 0, \\ 0 & \text{falls } \beta_i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann $\beta_i \neq 0 \rightarrow \beta_i > \beta_{i+1}$. Also $\bigvee i \;\; \beta_i = 0$. Sei $n = \min\{i \mid \beta_i = 0\}$. Für $i < n$ sei $\langle \tau_i, \gamma_i \rangle =$ dasjenige Paar mit $\beta_i = \alpha^{\tau_i}\gamma_i + \beta_{i+1}$, $0 < \gamma_i < \alpha$. Durch Induktion auf $n - i$ folgt:

$$\beta_i = \sum_{i \leq j < n} \alpha^{\tau_i}\gamma_i \qquad \text{für } \ i \leq n.$$

Für $i = 0$ haben wir hiermit die gewünschte Darstellung. QED(Existenz)
Eindeutigkeit. Sei $\beta = \sum\limits_{i<m} \alpha^{\tau_i'}\gamma_i'$ eine zweite solche Darstellung. Setze: $\beta_i' = \sum\limits_{i \leq j < m} \alpha^{\tau_i'}\gamma_i'$ $(i < m)$; $\beta_i' = 0$ $(i \geq m)$. Durch Induktion auf i folgt: $\beta_i = \beta_i'$. Also $m = n$ und $\tau_i = \tau_i'$, $\gamma_i = \gamma_i'$ für $i < n$. QED(22)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Definition. F ist eine *partielle Funktion auf* A gdw. F eine Funktion ist und $\mathrm{dom}(F) \subset A$.

Der Wertverlaufsrekursionssatz (Satz 3.3.4), mit dem wir dieses Kapitel angefangen haben, ist selber nur Spezialfall eines allgemeineren Satzes, den wir jetzt formulieren.

Satz 3.3.58 *(Wertverlaufsrekurion für partielle Funktionen)*
Seien A, G und R Terme. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie ZF *aus der Annahme*

$(*)$ $R \subset A^2$ *stark fundiert,* $\mathrm{Funk}(G)$, $\mathrm{dom}(G) \subset A \times \mathbf{V}$

folgt:

$$\mathrm{Funk}(F) \quad \wedge \quad \bigwedge x \; F(x) = \begin{cases} G(x, F \restriction R''\{x\}) & \textit{falls } F(z) \textit{ für alle } zRx \textit{ definiert ist} \\ & \textit{und } \langle x, F \restriction R''\{x\} \rangle \in \mathrm{dom}(G); \\ \textit{undefiniert} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Falls F und F' zwei solche Terme sind, so gilt $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow F = F'$.
Außerdem gilt: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(G) \cup \mathrm{Fr}(R)$.

Bemerkung. Hieraus folgt: $R''\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{dom}(F)$.

Beweis von Satz 3.3.58
Existenz. Wir greifen auf den früheren Wertverlaufsrekursionssatz zurück.
Für $\langle x, u \rangle \in A \times \mathbf{V}$ setze:

$$G^*(x, u) = \begin{cases} G(x, u) & \text{falls definiert,} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $F^* : A \to \mathbf{V}$ der kanonische Term bestimmt durch:

$$F^*(x) = G^*(x, F^* \upharpoonright R''\{x\}).$$

Sei $R_*(u) = u \cup R''u \cup \cdots \cup R^n{}''u \cup \cdots$ wie früher definiert. Setze:

$$D = \{x \in A \mid \bigwedge y \in R_*(\{x\}) \, \langle y, F^* \upharpoonright R''\{y\}\rangle \in \mathrm{dom}(G)\}.$$

$F = F^* \upharpoonright D$ erfüllt dann die Bedingung. QED(Existenz)

Eindeutigkeit. F, F' seien zwei solche Funktionen. Setze:

$$Z = \{x \in A \mid (x \in \mathrm{dom}(F) \leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(F')) \wedge (x \in \mathrm{dom}(F) \to F(x) = F'(x))\}.$$

Genau wie im Beweis von Satz 3.3.4 folgt: $Z = A$. QED(Satz 3.3.58)

Wie früher erhalten wir hieraus einen speziellen Rekursionssatz für Ordnungszahlen:

Satz 3.3.59 *Seien* Γ, a, G_0, G_1 *Terme. Es gibt einen Term* F *derart, daß in* ZF *aus der Annahme*

(∗) $\Gamma \leq \infty$, $a \in \mathbf{V}$, G_0, G_1 *sind partielle Funktionen auf* $\Gamma \times \mathbf{V}$

folgt:

(a) $F(0) = a$ *falls* $0 < \Gamma$.

(b) $$F(s\nu) = \begin{cases} G_0(\nu, F(\nu)) & \textit{falls } \nu \in \mathrm{dom}(F) \textit{ und } \langle \nu, F(\nu)\rangle \in \mathrm{dom}(G_0), \\ & \textit{sonst undefiniert} \end{cases}$$
für $\nu < \Gamma$.

(c) $$F(\lambda) = \begin{cases} G_1(\lambda, \bigcup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu)) & \textit{falls } \lambda \subset \mathrm{dom}(F) \textit{ und } \langle \lambda, \bigcup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu)\rangle \in \mathrm{dom}(G_1), \\ & \textit{sonst undefiniert} \end{cases}$$
für $\mathrm{Lim}(\lambda)$, $\lambda < \Gamma$.

Bemerkung. Sei $D = \mathrm{dom}(F)$. Es folgt: D ist transitiv und $D \subset \Gamma$. Also ist $D \leq \Gamma$.

3.4 Kardinalzahlen

Die *Gleichmächtigkeitsbeziehung* $\sim$ hatten wir bereits definiert mit:

$$u \sim v \longleftrightarrow \bigvee f \;\; f : u \leftrightarrow v.$$

Die *Kleinergleichmächtigkeitsbeziehung* definieren wir durch:

Definition. $u \prec v \longleftrightarrow \bigvee f \;\; f : u \xrightarrow{1-1} v.$

Lemma 3.4.1

(a) $u \sim v \longrightarrow u \prec v$

(b) $u \prec v \prec w \longrightarrow u \prec w.$

Beweis trivial.

Lemma 3.4.2 $u \prec \mathfrak{P}(u) \wedge u \not\sim \mathfrak{P}(u)$

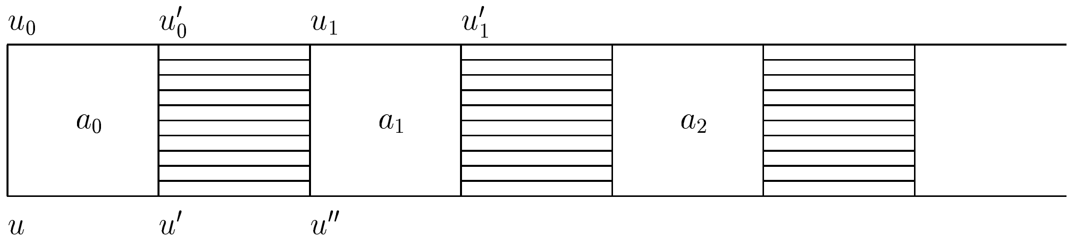
Beweis. $u \prec \mathfrak{P}(u)$, da $f : u \xrightarrow{1-1} \mathfrak{P}(u)$, wobei $f(x) = \{x\}$.
Behauptung. $u \not\sim \mathfrak{P}(u)$.
Angenommen nicht. Sei $f : u \leftrightarrow \mathfrak{P}(u)$.
Setze: $x = \{y \in u \mid y \notin f(y)\}$. Dann $x \in \mathfrak{P}(u) = f''u$. Sei $x = f(y)$. Dann
$y \in f(y) \leftrightarrow y \notin f(y)$. Widerspruch! QED(Lemma 3.4.2)

Satz 3.4.3 (Satz von Bernstein)
$(u \prec v \wedge v \prec u) \longrightarrow u \sim v$

Beweis. Sei $f : u \xrightarrow{1-1} v$, $g : v \xrightarrow{1-1} u$.
Setze: $u' = g''v$, $u'' = gf''u$. Setze $h = gf$. Dann:

$$u'' \subset u' \subset u \qquad \text{und} \qquad h : u \longleftrightarrow u''.$$

Es genügt zu zeigen:
Behauptung. $u \sim u'$, denn für $k : u \leftrightarrow u'$ ist $g^{-1}k : u \leftrightarrow v$.



Setze: $u_0 = u$, $u_{i+1} = h''u_i$. Dann $u_1 = u''$. Setze: $u'_0 = u'$; $u'_{i+1} = h''u'_i$.

(1) $u_{i+1} \subset u'_i \subset u_i \quad (i < \omega)$

Beweis. Induktion auf i.
Setze: $a_i = u_i \setminus u'_i$. $a = \bigcup_i a_i$.

(2) $\quad a_i \cap a_j = \emptyset \quad (i < j)$,

denn $a_j \subset u_j \subset u_i'$, $a_i = u_i \setminus u_i'$.

(3) $\quad h''a_i = a_{i+1}$

Beweis. $h''(u_i \setminus u_i') = h''u_i \setminus h''u_i' = u_{i+1} \setminus u_{i+1}'$

(4) $\quad u' \cap a = \bigcup_i a_{i+1} = h''a$

Beweis. $\bigcup_i a_{i+1} \subset u'$, $u' \cap a_0 = \emptyset$; also $u' \cap a = \bigcup_i a_{i+1}$. Aber $h''a = \bigcup_i h''a_i = \bigcup_i a_{i+1}$. QED(4)

(5) $\quad u \setminus a = u' \setminus a$.

Beweis. $u \setminus a = (u \setminus a_0) \setminus \bigcup_i a_{i+1} = u' \setminus (u' \cap a) = u' \setminus a$ QED(5)

Setze: $k = h{\restriction}a \cup \mathrm{id}{\restriction}(u \setminus a)$.
Dann $k : u \to u'$; k ist injektiv nach (5); $k''u = h''a \cup (u \setminus a) = (u' \cap a) \cup (u' \setminus a) = u'$.
Also: $k : u \leftrightarrow u'$. QED(Satz 3.4.3)

Es fragt sich jetzt, ob je zwei Mengen u, v in der Mächtigkeit vergleichbar sind – d.h. ist $u \prec v \vee v \prec u$. Es stellt sich heraus, daß wir dies nicht ohne ein Zusatzaxiom beweisen können. Wir betrachten zunächst drei Aussagen:

Vergleichbarkeitsprinzip

(VP) $\quad \bigwedge u\, v \;\; (u \prec v \vee v \prec u)$

Aufzählungsprinzip

(AP) $\quad \bigwedge u \bigvee \alpha \quad \alpha \sim u$

Wohlordnungsprinzip

(WP) $\quad \bigwedge u \bigvee r \;\; \langle u, r\rangle$ ist ein WS.

Satz 3.4.4 *VP, AP, WP sind äquivalent.*

Beweis.
VP $\to$ WP: Setze:

$$u^* = \{\langle v, r\rangle \mid v \subset u \wedge \langle v, r\rangle \text{ ist ein WS}\}.$$

Dann $u^* \in \mathbf{V}$, da $u^* \subset \mathfrak{P}(u) \times \mathfrak{P}(u^2)$. $F : u^* \to \mathrm{On}$ sei definiert durch: $F(\langle v, r\rangle) = |\langle v, r\rangle|$. Sei $F''u^* \subset \alpha$. Dann $\alpha \not\prec u$, denn für $f : \alpha \xrightarrow{1-1} u$ hätten wir $F(\langle v, r\rangle) = \alpha$, wobei $v = f''\alpha$, $r = \{\langle x, y\rangle \in v^2 \mid f^{-1}(x) < f^{-1}(y)\}$. Also ist $u \prec \alpha$. Sei $f : u \xrightarrow{1-1} \alpha$. Setze $r = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) < f(y)\}$. Dann ist $\langle u, r\rangle$ ein WS. QED(VP $\to$ WP)
WP $\to$ AP: Sei $\alpha = |\langle u, r\rangle|$. Dann $\alpha \sim u$.
AP $\to$ VP: Sei $f : u \leftrightarrow \alpha$, $g : v \leftrightarrow \beta$. Dann $\alpha \le \beta \vee \beta \le \alpha$, wobei:

$$\alpha \le \beta \longrightarrow g^{-1}f : u \xrightarrow{1-1} v$$
$$\beta \le \alpha \longrightarrow f^{-1}g : v \xrightarrow{1-1} u.$$

Also $u \prec v \vee v \prec u$. QED(Satz 3.4.4)

Die obigen Prinzipien folgen aus einem sehr natürlichen Axiom, das zunächst etwas schwächer anmutet.

Definition. f ist eine *Auswahlfunktion* für u gdw. $f : u \to \mathbf{V} \wedge \bigwedge x \in u \;\; f(x) \in x$.

Wir setzen nun das *Auswahlaxiom* (AC) voraus:

A8 Jede Menge von nichtleeren Mengen besitzt eine Auswahlfunktion.

Definition. Gegeben sei eine Familie $\langle u_x \mid x \in v \rangle$, wobei $v \in \mathbf{V}$.

$$\bigtimes_{x \in v} u_x =_{\mathrm{Df}} \{ f \mid f : v \to \mathbf{V} \;\wedge\; \bigwedge x \in v \;\; f(x) \in u_x \}.$$

Jedes $f \in \bigtimes_{x \in v} u_x$ heißt *Auswahlfunktion* für $\langle u_x \mid x \in v \rangle$.

Der *Produktsatz* (PS) lautet:

Lemma 3.4.5 $(\bigwedge x \in v \;\; u_x \neq \emptyset) \longrightarrow \bigtimes_{x \in v} u_x \neq \emptyset$.

Beweis. Sei g eine Auswahlfunktion für $\{u_x \mid x \in v\}$. $f(x) = g(u_x)$ ist dann eine Auswahlfunktion für $\langle u_x \mid x \in v \rangle$. QED

Definition. f ist eine *Uniformierung* von $r =_{\mathrm{Df}}$
$\mathrm{Funk}(f) \wedge r \subset \mathbf{V}^2 \wedge r \in \mathbf{V} \wedge \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(r) \wedge \bigwedge x \in \mathrm{dom}(r) \;\; f(x)\, r\, x$.

Der *Uniformierungssatz* (US) lautet:

Lemma 3.4.6 *Jede Relation $r \in \mathbf{V}$ besitzt eine Uniformierung.*

Beweis. Sei $f \in \bigtimes_{x \in \mathrm{dom}(r)} r''\{x\}$. QED

Korollar 3.4.7 *Sei $f : u \xrightarrow{\text{auf}} v$. Dann $v \prec u$.*

Beweis. g sei eine Uniformierung von f^{-1}. Dann $g : v \xrightarrow{1-1} u$. QED

Wir zeigen jetzt, daß das Aufzählungsprinzip (AP) aus AC folgt:

Satz 3.4.8 $\bigvee \alpha \;\; u \sim \alpha$.

Beweis. $R \subset u \times \mathfrak{P}(u)$ sei definiert durch:

$$x\, R\, v \longleftrightarrow x \in u \setminus v.$$

Sei G eine Uniformierung von R. Wir definieren eine partielle Abbildung von On in u durch:

$$F(\alpha) = \begin{cases} G(F''\alpha) & \text{falls definiert,} \\ & \text{sonst undefiniert.} \end{cases}$$

Sei $\Gamma = \mathrm{dom}(F)$. Dann $\Gamma \leq \infty$. Für $\alpha < \Gamma$ gilt: $F(\alpha) \in u \setminus F''\alpha$; daher: $\alpha < \beta < \Gamma \longrightarrow F(\alpha) \neq F(\beta)$. Folglich $\Gamma < \infty$, da sonst:

$$\mathrm{On} = F^{-1}{}''u \in \mathbf{V}.$$

$G(F''\Gamma)$ ist also undefiniert. Also $u \setminus F''\Gamma = \emptyset$ – d.h. $F : \Gamma \leftrightarrow u$. QED(Satz 3.4.8)

Definition. k heiße *Kette* gdw. $\bigwedge u, v \in k \ (u \subset v \vee v \subset u)$

Definition. A heiße *kettenabgeschlosssen* gdw.

$$\bigwedge k \subset A \ (k \text{ ist eine Kette } \longrightarrow \bigcup k \in A).$$

Definition. $u \in A$ heiße *maximal* gdw. $\bigwedge v \supsetneqq u \ \ v \notin A$.

Das *Zornsche Lemma* lautet:

Satz 3.4.9 *Jede kettenabgeschlossene Menge besitzt ein maximales Element.*

Beweis. A sei kettenabgeschlossen. Dann $\emptyset = \bigcup \emptyset \in A$. $S = \langle A, R \rangle$ sei ein WS.
Wir definieren eine partielle Abbildung von On in A durch:

$$\begin{aligned} F(0) &= \emptyset \\ F(s\nu) &= \begin{cases} \text{das } S\text{-kleinste } u \supsetneqq F(\nu) \text{ mit } u \in A & \text{falls } F(\nu) \text{ nicht maximal in } A, \\ & \text{sonst undefiniert} \end{cases} \\ F(\lambda) &= \begin{cases} \bigcup\limits_{\nu<\lambda} F(\nu) & \text{falls } \{F(\nu) \mid \nu < \lambda\} \text{ eine Kette ist,} \\ & \text{sonst undefiniert.} \end{cases} \end{aligned}$$

Setze: $\Gamma = \mathrm{dom}(F)$. Dann $\Gamma \leq \infty$. Durch Induktion auf ν folgt:

(1) $\bigwedge \xi < \nu \ \ F(\xi) \subsetneqq F(\nu)$ für $\nu < \Gamma$.

F ist also injektiv. Folglich $\Gamma < \infty$, da sonst $\mathrm{On} = F^{-1}{}''A \in \mathbf{V}$. $\Gamma \neq 0$, da $A \neq \emptyset$.

(2) $\neg\mathrm{Lim}(\Gamma)$,

denn sonst ist $F''\Gamma$ eine Kette und $F(\Gamma)$ ist definiert. Sei $\Gamma = s\alpha$. $F(\alpha)$ ist dann maximal in A. QED(Satz 3.4.9)

Bemerkung. Aus A1 – A7 haben wir hergeleitet:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{AC} \arrow[r] & \mathrm{PS} \arrow[r] & \mathrm{US} \arrow[r] & \mathrm{AP} \arrow[rr, <->] \arrow[dr, <->] & & \mathrm{WP} \arrow[r] & \mathrm{ZL}. \\ & & & & \mathrm{VP} \arrow[ur, <->] & & \end{tikzcd}$$

Wir schließen die Kette indem wir zeigen:

Satz 3.4.10 *Aus* A1 – A7 *folgt:* ZL $\longrightarrow$ AC

Beweis. Sei A eine Menge von nichtleeren Mengen. Setze:

$$A^* = \{f \mid f \text{ ist eine Auswahlfunktion auf } \mathrm{dom}(f) \subset A\}.$$

Man sieht leicht, daß A^* kettenabgeschlossen ist. Sei $f \in A^*$ maximal.
Behauptung. $\mathrm{dom}(f) = A$.
Angenommen nicht. Sei $a \in A \setminus \mathrm{dom}(f)$. Sei $x \in a$. Setze $g = f \cup \{\langle x, a\rangle\}$. Dann $g \in A^*$, $g \supsetneqq f$. Widerspruch! QED(Satz 3.4.10)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Kardinalzahlen

Die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* von u wird definiert durch:

Definition. $\overline{\overline{u}} = \mathrm{card}(u) =_{\mathrm{Df}} \min\{\alpha \mid \alpha \sim u\}$.

Die Schreibweise $|u|$ wird in der Literatur auch häufig für $\overline{\overline{u}}$ verwendet. Dies vermeiden wir jedoch, da wir die Betragstriche $|\ |$ für so viele andere Zwecke nützlich finden.

Lemma 3.4.11
(a) $u \sim v \longleftrightarrow \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{v}}$
(b) $\alpha = \overline{\overline{u}} \longrightarrow \alpha = \overline{\overline{\alpha}}$
(c) $u \prec v \longleftrightarrow \overline{\overline{u}} \leq \overline{\overline{v}}$
(d) $\nu \leq \omega \longrightarrow \nu = \overline{\overline{\nu}}$

Beweis.
(a) $u \sim v \longrightarrow \{\alpha \mid \alpha \sim u\} = \{\alpha \mid \alpha \sim v\} \longrightarrow \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{v}}$
$\overline{\overline{u}} = \overline{\overline{v}} \longrightarrow u \sim \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{v}} \sim v.$
(b) $\alpha = \overline{\overline{u}} \longrightarrow \alpha \sim u \longrightarrow \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{u}} = \alpha$
(c) $\overline{\overline{u}} \leq \overline{\overline{v}} \longrightarrow u \sim \overline{\overline{u}} \subset \overline{\overline{v}} \sim v \longrightarrow u \prec v$
$\overline{\overline{u}} \not\leq \overline{\overline{v}} \longrightarrow \overline{\overline{v}} < \overline{\overline{u}} \longrightarrow (v \prec u \wedge v \not\sim u) \longrightarrow u \not\prec v$
(d) $n = \overline{\overline{n}}$ für $n < \omega$ ist schon bewiesen.
Daher $\omega \geq \overline{\overline{\omega}} \geq \overline{\overline{n}} = n$ für $n < \omega$. Also $\omega = \overline{\overline{\omega}}$. QED

Die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen definieren wir durch:

Definition. $\mathrm{Card} = \{\alpha \geq \omega \mid \alpha = \overline{\overline{\alpha}}\}$.

Bemerkung. Für viele $\beta > \omega$ gilt *nicht* $\beta = \overline{\overline{\beta}}$; z.B. $\overline{\overline{\omega + 1}} = \overline{\overline{\omega + \omega}} = \overline{\overline{\omega \cdot \omega}} = \omega$.

Lemma 3.4.12 Card *ist unbeschränkt und abgeschlossen in* On

Beweis.
Unbeschränktheit: $\omega \leq \alpha \longrightarrow \alpha < \overline{\overline{\mathfrak{P}(\alpha)}} \in \mathrm{Card}$
Abgeschlossenheit: Sei λ ein Limespunkt von Card. Dann:

$$\alpha \in \mathrm{Card} \cap \lambda \longrightarrow \lambda \geq \overline{\overline{\lambda}} \geq \overline{\overline{\alpha}} = \alpha.$$

Also $\lambda \geq \overline{\overline{\lambda}} \geq \sup(\mathrm{Card} \cap \lambda) = \lambda$. QED

Definition. $\langle \omega_\nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle =$ die monotone Aufzählung von Card.

Definition. $\alpha^+ = \min\{\beta \in \mathrm{Card} \mid \alpha < \beta\}$ für $\alpha \in \mathrm{Card}$.

Da $\langle \omega_\nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ (nach Lemma 3.4.12) eine Normalfunktion ist, folgt:

$$\omega_0 = \omega; \quad \omega_{\nu+1} = \omega_\nu^+; \quad \omega_\lambda = \sup_{\nu<\lambda} \omega_\nu \quad \text{für } \mathrm{Lim}(\lambda).$$

Damit haben wir eine alternative Definition von $\langle \omega_\nu \mid \nu \in \mathrm{On} \rangle$ durch Rekursion auf On.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Kardinale Arithmetik

Wir führen jetzt arithmetische Operationen $+$, $\cdot$, α^β auf Kardinalzahlen ein. Diese Operationen ergeben sich inhaltlich aus der Struktur der Kardinalzahlen und unterliegen anderen Gesetzen als die Ordinalzahloperationen. Bei den Kardinalzahlen haben wir z.B. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, während bei den Ordinalzahlen gilt: $1 + \omega = \omega < \omega + 1$. Bei den Kardinalzahlen ist wiederum: $\omega + 1 = \omega$.

Da wir die Kardinalzahlen mit gewissen Ordinalzahlen identifiziert haben, sollten wir strenggenommen die zwei Sorten von Operationen unterscheiden, indem wir beispielsweise schreiben: $(\alpha+\beta)_{\mathrm{Ord}}$, $(\alpha+\beta)_{\mathrm{Kard}}$, $(\alpha^\beta)_{\mathrm{Ord}}$ usw. Im allgemeinen werden wir jedoch darauf verzichten, denn es ist meist aus dem Zusammenhang erkennbar, welche Operationen gemeint sind.

Die kardinalen und ordinalen Operationen decken sich bei den *natürlichen* Zahlen: $(n+m)_{\mathrm{Ord}} = (n+m)_{\mathrm{Kard}}$ usw.

Definition. α, β seien Kardinalzahlen.
$\alpha + \beta = \overline{\overline{\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}}}$; $\quad \alpha \cdot \beta = \overline{\overline{\alpha \times \beta}}$
Es gilt:

(1) $\quad u \cap v = \emptyset \longrightarrow \overline{\overline{u \cup v}} = \overline{\overline{u}} + \overline{\overline{v}}$

Beweis. Sei $\alpha = \overline{\overline{u}}$, $\beta = \overline{\overline{v}}$. Sei $f : u \leftrightarrow \alpha \times \{0\}$, $g : v \leftrightarrow \beta \times \{0\}$. Dann $(f \cup g) : u \cup v \leftrightarrow (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$. Also: $u \cup v \sim (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) \sim \alpha + \beta$. QED

(1.1) $\quad (m+n)_{\mathrm{Ord}} = (m+n)_{\mathrm{Kard}}$

Beweis. Nach (1) und Lemma 3.2.29.

(1.2) $(m \cdot n)_{\mathrm{Ord}} = (m \cdot n)_{\mathrm{Kard}}$

Beweis. Nach Lemma 3.2.29.

(2) $\overline{\overline{u \times v}} = \overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{v}}$

Beweis. Sei $\alpha = \overline{\overline{u}}$, $\beta = \overline{\overline{v}}$. Dann $\alpha \cdot \beta \sim \alpha \times \beta \sim u \times v$. QED(2)

(3) $\alpha + 0 = \alpha$

Beweis. $\alpha + 0 = \overline{\overline{\alpha \cup \emptyset}} = \overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ nach (1).

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Beweis. Sei $\alpha \sim u$, $\beta \sim v$, $u \cap v = \emptyset$. Dann $\alpha + \beta \sim u \cup v = v \cup u \sim \beta + \alpha$. QED(4)

(5) $\alpha \leq \beta \longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

Beweis. $\alpha + \gamma \sim (\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\}) \subset (\beta \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\}) \sim \beta + \gamma$

(6) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Beweis. Sei $\alpha \sim u$, $\beta \sim v$, $\gamma \sim w$, wobei u, v, w disjunkt sind. Dann
$\alpha + (\beta + \gamma) = \overline{\overline{u \cup v \cup w}} = (\alpha + \beta) + \gamma$. QED(6)

(7) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$

Beweis.
$\alpha \cdot 0 \sim \alpha \times 0 = \emptyset$
$\alpha \cdot 1 \sim \alpha \times \{0\} \sim \alpha$
$\alpha \cdot 2 \sim \alpha \times \{0,1\} = (\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\}) \sim \alpha + \alpha$. QED(7)

(8) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Beweis. $\alpha \cdot \beta \sim \alpha \times \beta \sim \beta \times \alpha \sim \beta \cdot \alpha$.

(9) $\alpha \leq \beta \longrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

Beweis. $\alpha \cdot \gamma \sim \alpha \times \gamma \subset \beta \times \gamma \sim \beta \cdot \gamma$

(9.1) $\beta \geq 1 \longrightarrow \gamma \leq \beta \cdot \gamma$

Beweis. $\gamma = 1 \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

(10) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

Beweis. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim \alpha \times (\beta \times \gamma) \sim (\alpha \times \beta) \times \gamma \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

Wir zeigen nun, daß die Operationen $+$, $\cdot$ sich im Unendlichen trivialisieren – d.h. ist β unendlich, so:

$$\alpha + \beta = \max(\alpha, \beta); \quad \alpha > 0 \longrightarrow \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta).$$

Dies erhalten wir als Folgerung aus dem Satz:

Satz 3.4.13 $\alpha \geq \omega \longrightarrow \alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Beweis. $<_* \subset \mathrm{On}^2$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} \langle\alpha,\beta\rangle <_* \langle\gamma,\delta\rangle \quad \longleftrightarrow \quad & (\max(\alpha,\beta) < \max(\gamma,\delta)) \vee \\ & \vee(\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \wedge \alpha < \gamma) \vee \\ & \vee(\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten $\langle\alpha,\beta\rangle <_* \langle\gamma,\delta\rangle$ genau dann, wenn $\langle\max(\alpha,\beta),\alpha,\beta\rangle$ kleiner als $\langle\max(\gamma,\delta),\gamma,\delta\rangle$ ist in der lexikographischen Ordnung von On^3.

Lemma 3.4.14 *$\langle\mathrm{On}^2,<_*\rangle$ ist ein WS.*

Beweis. Nach Lemma 3.3.8 genügt es zu zeigen:
(a) $z <_* y \vee y <_* z \vee z = y$
(b) $<_*$ ist fundiert.
Beweis von (a): Sei $z = \langle\alpha,\beta\rangle$, $y = \langle\gamma,\delta\rangle$. Sei $z \not<_* y$, $y \not<_* z$. Dann $\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta)$. Folglich $\alpha = \gamma$. Folglich $\beta = \delta$. Also $z = y$. QED(a)
Beweis von (b): Sei $X \subset \mathrm{On}^2$, $X \neq \emptyset$. Setze:

$$\begin{aligned} \gamma &= \min\{\max(\alpha,\beta) \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in X\} \\ \alpha &= \min\{\alpha \mid \bigvee\beta \ \ \max(\alpha,\beta) = \gamma \wedge \langle\alpha,\beta\rangle \in X\} \\ \beta &= \min\{\beta \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in X\}. \end{aligned}$$

$\langle\alpha,\beta\rangle$ ist dann $<_*$-minimal in X. QED(Lemma 3.4.14)

Korollar 3.4.15 *$\langle\mathrm{On}^2,<_*\rangle$ ist ein SWS.*

Beweis. Sei $\gamma = \max(\alpha,\beta)+1$. Dann $<_*'' \{\langle\alpha,\beta\rangle\} \subset \gamma^2 \in \mathbf{V}$. QED(Korollar 3.4.15)

Korollar 3.4.16 $|\langle\mathrm{On}^2,<_*\rangle| = \mathrm{On}$

Beweis. Trivial.

Sei nun $F : \langle\mathrm{On}^2,<_*\rangle \overset{\sim}{\leftrightarrow} \langle\mathrm{On},<\rangle$. Wir wissen: $\alpha \leq \alpha\cdot\alpha$ für $\alpha \in \mathrm{Card}$.
Es genügt zu zeigen: $\alpha\cdot\alpha \leq \alpha$. Dies folgt aus:
Behauptung. $\alpha \in \mathrm{Card} \longrightarrow F''\alpha^2 \subset \alpha$.
Beweis. Durch Induktion auf ν zeigen wir: $F''(\omega_\nu \times \omega_\nu) \subset \omega_\nu$.
Fall 1: $\nu = 0$.
Sei $u = \langle n,m\rangle \in \omega^2$. Setze $p = \max(n,m)+1$. Dann $\{z \mid z <_* u\} \subset p^2$. Aber $F(u) = \{F(z) \mid z <_* u\}$. Also $\overline{\overline{F(u)}} \leq \overline{\overline{p^2}} = p\cdot p < \omega$. Folglich $F(u) < \omega$, da sonst $\overline{\overline{F(u)}} < \omega \leq F(u)$, daher $\overline{\overline{\omega}} = \overline{\overline{F(u)}} < \omega$. Widerspruch!
Fall 2: $\nu = \tau + 1$.
Sei $u = \langle\alpha,\beta\rangle \in \omega_\nu^2$. Setze $\gamma = \max(\alpha,\beta)+1$, Dann $\{z \mid z <_* u\} \subset \gamma^2$. Daher: $\overline{\overline{F(u)}} \leq \overline{\overline{\gamma^2}} \leq \overline{\overline{\gamma}}\cdot\overline{\overline{\gamma}} \leq \omega_\tau\cdot\omega_\tau = \omega_\tau < \omega_\nu$ nach der Induktionshypothese. Also $F(u) < \omega_\nu$ wie vorhin.

Fall 3: $\nu = \lambda$, $\mathrm{Lim}(\lambda)$.
$F''\omega_\lambda^2 = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} F''\omega_\xi^2 \subset \bigcup\limits_{\xi<\lambda}\omega_\xi = \omega_\lambda$. QED(Satz 3.4.13)

(11) $0 < \alpha \wedge \omega \leq \beta \longrightarrow \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$

Beweis. Sei $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. $\gamma \leq \alpha \cdot \beta \leq \gamma \cdot \gamma = \gamma$.

(12) $\omega \leq \beta \longrightarrow \alpha + \beta = \max(\alpha, \beta)$

Beweis. Sei $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. $\gamma \leq \alpha + \beta \leq \gamma + \gamma \leq \gamma \cdot 2 \leq \gamma \cdot \gamma = \gamma$. QED

Definition. $\alpha^\beta = \overline{\overline{{}^\beta\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ (wobei ${}^u v = \{f \mid f : u \to v\} = \bigtimes_{i \in u} v$).

(13) $\overline{\overline{{}^u v}} = \overline{\overline{v}}^{\overline{\overline{u}}}$

Beweis. Sei $\beta \sim u$, $\alpha \sim v$. $\alpha^\beta \sim {}^\beta\alpha \sim {}^u v$, denn für $f : \alpha \leftrightarrow v$, $g : \beta \leftrightarrow u$ gilt: $h : {}^\beta\alpha \leftrightarrow {}^u v$, wo $h(k) = fkg^{-1}$. QED

(14) $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Beweis. Sei $u \sim \alpha$, $v \sim \beta$, $w \sim \gamma$, wobei $u \cap w = \emptyset$.
$\alpha^{(\beta+\gamma)} \sim {}^{(v \cup w)}u$; $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma \sim ({}^v u) \times ({}^w u)$.
$f : {}^{(v\cup w)}u \longleftrightarrow ({}^v u) \times ({}^w u)$ ist definiert durch: $f(k) = \langle k \upharpoonright v, k \upharpoonright w\rangle$. QED

(15) $\alpha^{(\beta \cdot \gamma)} = (\alpha^\beta)^\gamma$

Beweis. $\alpha^{\beta \cdot \gamma} \sim {}^{(\beta \times \gamma)}\alpha$, $(\alpha^\beta)^\gamma \sim {}^\gamma({}^\beta\alpha)$. Aber $f : {}^{(\beta\times\gamma)}\alpha \longleftrightarrow {}^\gamma({}^\beta\alpha)$, wobei $f(g)(\xi) = \langle g(\nu, \xi) \mid \nu < \beta\rangle$ für $\xi < \gamma$. QED

(16) $2^\alpha = \overline{\overline{\mathfrak{P}(\alpha)}}$ (also $\alpha < 2^\alpha$)

Beweis. $2^\alpha \sim {}^\alpha 2 \sim \mathfrak{P}(\alpha)$, denn $f : {}^\alpha 2 \leftrightarrow \mathfrak{P}(\alpha)$, wobei $f(h) = \{i \mid h(i) = 1\}$ für $h \in {}^\alpha 2$. QED(16)

Also:

(16.1) $(2^n)_{\text{Ord}} = (2^n)_{\text{Kard}}$

Nach Lemma 3.2.29.

Wir erwähnen ohne Beweis, daß:

(16.2) $(n^m)_{\text{Ord}} = (n^m)_{\text{Kard}}$ für $n > 0$.

Der Beweis ist wie der Beweis von Lemma 3.2.29(c).

(17) $\alpha^0 = 1^\alpha = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.

Beweis.
$\alpha^0 \sim {}^0\alpha = \{\emptyset\} = 1 \sim {}^\alpha\{\emptyset\} \sim 1^\alpha$
$\alpha^1 \sim {}^1\alpha = \{\{\langle \nu, 0\rangle\} \mid \nu \in \alpha\} \sim \alpha$
$\alpha^2 = \alpha^{1+1} = \alpha \cdot \alpha$. QED

Das folgende Lemma ist ein nützliches Werkzeug für Kardinalzahlabschätzungen:

Lemma 3.4.17 *Sei* $\langle X_i \mid i \in I\rangle \in \mathbf{V}$.

(a) $\overline{\overline{\bigcup_{i \in I} X_i}} \leq \overline{\overline{I}} \cdot \sup_{i \in I} \overline{\overline{X}}_i$

(b) $\overline{\overline{\bigtimes_{i \in I} X_i}} \leq (\sup_{i \in I} \overline{\overline{X}}_i)^{\overline{\overline{I}}}$ *falls* $\bigcup_i X_i \neq \emptyset$

Beweis.
(a) Sei $g_i : X_i \longleftrightarrow \overline{\overline{X}}_i \quad (i \in I)$.
Für $z \in \bigcup_i X_i$ wähle $i(z)$ mit: $z \in X_{i(z)}$. Setze: $h(z) = \langle i(z), g_{i(z)}(z)\rangle$. Dann

$$h : \bigcup_i X_i \xrightarrow{1-1} I \times \sup_i \overline{\overline{X}}_i.$$

(b) Definiere $h : \bigtimes_i X_i \longrightarrow {}^I(\sup_i \overline{\overline{X}}_i)$ durch: $h(f)(i) = g_i(f(i))$ für $i \in I$. h ist dann injektiv. QED(Lemma 3.4.17)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Konfinalitäten

Sei λ eine Limesordinalzahl. Die *Konfinalität* von λ ist die "kleinste Zahl von Schritten", die erforderlich sind, um λ "von unten" zu erreichen. Wir haben immer $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$. Es ist z.B. $\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$, da $\sup_{i<\omega} \omega_i = \omega_\omega$.

Definition. Sei $\mathrm{Lim}(\lambda)$. $f : \beta \to \lambda$ ist *konfinal* in λ gdw. $\sup f''\beta = \lambda$.

Definition. Sei $\mathrm{Lim}(\lambda)$. Die *Konfinalität* von λ ist definiert durch:

$$\mathrm{cf}(\lambda) = \min\{\beta \mid \bigvee f\ (f : \beta \to \lambda \wedge \sup f''\beta = \lambda)\}.$$

(18) $\mathrm{Lim}(\mathrm{cf}(\lambda))$.

Beweis. $\mathrm{cf}(\lambda) \neq 0$, da $\sup f''0 = 0 < \lambda$. $\mathrm{cf}(\lambda) \neq s\alpha$, da sonst $f : s\alpha \to \lambda$, $\sup f''s\alpha = \lambda$, aber $\sup f''s\alpha = \max(\sup f''\alpha, f(\alpha)) < \lambda$. QED

(19) $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \overline{\overline{\lambda}}$

Beweis. Sei $f : \overline{\overline{\lambda}} \leftrightarrow \lambda$. f ist konfinal in λ.

(20) Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$. Es gibt eine Normalfunktion $f : \kappa \to \lambda$ mit $\lambda = \sup f''\kappa$.

Beweis. Sei $g : \kappa \to \lambda$, $\sup g''\kappa = \lambda$. Für $\nu < \kappa$ setze: $\tilde{f}(\nu) = \sup g''\nu$. Dann $\tilde{f} : \kappa \to \lambda$ ist stetig und schwach monoton mit $\lambda = \sup \tilde{f}''\kappa$. $a = \tilde{f}''\kappa$ ist also abgeschlossen und unbeschränkt in λ nach Lemma 3.3.55. $\tilde{f}$ ist dann die monotone Aufzählung von a. Sei $\tau = \mathrm{dom}(f)$. Dann $\tau \geq \kappa$, da f monoton in λ ist. Nach Lemma 3.3.57 folgt aber $\tau \leq \kappa$. QED

(21) $\mathrm{cf}\,\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda)$

Beweis. Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$, $\tau = \mathrm{cf}(\kappa)$. Sei $f : \kappa \to \lambda$ normal, konfinal in λ, $g : \tau \to \kappa$ normal, konfinal in κ. fg ist dann konfinal in λ. Also $\tau \geq \mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$. QED

(22) $\mathrm{cf}(\lambda) \in \mathrm{Card}$.

Beweis. $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}\,\mathrm{cf}(\lambda) \leq \overline{\overline{\mathrm{cf}(\lambda)}} \leq \mathrm{cf}(\lambda)$

(23) $\mathrm{cf}(\lambda) = \min\{|a| \mid a \subset \lambda \text{ unbeschränkt in } \lambda\}$
$= \min\{|a| \mid a \subset \lambda \text{ abgeschlossen und unbeschränkt in } \lambda\}$

Beweis. Sei a unbeschränkt in λ. Sei f die monotone Aufzählung von a. Dann $f : |a| \to \lambda$ ist konfinal in λ. Also $|a| \geq \mathrm{cf}(\lambda)$. Sei nun $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$. $f : \kappa \to \lambda$ sei normal und konfinal in λ. Sei $a = f''\kappa$. Dann $|a| = \kappa$ und a ist abgeschlossen und unbeschränkt in λ. QED

Bemerkung. Wir sagen gelegentlich: a ist *konfinal* in κ statt a ist unbeschränkt in κ.

(24) Sei $g : \bar{\lambda} \to \lambda$ mit: $\sup g''\bar{\lambda} = \lambda$, $\sup g''\nu < \lambda$ für $\nu < \bar{\lambda}$.
Dann $\mathrm{cf}(\bar{\lambda}) = \mathrm{cf}(\lambda)$.

Beweis.
($\geq$) Sei $\bar{\kappa} = \mathrm{cf}(\bar{\lambda})$. $f : \bar{\kappa} \to \bar{\lambda}$ konfinal. Setze $h(\nu) = \sup g''f(\nu)$. Dann $h : \bar{\kappa} \to \lambda$ konfinal.

($\leq$) Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$, $f : \kappa \to \lambda$ konfinal und u.a. Setze:

$$k(\nu) = \sup\{\tau < \bar{\lambda} \mid \sup g''\tau < f(\nu)\}.$$

Dann $k : \kappa \to \bar{\lambda}$ ist konfinal. QED(24)

(24.1) Sei $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. Sei $f : \lambda \to \lambda$ eine Normalfunktion. $\{\alpha \mid f(\alpha) = \alpha\}$ ist abgeschlossen und unbeschränkt in λ.

Beweis. Die Abgeschlossenheit folgt nach Lemma 3.3.52. Wir beweisen die Unbeschränktheit. Sei $\beta < \lambda$. Setze: $\beta_0 = \beta$, $\beta_{i+1} = f(\beta_i) + 1$, $\tilde{\beta} = \sup \beta_i$. Dann $\beta < \tilde{\beta} < \lambda$ und $\tilde{\beta} \leq f(\tilde{\beta}) = \sup\limits_i f(\beta_i) \leq \sup\limits_i(\beta_i + 1) = \tilde{\beta}$. QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Reguläre Kardinalzahlen

Definition. Sei $\mathrm{Lim}(\lambda)$

λ ist *regulär* gdw. $\lambda = \mathrm{cf}(\lambda)$,

λ ist *singulär* gdw. $\lambda > \mathrm{cf}(\lambda)$.

Nach (22) ist also jede reguläre Ordnungszahl eine Kardinalzahl. Es gibt aber Kardinalzahlen, die singulär sind. Wir stellen zunächst fest:

(25) ω ist regulär.

Beweis. Nach Korollar 3.2.32.

(26) $\alpha \in \mathrm{Card} \longrightarrow \alpha^+$ ist regulär.

Beweis. Angenommen nicht. Sei $\gamma < \alpha^+$, $f : \gamma \to \alpha^+$ sei konfinal in α^+. Zu $\nu < \gamma$ wähle $g_\nu : \alpha \xrightarrow{\text{auf}} f(\nu) + 1$. Setze: $G(\langle \nu, \tau \rangle) = g_\nu(\tau)$ für $\nu < \gamma$, $\tau < \alpha$. Dann $G : \gamma \times \alpha \xrightarrow{\text{auf}} \alpha^+$. Also $\overline{\overline{\alpha^+}} \leq \overline{\overline{\gamma}} \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha = \alpha$. Widerspruch! QED

Bei den Limeskardinalzahlen sieht es ganz anders aus. ω_ω ist z.B. singulär, da $\omega_\omega = \sup\limits_{n<\omega} \omega_n$. In ähnlicher Weise ist ω_{ω_1} singulär mit $\mathrm{cf}(\omega_{\omega_1}) = \omega_1$. Sei $\alpha =$ das kleinste $\alpha = \omega_\alpha$. Es läßt sich leicht zeigen, daß $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$. Es fragt sich, ob vielleicht *jede* Limeskardinalzahl singulär ist. In der Tat ist diese Annahme mit unseren Axiomen A1 – A8 verträglich. (Genauer gesagt: Sind die Axiome A1 – A8 widerspruchsfrei, so bleiben sie auch widerspruchsfrei unter Hinzunahme der Aussage: Alle Limeskardinalzahlen sind singulär.) Andererseits gibt es durchaus Plausibilitätsgründe für die gegenteilige Annahme. Wir definieren also:

Definition. κ ist*unerreichbar* gdw. κ eine reguläre Limeskardinalzahl ist.

Die Annahme, daß eine unerreichbare Zahl existiert, bildet das erste in einer immer stärker werdenden Hierarchie von *großen Kardinalzahlaxiomen*.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Das berühmteste klassische Problem der Mengenlehre ist das *Kontinuumsproblem*. Die *Kontinuumshypothese* (CH) besagt $2^\omega = \omega^+$. Die *allgemeine Kontinuumshypothese* (GCH) besagt: $2^\alpha = \alpha^+$ für alle $\alpha \in \mathrm{Card}$. Bekannt ist:

(A) GCH ist mit A1 – A8 verträglich.
Dies wurde 1939 von Gödel bewiesen.

(B) $\neg$ CH ist mit A1 – A8 verträglich.
Dies wurde 1963 von Paul Cohen bewiesen. Cohens Beweis zeigte auch, daß der Wert von 2^ω fast beliebig festgelegt werden kann. Zum Beispiel sind A1 – A8 mit jeder der folgenden Annahmen verträglich: $2^\omega = \omega_2$, $2^\omega = \omega_{\omega+1}$, $2^\omega = \omega_{\omega_1}$. Bei anderen Potenzen 2^α hat man einen ähnlichen Freiheitsgrad. Zum Beispiel ist: $2^\omega = \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} = \omega_{100} \wedge 2^{\omega_{100}} = \omega_{\omega+1}$ mit den Axiomen verträglich.

In Anbetracht der obigen Sätze ist es wichtig festzustellen, was sich tatsächlich aus A1 – A8 über den Verlauf der Funktion 2^α beweisen läßt. Ein Hauptresultat besagt, daß $\mathrm{cf}(2^\alpha) > \mathrm{cf}(\alpha)$. (Also ist $2^\omega = \omega_\omega$ nicht möglich.) Als Lemma hierzu beweisen wir:

(27) $\kappa \geq \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha < \alpha^\kappa$

Beweis. Angenommen nicht.
Sei $F : \alpha \leftrightarrow {}^\kappa\alpha$. Setze: $f_\nu = F(\nu)$ für $\nu < \alpha$. $g : \kappa \to \alpha$ sei konfinal. Für $\xi < \kappa$ setze: $X_\xi = \{f_\nu(\xi) \mid \nu < g(\xi)\}$. Dann $X_\xi \subset \alpha$, $\overline{\overline{X_\xi}} \leq \overline{\overline{g(\xi)}} < \alpha$. Daher $\alpha \setminus X_\xi \neq \emptyset$. Setze: $f(\xi) = \min(\alpha \setminus X_\xi)$. Dann $f \in {}^\kappa\alpha$ aber $f \neq f_\nu$ für $\nu < \alpha$, denn $\nu < g(\xi) \to f(\xi) \neq f_\nu(\xi)$. Widerspruch! QED(27)

Als Korollar erhalten wir also:

(28) $\mathrm{cf}(2^\alpha) > \mathrm{cf}(\alpha)$.

Beweis. $(2^\alpha)^{\mathrm{cf}(\alpha)} = 2^{\alpha \cdot \mathrm{cf}(\alpha)} = 2^\alpha$, aber $(2^\alpha)^{\mathrm{cf}(2^\alpha)} > 2^\alpha$ nach (27). QED(28)

Definition. Die *schwachen Potenzfunktionen* definieren wir durch:

$$\alpha^{\underset{\smile}{\beta}} = \overline{\overline{\bigcup_{\nu<\beta} {}^\nu\alpha}}; \qquad \underset{\smile}{\alpha}^{\beta} = \bigcup_{\nu<\alpha} \overline{\overline{{}^\beta\nu}}.$$

(29) $\alpha^{\underset{\smile}{\beta}} \leq \beta \cdot \sup\limits_{\gamma<\beta} \alpha^{\overline{\overline{\gamma}}}$ $\qquad \underset{\smile}{\alpha}^{\beta} \leq \alpha \cdot \sup\limits_{\gamma<\alpha} \overline{\overline{\gamma}}^{\beta}$

Beweis nach Lemma 3.4.17.

(30) $\beta < \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha^\beta = \underset{\smile}{\alpha}^{\beta} \quad (\alpha \in \mathrm{Card},\ \beta = \overline{\overline{\beta}})$

Beweis. ${}^\beta\alpha = \bigcup\limits_{\nu<\alpha} {}^\beta\nu$.

(31) $0 < \beta \leq \alpha \longrightarrow (\alpha^+)^\beta = \alpha^+ \cdot \alpha^\beta \quad (\alpha \in \mathrm{Card},\ \beta = \overline{\overline{\beta}})$

Beweis nach (29), (30).

(32) Sei α eine Limeskardinalzahl. $0 < \beta < \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha^\beta = \sup\{\gamma^\beta \mid \gamma \in \mathrm{Card} \cap \alpha\}$

Beweis nach (30), (29).

(33) $2^\alpha = (2^{\underset{\smile}{\alpha}})^{\mathrm{cf}(\alpha)} \quad (\alpha \in \mathrm{Card})$

Beweis. Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\alpha)$.

$(\geq)$ $(2^{\underset{\smile}{\alpha}})^\kappa \leq 2^{\alpha\kappa} = 2^\alpha$

$(\leq)$ Sei $g : \kappa \to \alpha$ konfinal. Für $X \subset \alpha$ setze: $F(X) = \langle X \cap g(\nu) \mid \nu < \kappa\rangle$.
Dann $F : \mathfrak{P}(\alpha) \xrightarrow{1-1} {}^\kappa(\bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathfrak{P}(\xi))$, wobei ${}^\kappa(\bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathfrak{P}(\xi)) \sim (2^{\underset{\smile}{\alpha}})^\kappa$ QED

(34) Sei $\alpha \in \mathrm{Card}$, α singulär mit $\bigvee \gamma < \alpha \quad 2^\gamma = 2^{\underset{\smile}{\alpha}}$. Dann $2^\alpha = 2^{\underset{\smile}{\alpha}}$.

Beweis. Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\alpha)$. Sei $\kappa \leq \gamma < \alpha$, $2^\gamma = 2^{\underset{\smile}{\alpha}}$. Dann $2^\alpha = (2^{\underset{\smile}{\alpha}})^\kappa = 2^{\gamma\kappa} = 2^\gamma \leq 2^{\underset{\smile}{\alpha}}$.
QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Bis spät in diesem Jahrhundert hat man geglaubt, daß aus unseren Axiomen nicht mehr über den Verlauf der Funktion 2^α beweisbar ist, als in den obigen Sätzen enthalten ist. Erst in den 70er Jahren entdeckte man, daß es bei *singulären* Kardinalzahlen β tiefe Zusammenhänge gibt zwischen der Funktion $\langle 2^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Card} \cap \beta\rangle$ und dem Wert von 2^β. Eines der ersten Ergebnisse dieser Art war der *Satz von Silver*, der besagt: Ist $\beta \in \mathrm{Card}$ singulär mit $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$, und ist $2^\alpha = \alpha^+$ für $\alpha \in \mathrm{Card} \cap \beta$, so folgt: $2^\beta = \beta^+$.

Wir beweisen diesen Satz im nächsten Kapitel.

3.5 Kardinalzahlkombinatorik

Ein “Schubfachprinzip” besagt: Wird eine große Menge auf eine kleine Zahl von Schubfächern verteilt, so enthält ein Schubfach eine große Menge. Das Schubfachprinzip für die natürlichen Zahlen besagt z.B.: Wird eine Menge von Mächtigkeit n in $m < n$ Teile zerlegt, so hat ein Zerlegungsteil ≥ 2 Elemente. In Symbolen:

$$(\overline{\overline{x}} = n \wedge f : x \to m < n) \longrightarrow \bigvee i < m \;\; f^{-1}{}''\{i\} \geq 2.$$

Das Schubfachprinzip für ω besagt, daß eine Zerlegung einer unendlichen Menge in endlich viele Teile einen unendlichen Zerlegungsteil ergibt:

$$(\overline{\overline{x}} \geq \omega \wedge f : x \to n < \omega) \longrightarrow \bigvee i < n \;\; \overline{\overline{f^{-1}{}''\{i\}}} \geq \omega.$$

Für reguläre Kardinalzahlen gilt ganz allgemein:

Lemma 3.5.1 *Sei κ regulär, $\overline{\overline{X}} \geq \kappa$. Jede Zerlegung von X in $< \kappa$ Teile hat einen Teil von Mächtigkeit $\geq \kappa$ – d.h. $f : X \to \delta < \kappa \to \bigvee i < \delta \;\; \overline{\overline{f^{-1}{}''\{i\}}} \geq \kappa$.*

Beweis. Angenommen nicht. Setze $X_i = f^{-1}{}''\{i\}$, $\beta_i = \overline{\overline{X}}_i$ für $i < \delta$. Dann ist $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\bigcup_{i<\delta} X_i}} \leq \delta \cdot \sup_{i<\delta} \overline{\overline{X}}_i \leq \max(\omega + \delta, \omega + \sup_{i<\delta} \overline{\overline{X}}_i)$, wobei $\sup_{i<\delta} \overline{\overline{X}}_i < \kappa$, da κ regulär ist. Folglich $\overline{\overline{X}} < \kappa$. Widerspruch! QED(Lemma 3.5.1)

Ein analoges Schubfachprinzip gilt für singuläre Kardinalzahlen β. Hier ist allerdings “klein” nicht als “$< \beta$”, sondern als “$< \mathrm{cf}(\beta)$” zu verstehen.

Lemma 3.5.2 *Sei $\beta \in \mathrm{Card}$, $\overline{\overline{X}} \geq \beta$. Dann gilt:*

$$f : X \to \delta < \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \bigvee i < \delta \;\; \overline{\overline{f^{-1}{}''\{i\}}} \geq \beta.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $X = \beta$. Wenn nicht, ist $\beta_i =_{\mathrm{Df}} f^{-1}{}''\{i\} < \beta$ für $i < \delta$. Also $\beta = \overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{\bigcup_{i<\delta} f^{-1}{}''\{i\}}} \leq \delta \cdot \sup_{i<\delta} \beta_i < \beta$. Widerspruch! QED

Wir erhalten eine andere Verallgemeinerung von Lemma 3.5.1 – diesmal für beliebige Limesordinalzahlen λ, indem wir $X \subset \lambda$ als “groß” verstehen, wenn X in λ unbeschränkt liegt.

Lemma 3.5.3 *Sei $\mathrm{Lim}(\lambda)$. $X \subset \lambda$ sei unbeschränkt in λ. Sei $f : X \to \delta < \mathrm{cf}(\lambda)$. Dann gilt:*

$$\bigvee i < \delta \quad f^{-1}{}''\{i\} \quad \textit{ist unbeschränkt in } \lambda.$$

Beweis. Angenommen nicht.
Setze $\eta_i = \mathrm{lub}\, f^{-1}{}''\{i\}$. Dann $X \subset \bigcup_{i<\delta} f^{-1}{}''\{i\} \subset \sup_{i<\delta} \eta_i < \lambda$. Widerspruch! QED

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Abgeschlossene unbeschränkte Mengen

Einen noch stringenteren Begriff von "groß" erhalten wir, wenn wir nicht nur verlangen, daß $X \subset \lambda$ in λ unbeschränkt, sondern auch *abgeschlossen* ist im Sinne von §3.3. Wir nennen solche Mengen *cub* (oder *club*) in λ (für "closed and unbounded"). Dieser Begriff ist hauptsächlich von Interesse, wenn $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. (Ist $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$, so ist jede unbeschränkte Teilmenge vom Ordnungstyp ω eine cub Menge.)

Lemma 3.5.4 *Sei* $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. $A_i \subset \lambda$ *sei cub in* λ *für* $i < \delta < \mathrm{cf}(\lambda)$. *Dann ist* $\bigcap\limits_{i<\delta} A_i$ *cub in* λ.

Beweis. $A = \bigcap\limits_{i<\delta} A_i$ ist abgeschlossen nach Lemma 3.3.46. Wir beweisen die Unbeschränktheit. Für $\gamma < \lambda$, $i < \delta$ setze: $f_i(\gamma) = \min A_i \setminus (\gamma+1)$. Setze $f(\gamma) = \mathrm{lub}\{f_i(\gamma) \mid i < \delta\}$. Dann $f(\gamma) < \lambda$, da $\delta < \mathrm{cf}(\lambda)$. Sei $\gamma < \delta$ und setze: $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_{i+1} = f(\gamma_i)$. Dann $\tilde{\gamma} = \sup\limits_i \gamma_i < \lambda$, da $\omega < \mathrm{cf}(\lambda)$. $\tilde{\gamma}$ ist aber ein Limespunkt von A_i; also $\tilde{\gamma} \in A_i$ für $i < \delta$. Also $\gamma \in A$.
QED(Lemma 3.5.4)

Für reguläres κ ist also $\bigcap\limits_{i<\delta} A_i$ cub für $\delta < \kappa$. Sei nun A_i cub in κ für alle $i < \kappa$. Wir können nicht erwarten, daß $\bigcap\limits_{i<\kappa} A_i$ cub ist. Man kann aber den *diagonalen Durchschnitt* von $\langle A_i \mid i < \kappa\rangle$ bilden:

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} A_i\}.$$

Es gilt dann:

Lemma 3.5.5 $\kappa > \omega$ *sei regulär.* A_i *sei cub in* κ *für* $i < \kappa$. *Dann ist* $A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap\limits_{i\in\alpha} A_i\}$ *cub in* κ.

Beweis.
Abgeschlossenheit: Sei λ ein Limespunkt von A. Sei $i < \lambda$. Sei $i < \alpha \in A \cap \lambda$. Dann ist $\alpha \in \bigcap\limits_{j<\alpha} A_j \subset A_i$. Also ist λ ein Limespunkt von A_i. Also $\lambda \in A_i$ für $i < \lambda$. Also $\lambda \in A$.
Unbeschränktheit: Für $\gamma, i < \kappa$ setze: $f_i(\gamma) = \min(A_i \setminus (\gamma+1))$ und $f(\gamma) = \mathrm{lub}_{i<\gamma} f_i(\gamma)$. Sei nun $\gamma < \kappa$. Setze $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_{i+1} = f(\gamma_i)$, $\tilde{\gamma} = \sup\limits_{i<\omega} \gamma_i$. Dann ist $\tilde{\gamma} < \kappa$, da κ regulär und $\omega < \kappa$. $\tilde{\gamma}$ ist aber ein Limespunkt von A_i für $i < \gamma$, denn $\gamma_j < f_i(\gamma_j) \leq f(\gamma_i) < \tilde{\gamma}$, wo $f_i(\gamma_i) \in A_i$. Also ist $\tilde{\gamma} \in \bigcap\limits_{i<\gamma} A_i$. Also $\tilde{\gamma} \in A$. QED(Lemma 3.5.5)

Korollar 3.5.6 $\kappa > \omega$ *sei regulär.* B, C, A_i *seien cub in* κ *für* $i < \kappa$. *Dann ist* $A = \{\alpha \in C \mid \alpha \in \bigcap\limits_{i\in B\cap\alpha} A_i\}$ *cub in* κ.

Beweis. Setze $A' = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap\limits_{i\in B\cap\alpha} A_i\}$. Es genügt zu zeigen, daß A' cub ist, denn dann folgt $A = C \cap A'$ ist cub nach Lemma 3.5.4. Setze $A'_i = A_i$ falls $i \in B$ und $A'_i = \kappa$ sonst für $i < \kappa$. Dann gilt: $\bigcap\limits_{i\in B\cap\alpha} A_i = \bigcap\limits_{i<\alpha} A'_i$. QED(Korollar 3.5.6) “cub” ist eigentlich ein zu stringenter Begriff von “groß in λ”, denn von einem solchen Begriff erwarten wir:

(a) λ ist groß.

(b) $\emptyset$ ist klein.

(c) Wenn X groß ist und $X \subset Y \subset \lambda$, dann ist Y groß.

(d) Ist $X = Y \cup Z$ groß, so ist Y oder Z groß.

Der Begriff “cub in λ” erfüllt weder (c) noch (wie wir sehen werden) (d). Ein Begriff, der (a) – (d) erfüllt für $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$, ist:

Definition. $S \subset \lambda$ ist stationär in λ gdw. $S \cap A \neq \emptyset$ für alle cub $A \subset \lambda$.

Der Fall $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ ist wieder uninteressant. (In diesem Fall ist S stationär gdw. $\lambda \setminus \beta \subset S$ für ein $\beta < \lambda$.) Daß die Stationarität (a), (b), (c) erfüllt, ist trivial. (d) ist ein Sonderfall des Schubfachprinzips:

Lemma 3.5.7 *Sei* $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. $S \subset \lambda$ *sei stationär, wo* $f : S \to \beta < \mathrm{cf}(\lambda)$. *Dann* $\bigvee i < \beta \quad f^{-1}{}''\{i\}$ *ist stationär.*

Beweis. Angenommen nicht. Wähle $\langle A_i \mid i < \beta \rangle$ mit A_i cub und $A_i \cap f^{-1}{}''\{i\} = \emptyset$. $A = \bigcap_{i<\beta} A_i$ ist dann cub und $A \cap S = \emptyset$. QED

Für reguläres κ erhalten wir einen noch stärkeren Satz.

Definition. Sei $S \subset \lambda$, $f : S \to \lambda$. f ist *regressiv* gdw. $\bigwedge \xi \in S \quad f(\xi) < \xi$.

Der *Satz von Fodor* besagt:

Satz 3.5.8 *Sei* κ *regulär und* $\kappa > \omega$. $S \subset \kappa$ *sei stationär.* $f : S \to \kappa$ *sei regressiv. Dann* $\bigvee i < \kappa \quad f^{-1}{}''\{i\}$ *ist stationär.*

Beweis. Angenommen nicht.
Wähle $\langle A_i \mid i < \kappa \rangle$ mit: A_i ist cub in κ und $A_i \cap f^{-1}{}''\{i\} = \emptyset$.
Setze $A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} A_i\}$. A ist cub in κ.
Behauptung: $A \cap S = \emptyset$.
Sei $\alpha \in A \cap S$. Sei $i = f(\alpha) < \alpha$. Dann $\alpha \in A_i$. Also $\alpha \notin f^{-1}{}''\{i\}$. Widerspruch!
QED(Lemma 3.5.8)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Filter

Wir wollen die jetzt gewonnenen Erkenntnisse dazu benutzen, den im vorigen Kapitel erwähnten Satz von Silver zu beweisen. Zunächst müssen wir jedoch noch ein Hilfsmittel bereitstellen.

Definition. F ist ein *Filter* auf $\mathfrak{P}(\lambda)$ gdw.

(a) $F \subset \mathfrak{P}(\lambda)$

(b) $\lambda \in F, \emptyset \notin F$

(c) $X \in F \wedge X \subset Y \longrightarrow Y \in F$

(d) $X, Y \in F \longrightarrow X \cap Y \in F$.

(c), (d) lassen sich auch zusammenfassen als: $(X \in F \wedge Y \in F) \longleftrightarrow X \cap Y \in F$.
Es ist klar, daß wenn ein Begriff von "groß" im Sinne unserer früheren Bedingungen (a) – (d) gegeben ist, die Menge $F = \{X \subset \lambda \mid \lambda \setminus X$ ist nicht groß$\}$ ein Filter ist. Beispiele sind: $\{X \subset \lambda \mid \lambda \setminus X$ ist beschränkt in $\lambda\}$ und $\{X \subset \lambda \mid \lambda \setminus X$ ist nicht stationär in $\lambda\}$.

Bemerkung. $\lambda \setminus X$ ist nicht stationär gdw. $\bigvee A$ (A ist cub $\wedge A \subset X$).

Definition. F ist ein *Ultrafilter* auf $\mathfrak{P}(\lambda)$ gdw.

(a) F ist ein Filter auf $\mathfrak{P}(\lambda)$,

(b) X oder $\lambda \setminus X \in F$ für $X \subset \lambda$.

Für Ultrafilter gilt also:

$$X \cup Y \in F \longleftrightarrow (X \in F \vee Y \in F)$$

für $X, Y \subset \lambda$.

Lemma 3.5.9 *Sei F ein Filter auf $\mathfrak{P}(\lambda)$. Es gibt einen Ultrafilter $F' \supset F$ auf $\mathfrak{P}(\lambda)$.*

Beweis. Sei $H = \{F' \mid F \subset F' \wedge F'$ ist ein Filter auf $\mathfrak{P}(\lambda)\}$.
Nach dem Zornschen Lemma hat H ein maximales Element F'.

Behauptung: F' ist ein Ultrafilter.
Angenommen nicht. Sei $X \subset \lambda$ mit: $X, \lambda \setminus X \notin F'$. Setze: $F'' = \{Y \mid \bigvee z \in F'\ Y \supset Z \cap X\}$.
Dann $F'' \in H$ und $F' \subsetneqq F''$. Widerspruch! QED(Lemma 3.5.9)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Der Satz von Silver

Satz 3.5.10 *Sei $\omega < \mathrm{cf}(\beta) < \beta$, wobei $\beta \in$ Card. Sei $\{\gamma \in \beta \cap \text{Card} \mid 2^\gamma = \gamma^+\}$ stationär in β. Dann $2^\beta = \beta^+$.*

Beweis. Setze: $S'' = \{\tau \in \mathrm{Card} \cap \beta \mid 2^\tau = \tau^+\}$. Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\beta)$. Dann existiert nach §3.4, (20) ein cub $A \subset \beta$ mit: $|A| = \kappa$. $A \cap \mathrm{Card}$ ist dann cub in β. $\langle \beta_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ sei die monotone Aufzählung von $A \cap \mathrm{Card}$. Setze: $S' = S'' \cap \{\beta_\nu \mid \nu < \kappa\}$. Dann ist S' stationär in β. Setze: $S = \{\nu \mid \beta_\nu \in S'\}$. Dann:

(1) S ist stationär in κ.

Beweis. Sei $C \subset \kappa$ cub in κ. Setze $C' = \{\beta_\nu \mid \nu \in C\}$. C' ist dann cub in β, da $\langle \beta_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ eine Normalfunktion ist. Folglich: $C' \cap S' \neq \emptyset$. Folglich: $C \cap S = \{\nu \mid \beta_\nu \in C' \cap S'\} \neq \emptyset$.
QED(1)

Für $\nu \in S$ sei $k_\nu : \mathfrak{P}(\beta_\nu) \longleftrightarrow \beta_\nu^+$. Für $X \subset \beta$ setze:

$$F(X) = \langle k_\nu(X \cap \beta_\nu) \mid \nu \in S \rangle.$$

Dann $F : \mathfrak{P}(\beta) \longrightarrow \bigtimes_{\nu \in S} \beta_\nu^+$.

(2) F ist injektiv.

Beweis. Sei $X, Y \subset \beta$, $X \neq Y$. Sei $\nu \in S$ mit $X \cap \beta_\nu \neq Y \cap \beta_\nu$. Dann $k_\nu(X \cap \beta_\nu) \neq k_\nu(Y \cap \beta_\nu)$. Folglich $F(X) \neq F(Y)$.
QED(2)

Setze: $\Gamma = F''\mathfrak{P}(\beta)$. Dann $\overline{\overline{\Gamma}} = 2^\beta$ nach (2). Es genügt zu zeigen:

Behauptung 1: $\overline{\overline{\Gamma}} \leq \beta^+$.

(3) Γ ist fast disjunkt – d.h. $f, y \in \Gamma \longrightarrow \bigvee \tau < \kappa \bigwedge \nu \in S \setminus \tau \;\; f(\nu) \neq g(\nu)$.

Beweis. Sei $f = F(X)$, $g = F(Y)$. Sei $X \cap \beta_\tau \neq Y \cap \beta_\tau$. Dann $f(\nu) = k_\nu(X \cap \beta_\nu) \neq k_\nu(Y \cap \beta_\nu) = g(\nu)$ für $\nu \in S \setminus \tau$.
QED(3)

Setze: $U' = \{X \subset \kappa \mid S \setminus X \text{ ist nicht stationär}\}$

(4) U' ist ein Filter auf $\mathfrak{P}(\kappa)$.

Beweis. Trivial.

$U \supset U'$ sei ein Ultrafilter auf $\mathfrak{P}(\kappa)$. Man definiere $\prec \subset \Gamma^2$ durch:

$$f \prec g \longleftrightarrow \{\nu \mid f(\nu) < g(\nu)\} \in U.$$

Bemerkung. $X \in U \longrightarrow X$ ist stationär, denn für cub $C \subset \kappa$ ist $S \setminus C$ nicht stationär; also $C \in U' \subset U$ und $C \cap X \in U$.

(5) $\langle \Gamma, \prec \rangle$ ist ein LS.

Beweis. Setze $K_{f,g} = \{\nu \mid f(\nu) < g(\nu)\}$ für $f, g \in \Gamma$.

(a) $f \not\prec f$, da $K_{f,f} = \emptyset$

(b) $f \prec g \prec h \longrightarrow f \prec h$, denn:
$K_{f,g}, K_{g,h} \in U \longrightarrow K_{f,g} \cap K_{g,h} \in U$, wobei $K_{f,g} \cap K_{g,h} \subset K_{f,h}$.

(c) $f \prec g \vee g \prec f \vee f = g$
Beweis. Sei $f \neq g$. Dann $f(\nu) \neq g(\nu)$ für hinreichend großes $\nu \in S$. Also: $\{\nu \mid f(\nu) \neq g(\nu)\} = (K_{f,g} \cup K_{g,f}) \in U$. Also: $K_{f,g} \in U \vee K_{g,f} \in U$.
QED(5)

Für $g \in \Gamma$ setze: $\Gamma_g = \{f \mid f \prec g\}$. Um Behauptung 1 zu beweisen, müssen wir noch zeigen:

Behauptung 2: $\overline{\overline{\Gamma}}_g \leq \beta$ für $g \in \Gamma$.

Beweis. $g(\nu) < \beta_\nu^+$ für $\nu \in S$. Wähle:

$$K_\nu : g(\nu) \overset{1-1}{\longrightarrow} \beta_\nu \quad (\nu \in S).$$

Sei nun $f \in \Gamma_g$. Setze:

$$S_f = \{\lambda \in S \mid \mathrm{Lim}(\lambda) \wedge f(\lambda) < g(\lambda)\}.$$

Dann $S_f \in U$. Also ist S_f stationär in κ. Für $X \in S_f$ setze:

$$F_f(\lambda) = \min\{\nu \mid K_\lambda(f(\lambda)) < \beta_\nu\}.$$

F_f ist also regressiv auf S_λ. Nach dem Satz von Fodor können wir ξ_f wählen mit: $F_f^{-1}{}''\{\xi_f\}$ ist stationär in κ. Setze: $T_f = F_f^{-1}{}''\{\xi_f\}$ und: $G(f) = \langle K_\lambda(f(\lambda)) \mid \lambda \in T_f\rangle$. Dann $T_f \subset S_f$ und $G(f) : T_f \longrightarrow \beta_{\xi_f}$.

(6) G ist injektiv.

Beweis. Sei $f, h \in \Gamma_g$, $f \neq h$.
Behauptung: $G(f) \neq G(h)$.
Fall 1 $T_f \neq T_h$ (trivial)
Fall 2 $T_f = T_h = T$.
$f(\nu) \neq h(\nu)$ für hinreichend großes $\nu \in S$. Also $f(\nu) \neq h(\nu)$ für ein $\nu \in T$. Also $G(f)(\nu) = K_\nu(f(\nu)) \neq K_\nu(h(\nu)) = G(h)(\nu)$. QED(6)

Da aber $G(f) : T_f \longrightarrow \beta_{\xi_f}$ haben wir: $G(f) \subset \beta_{\xi_f} \times \kappa$. Also:
$\overline{\overline{\Gamma}}_g = \overline{\overline{G''\Gamma_g}} \subset \overline{\overline{\bigcup_{\gamma<\beta} \mathfrak{P}(\gamma^2)}} \leq \beta \cdot \sup_{\gamma<\beta} 2^{\overline{\overline{\gamma}}} \leq \beta \cdot \beta = \beta.$ QED(Behauptung 2)

Ein einfaches Argument liefert dann Behauptung. 1: Sei $s = \langle \Gamma, R\rangle$ ein WS. $\langle g_\xi \mid \xi < \varrho\rangle$ sei definiert durch:

$$g_\xi = \begin{cases} \text{das } s\text{-kleinste } g \in \Gamma \text{ mit } \bigwedge \nu < \xi \quad g_\nu \prec g & \text{falls ein solches existiert;} \\ & \text{sonst undefiniert.} \end{cases}$$

Dann $\nu < \xi < \varrho \longrightarrow g_\nu \prec g_\xi$. Folglich:

$$\xi < \varrho \longrightarrow \overline{\overline{\xi}} = \overline{\overline{\{g_\nu \mid \nu < \xi\}}} \leq \overline{\overline{\Gamma}}_g \leq \beta.$$

Also $\xi < \varrho \longrightarrow \xi < \beta^+$. Damit ist $\varrho \leq \beta^+$ und somit:

$$\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\bigcup_{\xi<\varrho} \Gamma_{g_\xi}}} \leq \beta^+ \cdot \beta = \beta^+.$$

QED(Satz 3.5.10)

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Der Satz von Solovay

Im folgenden sei κ regulär und $\kappa > \omega$. Wir lösen jetzt unser Versprechen ein, zu zeigen, daß ein cub $C \subset \kappa$ in zwei Teile zerlegt werden kann, die nicht cub sind. Da jede cub Menge stationär ist, genügt es zu zeigen, daß eine stationäre Menge S in zwei stationäre Teile S_0, S_1 zerlegt werden kann. (S_h ist dann nicht cub, da $S_h \cap S_{1-h} = \emptyset$.) Wir beweisen sogar den noch stärkeren Satz von Solovay, wonach S in κ viele stationäre Teile zerlegt werden kann. Diesem schicken wir jedoch zunächst ein technisches Hilfslemma voraus:

Definition. $X \subset \mathrm{On}$ ist *dünn* gdw. $\bigwedge\limits_{\mathrm{Lim}(\lambda)} \lambda \in X\ \ (X \cap \lambda$ ist nicht stationär in $\lambda)$.

Lemma 3.5.11 *Sei κ regulär und $\kappa > \omega$. $S \subset \kappa$ sei stationär. Es gibt $S' \subset S$ mit: S' ist dünn und stationär.*

Beweis. R sei eine Wohlordnung von $\mathfrak{P}(\kappa)$. X_α $(\alpha < \kappa)$ sei definiert durch Rekursion auf α:

$$X_\alpha = \begin{cases} \text{das } R\text{-kleinste } X \subset \alpha \text{ mit } X \text{ cub in } \alpha \text{ und } X \subset \{\nu < \alpha \mid X_\nu = \emptyset\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{falls } \alpha \in S,\ \mathrm{Lim}(\alpha) \text{ und ein solches } X \text{ existiert;} \\ \emptyset \qquad\qquad\qquad \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze: $Y = \{\alpha \mid X_\alpha \neq \emptyset\}$. Dann: $\lambda \in Y \longrightarrow X_\lambda \cap Y = \emptyset \longrightarrow \lambda \cap Y$ ist nicht stationär in λ. Y ist also dünn und es genügt zu zeigen:

Behauptung: Y ist stationär.

Angenommen nicht. $C \subset \kappa$ sei cub, $C \cap Y = \emptyset$. Setze: $C^* = \{\lambda \mid \lambda$ ein Limespunkt von $C\}$. Sei $\alpha \in C^* \cap X$. $C \cap \alpha$ ist dann cub in α und $(C \cap \alpha) \cap Y = \emptyset$. Also $X_\alpha \neq \emptyset$. Also $\alpha \in Y$. Widerspruch! QED(Lemma 3.5.11)

Satz 3.5.12 *Sei κ regulär und $\kappa > \omega$. Jede stationäre Teilmenge von κ kann in κ viele stationäre Teilmengen zerlegt werden (d.h. es gibt $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ mit $f^{-1}{}''\{i\}$ stationär für $i < \kappa$).*

Beweis. Angenommen nicht.
Wir nennen $X \subset \kappa$ *seltsam* gdw. X ein Gegenbeispiel zu Satz 3.5.12 ist. Trivialerweise:

(1) Sei X seltsam. $X' \subset X$ sei stationär. Dann ist X' seltsam.

(2) Sei X seltsam. Sei $f : X \to \kappa$ regressiv. Es gibt $C \subset \kappa$ mit: C ist cub $\wedge f''(C \cap X)$ ist beschränkt in κ.

Beweis. Setze: $w = \{\nu \mid f^{-1}{}''\{\nu\}$ ist stationär$\}$. Dann $\overline{\overline{w}} < \kappa$. Setze: $X' = \bigcup\limits_{\nu \in w} f^{-1}{}''\{\nu\}$.
Es genügt zu zeigen:

Behauptung: $X \setminus X'$ ist nicht stationär, (denn für $C \cap (X \setminus X') = \emptyset$, C cub ist $f''(C \cap X) \subset w$). Wenn nicht, ist $\bar{f} = f \restriction (X \setminus X')$ regressiv. Nach Fodor existiert ξ mit $\bar{f}^{-1}{}''\{\xi\}$ stationär. Aber $\xi \notin w$. Also $\bar{f}^{-1}{}''\{\xi\} = f^{-1}{}''\{\xi\}$. Also $\xi \in w$. Widerspruch! QED(2)

Nach (1) und Lemma 3.5.11 gibt es X, welches seltsam und dünn ist.
Nach (1) können wir auch annehmen, daß $X \subset \{\lambda \mid \mathrm{Lim}(\lambda)\}$. Für $\alpha \in X$ wähle $S_\alpha \subset \alpha$

cub in α mit: $X \cap S_\alpha = \emptyset$. Für $\nu < \kappa$ definieren wir $f_\nu : (X \setminus (\nu + 1)) \longrightarrow \kappa$ durch: $f_\nu(\alpha) = \min(S_\alpha \setminus \nu)$. f_ν ist also regressiv. Nach (2) können wir B_ν cub in κ wählen mit:

$$f_\nu{}''(B_\nu \cap (X \setminus (\nu + 1))) \subset \tau_\nu \quad \text{wobei} \ \ \nu \leq \tau_\nu < \kappa.$$

Setze: $C_\nu = B_\nu \setminus \tau_\nu$. Setze:

$$C = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\nu < \alpha} C_\nu\}.$$

Als diagonaler Durchschnitt von club Mengen ist C ebenfalls club. Sei $\alpha, \beta \in X \cap C$; $\alpha < \beta$. Wir leiten einen Widerspruch ab, indem wir zeigen:

Behauptung: $\alpha \in S_\beta$ (also $\alpha \notin X$).

Beweis. Für $\nu < \alpha$ ist $\alpha, \beta \in C_\nu$. Folglich $\nu \leq f_\nu(\beta) < \tau_\nu < \alpha$, wobei $f_\nu(\beta) \in S_\beta$. α ist also ein Limespunkt von S_β. Also $\alpha \in S_\beta$. Widerspruch! QED(Satz 3.5.12)

3.6 Lineare Ordnungen

Definition. $s = \langle u, r\rangle$ sei eine binäre Struktur.

(a) $s \mid u' = \langle u', r \cap u'^2\rangle$ für $u' \subset u$.

(b) s' ist eine *Teilstruktur von* s ($s' \subseteq s$) gdw. $\bigvee u' \quad s' = s \mid u'$.

(c) f ist eine *Einbettung von* s' *in* s ($f : s' \overset{\sim}{\rightarrow} s$) gdw. $\bigvee s'' \subseteq s \quad f : s' \overset{\sim}{\leftrightarrow} s''$.

(Also $f : s' \overset{\sim}{\rightarrow} s$ gdw. $f : u' \overset{1-1}{\rightarrow} u$ und $x\, r'\, y \leftrightarrow f(x)\, r\, f(y)$ für $x, y \in u'$, wobei $s' = \langle u', r'\rangle$, $s = \langle u, r\rangle$. $s' \subseteq s$ gdw. $\mathrm{id} : s' \overset{\sim}{\rightarrow} s$.)

Definition. $s = \langle u, r\rangle$ sei ein LS.

(a) $v \subset u$ ist *dicht in* s gdw.

(i) $\bigwedge xy\, (x\, r\, y \longrightarrow \bigvee z \in v \quad x\, r\, z\, r\, y)$

(ii) $\bigwedge x \in u \bigvee y \in v \quad x\, r\, y$

(iii) $\bigwedge x \in u \bigvee y \in v \quad y\, r\, x$.

((ii), (iii) besagen, daß s keine Endpunkte besitzt.)

(b) $s' = \langle u', r'\rangle$ ist *dicht in* s gdw. $s' \subseteq s$ und u' ist dicht in s.

(c) s ist eine *dichte Ordnung* (DO) gdw. s in sich dicht ist und $u \neq \emptyset$.

Lemma 3.6.1 *Jede DO ist unendlich.*

Beweis. Sonst ist $s = \langle u, r\rangle$ ein ELS mit $u \neq \emptyset$. Also existieren $\min_s u$, $\max_s u$. QED

Lemma 3.6.2 *Keine DO ist ein wohlgeordnetes System.*

Beweis. Sonst existiert $\min_s u$.

Für $s = \langle u, r\rangle$ ein LS schreiben wir auch $<_s = r$.

Definition. Seien $x \leq_s y$.

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (x, y)_s = s \mid \{z \mid x <_s z <_s y\}\\
[x, y) &= [x, y)_s = s \mid \{z \mid x \leq_s z <_s y\}\\
(x, y] &= (x, y]_s = s \mid \{z \mid x <_s z \leq_s y\}\\
[x, y] &= [x, y]_s = s \mid \{z \mid x \leq_s z \leq_s y\}
\end{aligned}$$

Trivialerweise erhalten wir:

Lemma 3.6.3 *Sei s eine DO, $x <_s y$. $(x, y)_s$ ist eine DO.*

Ein tieferes Lemma ist:

Lemma 3.6.4 *Es gibt eine abzählbare DO.*

Beweis. $S = \langle U, R\rangle$ sei definiert wie folgt:
$U = \{f \mid f : \omega \longrightarrow 2 \wedge 0 < \{i \mid f(i) = 1\} < \omega\}$.
$f\, R\, g \longleftrightarrow (f, g \in U \wedge \bigvee n\, (f \restriction n = g \restriction n \wedge f(n) < g(n)))$.

(**Bemerkung.** S ist die Binärdarstellung der dyadischen Zahlen im Intervall $(0, 1)$.)

Dann:

(1) S ist ein LS.

Der Beweis ist dem Leser überlassen.

(2) S ist dicht in sich.

Beweis.
(a) Sei $f_0 < f_1$. Sei $f_0 \restriction n = f_1 \restriction n$, $f_0(n) < f_1(n)$. Sei $m > n$ mit $\{i \mid f_0(i) = 1\} \subset m$. Setze:

$$f(j) = \begin{cases} f_0(j) & \text{falls } j \neq m \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $f_0 < f < f_1$.
(b) Sei $f \in U$. Sei $\{i \mid f(i) = 1\} \subset m$. f_0, f_1 seien definiert durch:

$$f_0(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ; \qquad f_1(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $f_0 < f < f_1$. QED(2)

(3) $\overline{\overline{U}} = \omega$.

Beweis. Für $f \in U$ setze: $H(f) = \{i \mid f(i) = 1\}$. Dann $H : U \xrightarrow{1-1} \mathbf{V}_\omega$. Aber: $\overline{\overline{\mathbf{V}}}_\omega = \omega$.
Also $\overline{\overline{U}} \leq \omega$. Also $\overline{\overline{U}} = \omega$, da U unendlich ist. QED(Lemma 3.6.4)

Der folgende Satz stammt von Cantor. Der Beweis benutzt ein sog. ßig–zagÄrgument:

Lemma 3.6.5 *S_0, S_1 seien abzählbare DO. Dann ist $S_0 \cong S_1$.*

Beweis. Für $h = 0, 1$ sei $S_h = \langle U_h, R_h\rangle$. $\langle p^h_n \mid n < \omega\rangle$ sei eine Abzählung von U_h. W sei die Menge der Abbildungen f mit: $\mathrm{dom}(f) \subset U_0$ ist endlich und $f : (S_0 \mid \mathrm{dom}(f)) \xrightarrow{\sim} S_1$.
Offensichtlich ist $W^{-1} = \{f^{-1} \mid f \in W\}$ die Menge der Abbildungen g mit: $\mathrm{dom}(g) \subset U_1$ ist endlich und $g : (S_1 \mid \mathrm{dom}(g)) \xrightarrow{\sim} S_0$.
Durch Induktion auf $n < \omega$ definieren wir eine Folge $f_n \in W$: $f_0 = \emptyset$.
Sei nun f_n definiert. Um f_{n+1} zu definieren, unterscheiden wir zwei Fälle. Sei $f = f_n$.
Fall 1 $\bigvee m \quad n = 2m$
Sei $q = p^0_k$; wobei k minimal ist für $p^0_k \notin \mathrm{dom}(f)$. Wähle $q' \in U_1$ mit $q' \notin \mathrm{rng}(f)$ und:

$$\begin{aligned} p <_{S_0} q &\quad\longleftrightarrow\quad f(p) <_{S_1} q' \\ q <_{S_0} p &\quad\longleftrightarrow\quad q' <_{S_1} f(p) \end{aligned}$$

für $p \in \mathrm{dom}(f)$.
Die Existenz eines solchen q' folgt aus der Dichtheit von S_1:

Falls $q < \min_{S_0} \mathrm{dom}(f)$, wähle $q' < \min_{S_1} \mathrm{rng}(f)$.
Falls $\max_{S_0} \mathrm{dom}(f) < q$, wähle $q' > \max_{S_1} \mathrm{rng}(f)$.
Sonst ist $U_0, U_1 \neq \emptyset$, wobei

$$\begin{aligned} U_0 &= \{p \in \mathrm{dom}(f) \mid p < q\} \\ U_1 &= \{p \in \mathrm{dom}(f) \mid q < p\}. \end{aligned}$$

Setze $x_0 = \max U_0$, $x_1 = \min U_1$ und wähle q' mit: $f_n(x_0) < q' < f_n(x_1)$.Wir setzen dann:

$$f_{n+1} = f \cup \{\langle q', q\rangle\}.$$

Fall 2 $\quad \bigvee m \quad n = 2m+1$.
Sei $q' = p_k^1$ wobei k minimal ist für $p_k^1 \notin \mathrm{dom}(f^{-1})$. Sei $q \in U_0$ mit $q \notin \mathrm{rng}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$ und

$$\begin{aligned} p <_{S_1} q' &\longleftrightarrow f^{-1}(p) <_{S_0} q \\ q' <_{S_1} p &\longleftrightarrow q <_{S_0} f^{-1}(p) \end{aligned}$$

für $p \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{rng}(f)$. Setze: $f_{n+1} = f \cup \{\langle q', q\rangle\}$.
Durch Induktion auf n folgt: $f_n \supset f_j$ für $j \leq n$. Setze: $f = \bigcup\limits_n f_n$. Offensichtlich:

(1) $\quad f \subset U_1 \times U_0$ ist eine eineindeutige Funktion und $f : S_0 \mid \mathrm{dom}(f) \overset{\sim}{\to} S_1$.

(2) $\quad \mathrm{dom}(f) = U_0$.

Beweis. Agenommen nicht.
Sei k minimal mit $p_k^0 \notin \mathrm{dom}(f)$. Dann gibt es ein n mit: $p_h^0 \in \mathrm{dom}(f_n)$ für $h < k$. O.B.d.A. sei n gerade. Nach der Definition von f_{n+1} folgt dann aber: $p_k^0 \in \mathrm{dom}(f_{n+1})$. Widerspruch!
QED(2)

Genau das gleiche Argument zeigt aber:

(3) $\quad \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{rng}(f) = U_1$

QED(Lemma 3.6.5)

Definition. $s = \langle u, r\rangle$ ist ein *halbgeordnetes System* gdw. $r \subset u^2$ eine *Halbordnung* ist – d.h.

(a) $\quad \neg x\, r\, x$

(b) $\quad (x\, r\, y \wedge y\, r\, z) \longrightarrow x\, r\, z$

für alle x, y, z.

Wie gewöhnlich schreiben wir:

$$x <_s y \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} x\, r\, y, \quad x \leq_s y \longleftrightarrow (x\, r\, y \vee x = y)$$

Es gilt dann: $(x \leq_s y \wedge y \leq_s x) \longrightarrow x = y$.
Es folgt jedoch *nicht*, daß $x \leq_s y \vee y \leq_s x$ für $x, y \in u$.

Definition. Sei $s = \langle u, r\rangle$ ein halbgeordnetes System. Sei $X \subset u$.

$$\sup_s X = \begin{cases} \text{dasjenige } a \in u \text{ mit: } a \leq_s b \longleftrightarrow \bigwedge x \in X \;\; x \leq_s b \\ \qquad \text{für alle } b \in u, \text{ falls es ein solches gibt;} \\ \qquad \text{sonst undefiniert} \end{cases}$$

$$\inf_s X = \begin{cases} \text{dasjenige } a \in u \text{ mit: } b \leq_s a \longleftrightarrow \bigwedge x \in X \;\; b \leq_s x \\ \qquad \text{für alle } b \in u, \text{ falls es ein solches } a \text{ gibt;} \\ \qquad \text{sonst undefiniert} \end{cases}$$

(**Bemerkung.** Es kann höchstens ein a geben mit $a \leq_s b \longleftrightarrow \bigwedge x \in X \quad x \leq_s b$ für $b \in u$, denn setzen wir voraus, daß dauch a' diese Eigenschaft hat, so ist $\bigwedge x \in X \quad x \leq_s a, a'$, also $a \leq_s a' \wedge a' \leq_s a$. Also $a = a'$. Entsprechendes gilt für die Definition von $\inf_s X$.)

Definition. $S = \langle U, R \rangle$ sei ein LS. S ist *vollständig* gdw.

(a) Falls $X \neq \emptyset$ nach oben beschränkt ist (d.h. $\bigvee y \bigwedge x \in X \quad x \leq_s y$), so existiert $\sup_S X$.

(b) Falls $X \neq \emptyset$ nach unten beschränkt ist, so existiert $\inf_S X$.

Lemma 3.6.6 *Sei $S = \langle U, R \rangle$ ein LS mit $U \neq \emptyset$. S ist vollständig gdw. für alle $X, Y \subset U$ mit $\bigwedge x \in X \bigwedge y \in Y \quad x \leq_S y$ ein $z \in U$ existiert mit: $\bigwedge x \in X \bigwedge y \in Y \quad x \leq_S z \leq_S y$.*

Beweis.
($\rightarrow$) Falls $X = \emptyset$, so gilt die Behauptung für beliebiges $z \in U$. Sonst nehme man $z = \sup_S X$.

($\leftarrow$) Sei X nach oben beschränkt, $X \neq \emptyset$. Setze: $Y = \{y \mid \bigwedge x \in X \quad x \leq_S y\}$. Sei $z \in U$ mit $\bigwedge x \in X \bigwedge y \in Y \quad x \leq_S z \leq_S y$.

Behauptung. $z = \sup_S X$.

Beweis. Für $b \in U$ haben wir:

$$z \leq_S b \longrightarrow \bigwedge x \in X \quad x \leq_S z \leq_S b,$$
$$\bigwedge x \in X \quad x \leq_S b \longrightarrow b \in Y \longrightarrow z \leq_S b.$$

Die Existenz von $\inf_S X$ für $X \neq \emptyset$ nach unten beschränkt folgt in ähnlicher Weise.

QED(Lemma 3.6.6)

Definition. s sei eine DO. S heiße eine *Vervollständigung von s* gdw. $s \subseteq S$ dicht in S ist und S vollständig ist.

Lemma 3.6.7 *Jede DO besitzt eine Vervollständigung.*

Beweis. Sei $s = \langle u, r \rangle$ eine DO. Wir konstruieren zunächst ein $S' = \langle U', R' \rangle$ derart, daß S' vollständig ist und es eine Einbettung $f : s \xrightarrow{\sim} S'$ gibt mit $f''u$ dicht in S'. Wir definieren:

$$U' = \{X \subset u \mid \emptyset \neq X \neq u \wedge <_s {}''X \subset X \wedge X \text{ hat kein Maximum in } s\}$$
$$X\, R'\, Y \longleftrightarrow (X, Y \in U' \wedge X \subsetneqq Y).$$

(1) S' ist ein LS.

Beweis. $\neg X\, R'\, X$ und die Transitivität von R' sind trivial. Wir bemerken auch, daß $X \leq_{S'} Y \leftrightarrow X \subset Y$ für $X, Y \in U'$. Zu zeigen bleibt:

$$X \leq_{S'} Y \vee Y \leq_{S'} X \qquad \text{für } X, Y \in U'.$$

Sei $X \not\subset Y$.

Behauptung. $Y \subset X$.

Sei $x \in X \setminus Y$. Sei $y \in Y$. Da $<_s {}''X \subset X$ genügt es zu zeigen: $y \leq_s x$. Wenn nicht, dann $x <_s y \in Y$, folglich $x \in Y$. Widerspruch! QED(1)

Setze $f(x) = \{y \mid y <_s x\}$ für $x \in u$. Trivialerweise folgt:

(2) $f : s \overset{\sim}{\to} S'$.

(3) $f''u$ liegt dicht in S'.

Beweis.
(a) Sei $X <_{S'} Y$. Sei $y \in Y \setminus X$. Da Y kein Maximum hat, existiert $y' \in Y$ mit $y <_s y'$. Folglich $X <_{S'} f(y') <_{S'} Y$.
(b) Sei $X \in U'$. Sei $x \in X$. Dann $f(x) <_{S'} X$. Sei $y \in u \setminus X$. Sei $y' >_s y$. Dann $X < f(y')$.
QED(3)

(4) S' ist vollständig.

Beweis. Sei $Z, W \subset U'$ mit: $Z \neq \emptyset$ und $\bigwedge X \in Z \bigwedge Y \in W \quad X \leq_S Y$. Setze $\tilde{Z} = \bigcup Z$. Dann $\tilde{Z} \in U'$ und $X \subset \tilde{Z} \subset Y$ für $X \in Z$, $Y \in W$. QED(4)

Sei $\alpha \geq \mathrm{rn}(u)$. Dann $\langle \alpha, x\rangle \notin u$ für alle x. $F : U' \longrightarrow \mathbf{V}$ sei definiert durch:

$$F(X) = \begin{cases} \langle \alpha, X\rangle & \text{falls } X \notin f''U \\ f^{-1}(X) & \text{sonst.} \end{cases}$$

F ist dann injektiv. Setze: $U = F''U'$, $X\,R\,Y \leftrightarrow (X, Y \in U \wedge F^{-1}(X)\,R'\,F^{-1}(Y))$. $S = \langle U, R\rangle$ ist dann vollständig, da $F : S' \overset{\sim}{\leftrightarrow} S$. S ist dann aber eine Vervollständigung von s, denn $s \subseteq S$ (da $Ff = \mathrm{id} \restriction s : s \overset{\sim}{\to} S$) und $u = F''f''u$ ist dicht in S.QED(Lemma 3.6.7)

Lemma 3.6.8 *Sei S eine Vervollständigung von s. Sei $a \in S$. Dann $a = \sup_S\{x \mid x \in s \wedge x \leq_S a\} = \inf_S\{x \mid x \in s \wedge a \leq_s x\}$.*

Beweis. Sei $X = \{x \mid x \in s \wedge x \leq_S a\}$. Wir beweisen: $a = \sup X$. $\sup X \leq a$ ist trivial, da $\bigwedge x \in X \quad x \leq a$. Wenn $a \not\leq \sup X$, dann $\sup X < a$ und es gibt $x \in s$ mit $\sup X < x < a$. Also $x \in X$ und $x \leq \sup X$. Widerspruch! QED(Lemma 3.6.8)

Lemma 3.6.9 *Sei $f : s_0 \overset{\sim}{\leftrightarrow} s_1$, wobei s_h eine DO mit Vervollständigung S_h ist $(h = 0, 1)$. Es gibt genau ein $F : S_0 \overset{\sim}{\leftrightarrow} S_1$ mit $F \restriction s_0 = f$.*

Beweis.
Existenz. Für $a \in S_0$ setze: $X^0_a = \{x \in s_0 \mid x \leq_{S_0} a\}$; $F_0(a) = \sup_{S_1} f''X^0_a$. Für $a \in S_1$ setze: $X^1_a = \{x \in s_1 \mid x \leq_{S_1} a\}$; $F_1(a) = \sup_{S_0} f^{-1}{}''X^1_a$. Dann:

(1) $X^1_{F_0(a)} = f''X^0_a$.

Beweis. $(\supset)$ ist trivial.
$(\subset)$ Sei $y \in X^1_{F_0(a)}$, $y = f(x)$.
Behauptung. $x \in X^0_a$.
Wenn nicht, dann $a <_{S_0} x$. Also existiert $z \in s_0$ mit: $a <_{S_0} z <_{S_0} x$. Also $f(w) <_{S_1} f(z) <_{S_1} y$ für $w \in X^0_a$. Also $F_0(a) \leq_{S_1} f(z) <_{S_1} y \leq_{S_1} F_0(a)$. Widerspruch!
QED(1)

Dann ist aber:

(2) $F_1F_0(a) = \sup_{S_0} f^{-1}f''X^0_a = \sup_{S_0} X^0_a = a$

nach Lemma 3.6.8. Ebenso gilt:

(3) $F_0 F_1(a) = a$ für $a \in S_1$.

Wir haben also

(4) $a \leq_{S_0} b \longrightarrow F_0(a) \leq_{S_1} F_0(b)$

da $X_a^0 \subset X_b^0$. Ebenfalls:

(5) $a \leq_{S_1} b \longrightarrow F_1(a) \leq_{S_0} F_1(b)$.

Also:

(6) $F_0(a) \leq_{S_1} F_0(b) \longrightarrow a = F_1 F_0(a) \leq_{S_0} F_1 F_0(b) = b$

F_0 ist ein Isomorphismus nach (4), (6). Weiterhin gilt $F \upharpoonright s_0 = f$, da für $a \in s_0$ folgt:
$f(a) = f(\sup_{S_0} X_a^0) = f(\sup_{s_0} X_a^0) = \sup_{s_1} f''X_a^0 = \sup_{S_1} f''X_a^0 = F(a)$. QED(Existenz)

Eindeutigkeit. F habe die Eigenschaft. Dann
$F(a) = F(\sup X_a^0) = \sup F''X_a^0 = \sup f''X_a^0 = F_0(a)$. Also $F = F_0$. QED(Lemma 3.6.9)

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

Die Reellen Zahlen

Als Beispiele für die obigen Begriffe: $\langle\omega, <\rangle$ ist eine Teilstruktur von $\mathbb{Z} = \langle|\mathbb{Z}|, <\rangle$, wobei $|\mathbb{Z}|$ die Menge der *ganzen Zahlen* mit der dazugehörigen Ordnung ist. $\mathbb{Z}$ ist wiederum eine Teilstruktur der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \langle|\mathbb{Q}|, <\rangle$. $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare DO und ist eine Teilstruktur der *reellen Zahlen* $\mathbb{R} = \langle|\mathbb{R}|, <\rangle$. $\mathbb{R}$ ist außerdem die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$.

Da aber die Mengenlehre einen Rahmen für die gesamte Mathematik bilden soll, obliegt es uns hier, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wirklich zu definieren. Ebenfalls müssen wir die für ω definierten Operationen $+$ (Plus), $\cdot$ (Mal) auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ausweiten. $\mathbb{Z}$ bildet bez. dieser Operationen einen *Ring* und $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bilden *Körper*. Zuerst die relevanten Definitionen:

Definition. $G = \langle U, +\rangle$ ist eine *Abelsche Gruppe* gdw.

(a) $+ : U^2 \longrightarrow U$

(b) $a + b = b + a$ für $a, b \in G$

(c) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für $a, b, c \in G$

(d) Es gibt $0 = 0_G \in U$ mit: $a + 0 = a$ für $a \in G$
(0 ist also eindeutig, denn wenn auch $0'$ die Eigenschaft hat, so folgt $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$.)

(e) Zu $a \in U$ existiert $b \in U$ mit: $a + b = 0$.

Bemerkung. Es gibt genau ein $b \in U$ mit $a + b = 0$, denn wenn $a + b' = 0$, so $b' = a + b + b' = a + b' + b = b$.

Wir setzen:

$$-a = \text{ dasjenige } b \text{ mit } a + b = 0$$
$$a - d = a + (-d).$$

Wie man leicht sieht, gilt:

$$a = b - c \longleftrightarrow a + c = b.$$

Es gilt auch $- - a = a$, denn

Definition. $R = \langle U, +, \cdot\rangle$ ist ein *Ring* gdw.

(a) $\langle U, +\rangle$ ist eine Abelsche Gruppe

(b) $\cdot : U^2 \longrightarrow U$

(c) $a \cdot b = b \cdot a$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für $a, b, c \in U$

(d) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ für $a, b, c \in U$

Bemerkungen.

(i) $a \cdot 0 = 0$, denn $aa = a(a + 0) = aa + a0$.

(ii) $-(ab) = a \cdot (-b)$, denn $ab + a \cdot (-b) = a \cdot (b - b) = a \cdot 0 = 0$.

Definition. $K = \langle U, +, \cdot\rangle$ ist ein *Körper* gdw.

(a) K ist ein Ring.
(b) $K' = \langle U \setminus \{0\}, \cdot \restriction (U \setminus \{0\})^2 \rangle$ ist eine Abelsche Gruppe.

Falls K ein Körper ist, setzen wir:

$$1 = 0_{K'}, \qquad a^{-1} = (-a)_{K'} \qquad \text{für} \qquad a \in K'$$
$$b/a = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} \qquad \text{für} \qquad b \in K,\ a \in K'.$$

Es gilt also: $a = b/c \longleftrightarrow ac = b$ für $a, b \in K$, $c \in K'$.

Satz 3.6.10 *Es gibt einen Ring $\mathbb{Z} = \langle |\mathbb{Z}|, +, \cdot \rangle$ mit:*
(a) $\omega \subset |\mathbb{Z}|$ *und* $(n+m)_\omega = (n+m)_{\mathbb{Z}}$, $(n \cdot m)_\omega = (n \cdot m)_{\mathbb{Z}}$.
(b) $|\mathbb{Z}| = \omega \cup \{-n \mid n \in \omega\}$.
Setzen wir $a < b \longleftrightarrow b - a \in \omega \setminus \{0\}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist $\langle |\mathbb{Z}|, < \rangle$ eine lineare Ordnung mit:

$$\langle \omega, < \rangle \subseteq \langle |\mathbb{Z}|, < \rangle.$$

Beweis. Wir konstruieren zuerst einen Ring $\mathbb{Z}^*$ und eine Einbettung $f : \omega \to \mathbb{Z}^*$.

Definition. Eine Relation $\sim$ auf ω^2 sei definiert durch:

$$\langle n, m \rangle \sim \langle p, q \rangle \longleftrightarrow_{\mathrm{Df}} n + q = p + m.$$

(Wäre $\mathbb{Z}$ schon gegeben, so hätten wir also $\langle n, m \rangle \sim \langle p, q \rangle \longleftrightarrow n - m = p - q$.)
Trivialerweise folgt:

(1) (a) $a \sim a$ für $a \in \omega^2$
(b) $a \sim b \longrightarrow b \sim a$

(2) Sei $r \geq m, q$. Dann

$$\langle n, m \rangle \sim \langle p, q \rangle \longleftrightarrow (r + n) - m = (r + p) - q$$

Beweis. $r+n-m = r+p-q \longleftrightarrow r+n+q = r+p+n \longleftrightarrow n+q = p+q \longleftrightarrow \langle m, n \rangle \sim \langle p, q \rangle$
QED

(3) $a \sim b \sim c \longrightarrow a \sim c$

Beweis. Sei $a = \langle n, m \rangle$, $b = \langle p, q \rangle$, $c = \langle s, t \rangle$. Sei $r \geq m, q, s$.
Dann $r + n - m = r + p - q = r + s - t$. QED(3)

Definition. $[a] = \{b \mid b \sim a\}$ für $a \in \omega^2$.

Also $[a] = [b] \longleftrightarrow a \sim b$.

Definition. $|\mathbb{Z}^*| = \{[a] \mid a \in \omega^2\}$.

Wir schreiben auch: $[n, m] = [\langle n, m \rangle]$.

Definition. $\langle n, m \rangle + \langle p, q \rangle = \langle n + p, m + q \rangle$

(4) $(a \sim b \wedge c \sim d) \longrightarrow a + c \sim b + d$

Beweis. Sei $a = \langle m, n\rangle$, $b = \langle p, q\rangle$, $c = \langle m', n'\rangle$, $d = \langle p', q'\rangle$
$(m + q = p + n \wedge m' + q' = p' + n') \longrightarrow (m + m') + (q + q') = (p + p') + (n + n')$ QED(4)

Definition. $[a] + [b] = [a + b]$ für $a, b \in \omega^2$.

(5) $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{Z}^*$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} = [m, n]$, $\mathfrak{b} = [p, q]$, $\mathfrak{c} = [r, s]$. Dann:

$$[m + (p + r), n + (q + r)] = [(m + p) + r, (n + q) + r]$$

(6) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$

Beweis. $[m + n, p + q] = [n + m, q + p]$

Definition. $-\langle m, n\rangle = \langle n, m\rangle$

(7) $a \sim b \longleftrightarrow -a \sim -b \quad (a, b \in \omega^2)$

Beweis. Sei $a = \langle m, n\rangle$, $b = \langle p, q\rangle$. $a \sim b \longleftrightarrow m + q = p + n \longleftrightarrow n + p = q + m$ QED

Definition. $-[a] = [-a] \quad (a \in \omega^2)$

Definition. $0 = 0_{\mathbb{Z}^*} = [0, 0]$

(8) (a) $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$
(b) $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = 0$

Beweis. Trivial.

$\langle |\mathbb{Z}|^*, +\rangle$ ist also eine Abelsche Gruppe.

Definition. $f(n) = [n, 0]$ für $n \in \omega$.

(9) $f : \omega \xrightarrow{1-1} |\mathbb{Z}^*|$ mit $f(n + m) = f(n) + f(m)$

Beweis. Trivial.

Definition. $m \cdot \langle n, p\rangle = \langle mn, mp\rangle$

(10) (a) $a \sim b \longrightarrow ma \sim mb$ für $a, b \in \omega^2$
(b) $(m + n)a = ma + na$ für $a, b \in \omega^2$

Beweis. Sei $a = \langle p, q\rangle$, $b = \langle s, t\rangle$.
$a \sim b \longleftrightarrow p + t = s + q \longrightarrow mp + mt = ms + mq \longrightarrow ma \sim mb$
$(m + n)a = \langle (m + n)p, (m + n)q\rangle = \langle mp + np, mq + nq\rangle = ma + na.$ QED(10)

Definition. $n \cdot [a] = [n, a]$ für $a \in \omega^2$

(11) $\langle n, m\rangle \sim \langle n', m'\rangle \longrightarrow n\mathfrak{a} - m\mathfrak{a} = n'\mathfrak{a} - m'\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a} \in |\mathbb{Z}^*|$

Beweis. $\langle n, m\rangle \sim \langle n', m'\rangle \longleftrightarrow n + m' = n' + m \longrightarrow n\mathfrak{a} + m'\mathfrak{a} = n'\mathfrak{a} + m\mathfrak{a} \longrightarrow$
$\longrightarrow n\mathfrak{a} - m\mathfrak{a} = n'\mathfrak{a} - m'\mathfrak{a}$ QED(11)

Definition. $[n,m]\cdot\mathfrak{a} = n\mathfrak{a} - m\mathfrak{a} \quad (\mathfrak{a} \in |Z^*|)$

Also:

(12) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$

Beweis. $[n,m]\cdot[p,q] = [np+mq, nq+mp]$ QED

(13) $n(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = n\mathfrak{a} + n\mathfrak{b}$

Beweis. $n([p,q]+[r,s]) = n[p+r,q+s] = [np+nr, nq+ns] = [np+nq]+[nr,ns] =$
$= n[p,q]+n[r,s]$. QED

(14) $n(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (n\mathfrak{a})\mathfrak{b}$

Beweis. $n([p,q]\mathfrak{b}) = n(p\mathfrak{b}-q\mathfrak{b}) = np\mathfrak{b} - nq\mathfrak{b} = [np,nq]\mathfrak{b} = (n[p,q])\mathfrak{b}$. QED

(15) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$

Beweis. $[n,m](\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = n(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) - n(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (n\mathfrak{b}-m\mathfrak{b}) - (n\mathfrak{c}-m\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$. QED

(16) $f(n\cdot m) = f(n)\cdot f(m)$

Beweis. $f(n)\cdot f(m) = [n,0]\cdot[m,0] = [nm,0] = f(n\cdot m)$. QED

$\mathbb{Z}^*$ ist also ein Ring und f respektiert die Operationen $+$, $\cdot$.

(17) $\mathbb{Z}^* = \{f(n) \mid n \in \omega\} \cup \{-f(n) \mid n \in \omega\}$.

Beweis. Sei $[m,n] \in \mathbb{Z}^+$. Falls $m \geq n$: $[m,n] = [m-n,0] = f(m-n)$.
Falls $m \leq n$: $[m,n] = [0,n-m] = -f(n-m)$. QED(17)

Offensichtlich ist $\langle 1,x\rangle \notin \omega$ für alle x (da $\{1\} \notin \omega$). $F : |\mathbb{Z}^*| \to \mathbf{V}$ sei definiert durch:

$$F(a) = \begin{cases} \langle 1,a\rangle & \text{falls } a \notin \mathrm{rng}(f) \\ f^{-1}(a) & \text{sonst.} \end{cases}$$

F ist also injektiv. Setze: $|\mathbb{Z}| = F''|\mathbb{Z}^*|$; $\quad a+b = F(F^{-1}(a)+F^{-1}(b))$;
$a\cdot b = F(F^{-1}(a)\cdot F^{-1}(b))$ für $a,b \in |\mathbb{Z}|$. Dann ist $\mathbb{Z}$ ein Ring.
Da $Ff = \mathrm{id} \restriction \omega$ folgt:

(18) (a) $\omega \subset \mathbb{Z}$
(b) $(n+m)_\omega = (n+m)_{\mathbb{Z}}$
(c) $(n\cdot m)_\omega = (n\cdot m)_{\mathbb{Z}}$
(d) $\mathbb{Z} = \omega \cup \{-n \mid n \in \omega\}$.

Definition. $a < b \longleftrightarrow b - a \in \omega \setminus \{0\}$

(19) $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ ist ein LS.

Beweis.
(i) $a \not< a$, da $a - a = 0$.
(ii) Sei $a < b < c$. Dann $b-a, c-b \in \omega \setminus \{0\}$. Also $c - a = (c-b)+(b-a) \in \omega \setminus \{0\}$. Also $a < c$.

(iii) $a - b = 0 \vee a - b \in \omega \setminus \{0\} \vee b - a = -(a-b) \in \omega \setminus \{0\}$.
Also $a = b \vee b < a \vee a < b$. QED(19)

(20) $(n-m)_\omega = (n-m)_{\mathbb{Z}}$ für $n > m$, denn $p = n - m \longleftrightarrow p + m = n$ in ω und $\mathbb{Z}$.
(Also $0 = (n-n)_\omega = (n-n)_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$)

Aber dann:

(21) $\langle \omega, < \rangle \subseteq \langle \mathbb{Z}, < \rangle$

Beweis. $n <_\omega m \longrightarrow m - n \in \omega \setminus \{0\} \longrightarrow n <_{\mathbb{Z}} m$
$n \not<_\omega m \longrightarrow m \leq_\omega n \longrightarrow m \leq_{\mathbb{Z}} n \longrightarrow n \not<_{\mathbb{Z}} m$. QED(Satz 3.6.10)

Definition. $|a| = \left\{ \begin{array}{rl} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{sonst} \end{array} \right\}$ für $a \in \mathbb{Z}$.

Also: $|a| \in \omega$; $|a - b| = |-(b-a)| = |b - a|$

Lemma 3.6.11
(i) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Beweis.
Fall 1 $a, b \geq 0$. Dann

$$|a| \cdot |b| = a \cdot b = |a \cdot b|; \qquad |a| + |b| = a + b = |a + b|$$

Fall 2 $a, b \leq 0$

$$ab = (-|a| \cdot -|b|) = |a||b| \in \omega. \text{ Also } ab = |ab|.$$
$$|a + b| = |-|a| + -|b|| = |-(|a| + |b|)| = |a| + |b|$$

Fall 3 $a \leq 0 \leq b$

$$|a \cdot b| + |-|a| \cdot |b|| = |-(|a||b|)| = |a||b|$$
$$|a + b| = |b - |a|| \leq |b| \leq |b| + |a|.$$ QED

Korollar 3.6.12 $||a| - |b|| \leq |a + b|$

Beweis. $|a| = |(a+b) - b| \leq |a + b| + b$. Also $|a| - |b| \leq |a + b|$. QED

Bemerkung. $(m-n)_\omega = (n-m)_{\mathbb{Z}}$ für $n \geq m$, denn

$$p = n - m \longrightarrow p + m = n \qquad \text{in } \omega, \mathbb{Z}.$$

Sei $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Es gibt höchstens ein c mit: $bc = a$, denn aus $a = bc = bc'$ folgt: $b(c - c') = 0$, also $c - c' = 0$. Existiert ein solches c, so nennen wir a *teilbar durch* b und setzen: $\frac{a}{b} = c$. Wir wollen nun $\mathbb{Z}$ zu einem Körper $\mathbb{Q}$ erweitern. (In $\mathbb{Q}$ ist also $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ immer definiert für $b \neq 0$.)

Satz 3.6.13 *Es gibt* $\mathbb{Q} = \langle |\mathbb{Q}|, +, \cdot, < \rangle$ *mit:*

(i) $\langle |Q|, < \rangle$ *ist eine DO.*

(ii) $\langle |\mathbb{Q}|, +, \cdot \rangle$ *ist ein Körper.*

(iii) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ – *d.h. für* $a, b \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$(a+b)_{\mathbb{Z}} = (a+b)_{\mathbb{Q}}, \quad (a \cdot b)_{\mathbb{Z}} = (a \cdot b)_{\mathbb{Q}}, \quad a <_{\mathbb{Z}} b \longleftrightarrow a <_{\mathbb{Q}} b.$$

(iv) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.

(v) $a < b \longleftrightarrow b - a > 0$ *für* $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung. Aus (iii) folgt für $a, b \in \mathbb{Z}$: $(a-b)_{\mathbb{Z}} = (a-b)_{\mathbb{Q}}$, denn $c = a-b \longleftrightarrow c+b = a$ gilt sowohl in $\mathbb{Z}$ also $\mathbb{Q}$. Also $0 = a - a = 0_{\mathbb{Q}}$. Für a teilbar durch b gilt: $(a/b)_{\mathbb{Z}} = (a/b)_{\mathbb{Q}}$. denn $c = a/b \longleftrightarrow cb = a$. Also $1 = \frac{a}{a} = 1_{\mathbb{Q}}$.

Beweis von Satz 3.6.13:
Wir konstruieren zunächst einen Körper $\mathbb{Q}^*$. Setze: $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Definition. $\sim \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ sei definiert durch:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \longleftrightarrow ad = cb.$$

Trivialerweise:

(1) $x \sim x$, $x \sim y \longleftrightarrow y \sim x$ für $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$

(2) Sei $e \neq 0$ teilbar durch $b, d \neq 0$.

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \longleftrightarrow ea/b = ec/d$$

Beweis. $ea/b = ec/d \longleftrightarrow ead = ecb \longleftrightarrow ad = cd$ QED

(3) $x \sim y \sim z \longrightarrow x \sim z$

Beweis. wie vorhin nach (2).

Definition. $[x] = \{y \mid y \sim x\}$ für $x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$.

$$|\mathbb{Q}^*| = \{[x] \mid x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'\}.$$

Wir schreiben auch: $[a, b] = [\langle a, b \rangle]$.

Definition. $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle$

(4) $(x \sim y \wedge z \sim w) \longrightarrow xz \sim yw$

Beweis. Sei $x = \langle a, b \rangle$, $y = \langle c, d \rangle$, $z = \langle a', b' \rangle$, $y' = \langle c', d' \rangle$. Dann
$(ad = cb \wedge a'd' = c'b') \longrightarrow (aa')(dd') = (cc')(bb')$. QED(4)

Definition. $[x] \cdot [y] = [x \cdot y] \quad (x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')$

(5) (a) $\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{z} \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathbb{Q}^*)$
(b) $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{Q}^*)$

Beweis. wie vorhin

Definition. $0 = 0_{\mathbb{Q}^*} = [0, 1]$ (Also $0 = [0, b]$ für $b \neq 0$)

(6) $\mathfrak{x} \cdot 0 = 0$ (Beweis trivial.)

Definition. $1 = 1_{\mathbb{Q}^*} = [1, 1]$

(7) $\mathfrak{x} \cdot 1 = 1$ (Beweis trivial.)

Definition. $\langle a, b\rangle^{-1} = \langle b, a\rangle$ für $a, b \in \mathbb{Z}'$.

(8) $x \sim y \longleftrightarrow x^{-1} \sim y^{-1}$ für $x, y \in (\mathbb{Z}')^2$

Beweis. wie vorhin.

Definition. $[x]^{-1} = [x^{-1}]$ für $x \in (\mathbb{Z}')^2$.

(**Bemerkung.** Hiermit ist die Operation $\mathfrak{x}^{-1}$ auf $\mathbb{Q}^* \setminus \{0\}$ definiert, denn $[0, b] = 0$ und $[a, b] \neq 0$ für $a \neq 0$.)

(9) $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}^{-1} = 1$ für $\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^* \setminus \{0\}$

Beweis. wie vorhin.

$\langle |\mathbb{Q}^*| \setminus \{0\}, \cdot\rangle$ ist also eine Abelsche Gruppe.
Setzen wir $f(a) = [a, 1]$ für $a \in \mathbb{Z}$, so ist: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = [ab, 1]$ und $f(0) = [0, 1] = 0_{\mathbb{Q}^*}$. Trivialerweise:

(10) $\langle a, b\rangle \sim \langle ea, eb\rangle$ für $a \in \mathbb{Z}$, $e, b \in \mathbb{Z}'$.

Folglich:

(11) Sei $x_i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Es gibt $a_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $b \in \mathbb{Z}'$ mit:

$$x_i \sim \langle a_i, b\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Sei $x_i = \langle a_i', b_i'\rangle$. Setze: $b = \prod_i b_i'$, $a_i = a_i' \cdot \prod_{j \neq i} b_j'$. QED(11)

(12) $(\langle a, d\rangle \sim \langle a', d'\rangle \wedge \langle b, d\rangle \sim \langle b', d'\rangle) \longrightarrow \langle a + b, d\rangle \sim \langle a' + b', d'\rangle$

Beweis. $(ad' = a'd \wedge bd' = b'd) \longrightarrow (a + b)d' = (a' + b')d$. QED

Wir können also eine Operation auf $(\mathbb{Q}^*)^2$ definieren durch:

Definition. Sei $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{Q}^*$, $\mathfrak{x} = [a, d]$, $\mathfrak{y} = [b, d]$. Dann $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = [a + b, d]$.

(13) (a) $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x}$
(b) $\mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z}$

Beweis. Trivial.

(14) $\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{z})$

Beweis. $[a,b]([c,d]+[e,d]) = [a,b] \cdot [c+e,d] = [ac+ae,bd] = [ac,bd]+[ae,bd] =$
$= ([a,b] \cdot [c,d]) + ([a,b] \cdot [e,d])$. QED

(15) $[a,b]+[c,d] = [ad+cb,bd]$

Beweis. $[a,b] = [ad,bd]$, $[c,d] = [cb,bd]$. QED

(16) $\langle a,d\rangle \sim \langle a',d'\rangle \longrightarrow \langle -a,d\rangle \sim \langle -a',d'\rangle$

Beweis. Trivial.

Definition. $-[a,d] = [-a,d]$.

(17) $\mathfrak{x} + (-\mathfrak{x}) = 0$

Beweis. Trivial.

$\mathbb{Q}^* = \langle |\mathbb{Q}^*|, +, \cdot\rangle$ ist also ein Körper.

(18) $f(a+b) = f(a)+f(b) = [a+b,1]$

Beweis. Trivial.

(19) $\mathbb{Q}^* = \left\{\dfrac{f(a)}{f(b)} \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}'\right\}$.

Beweis. $[a,b] = [a,1] \cdot [1,b] = f(a) \cdot f(b)^{-1}$.

Offensichtlich gilt: $\langle 2,x\rangle \notin \mathbb{Z}$ für alle x.

Definition. $F : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbf{V}$ sei definiert durch:

$$F(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \langle 2,\mathfrak{x}\rangle & \text{falls } \mathfrak{x} \notin f''\mathbb{Z} \\ f^{-1}(\mathfrak{x}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze: $|\mathbb{Q}| = \operatorname{rng}(F)$. Für $a,b \in |\mathbb{Q}|$:

$$\begin{aligned} a+b &= F(F^{-1}(a)+F^{-1}(b)) \\ a \cdot b &= F(F^{-1}(a) \cdot F^{-1}(b)). \end{aligned}$$

Da $Ff = \mathrm{id} \restriction \mathbb{Z}$, erhalten wir:

(20) (a) $\mathbb{Q} = \langle |\mathbb{Q}|, +, \cdot\rangle$ ist ein Körper
(b) $(a+b)_{\mathbb{Z}} = (a+b)_{\mathbb{Q}}$, $(a \cdot b)_{\mathbb{Z}} = (a \cdot b)_{\mathbb{Q}}$ für $a,b \in \mathbb{Z}$
(c) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}'\}$.

Wir definieren jetzt die natürliche Ordnung $<=<_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$. Zunächst definieren wir die Menge der *positiven* Zahlen in $\mathbb{Q}$:

Definition. $P = \{\frac{n}{m} \mid n,m > 0\}$

(21) Sei $x \in \mathbb{Q}$. x erfüllt genau eine der folgenden Bedingungen: $x = 0$, $x \in P$, $-x \in P$.

Beweis. Sei $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann $x = \frac{-a}{-b}$ und wir können o.B.d.A. annehmen: $b > 0$.

Fall 1 $a = 0$. Dann $x = 0$. Also $x = -x \notin P$, denn falls $0 = \frac{n}{m}$, so folgt $0 = m \cdot 0 = n$. Widerspruch!

Fall 2 $a > 0$. Dann $x \in P$. Also $-x \notin P$, denn für $-x = \frac{m}{n}$ haben wir $x = \frac{m}{-n}$, also $mb = -an < 0$. Widerspruch!

Fall 3 $a < 0$. Dann $-x = \frac{-a}{b} \in P$ und $x = -(-x) \notin P$ nach Fall 2. QED(21)

Definition. $a < b \longleftrightarrow b - a \in P \quad (a, b \in \mathbb{Q})$

(22) $\langle |\mathbb{Q}|, < \rangle$ ist ein LS.

Beweis.
(i) $a \not< a$, da $a - a = 0$.
(ii) $a < b < c \longrightarrow a < c$.

Beweis. Sei $b - a = \frac{m}{n}$, $c - b = \frac{p}{q}$. Dann $c - a = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn} \in P$.

(iii) $a < b \vee b < a \vee b = a$, denn $a - b = 0 \vee a - b \in P \vee b - a = -(a - b) \in P$. QED(22)

(23) $\langle |\mathbb{Q}|, < \rangle$ ist eine DO.

Beweis.
(i) Sei $a < b$. Dann $a < a + \frac{b - a}{2} < b$
(ii) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann $a - 1 < a < a + 1$. QED(23)

Schließlich bemerken wir, daß $a < a \longleftrightarrow a = (a - 0) \in P$. Also: $a < b \longleftrightarrow b - a > 0$. Es gilt auch $P \cap \mathbb{Z} = \omega \setminus \{0\}$, denn $a = \frac{m}{n} \rightarrow na = m \rightarrow a \in \omega \setminus \{0\}$. Also
$a <_{\mathbb{Z}} b \longleftrightarrow a <_{\mathbb{Q}} b$. QED(Satz 3.6.13)

Das soeben definierte $\mathbb{Q}$ heißt *Körper der rationalen Zahlen*.

Definition. $|a| = \left\{ \begin{array}{rl} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{sonst} \end{array} \right\}$ für $a \in \mathbb{Q}$.

Wie vorhin: $|ab| = |a||b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

Lemma 3.6.14 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \omega$.

Beweis.
($\geq$) $\mathbb{Q}$ ist unendlich.

($\leq$) $\overline{\overline{\mathbb{Z}}} \leq \omega + \omega = \omega$. Es gibt $F : \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}' \rightarrow \mathbb{Q}$ definiert durch $F(a, b) = \frac{a}{b}$. Also $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{Z}}} \cdot \overline{\overline{\mathbb{Z}}}' \leq \omega \cdot \omega = \omega$. QED

Satz 3.6.15 *Es gibt* $\mathbb{R} = \langle |\mathbb{R}|, +, \cdot, < \rangle$ *mit:*

(i) $\langle |\mathbb{R}|, < \rangle$ *ist eine vollständige DO.*

(ii) $\langle |\mathbb{R}|, +, \cdot \rangle$ *ist ein Körper.*

(iii) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ – *d.h. für* $a, b \in \mathbb{Q}$ *ist*

$$(a+b)_{\mathbb{Q}} = (a+b)_{\mathbb{R}}, \quad (a \cdot b)_{\mathbb{Q}} = (a \cdot b)_{\mathbb{R}}, \quad a <_{\mathbb{Q}} b \longleftrightarrow a <_{\mathbb{R}} b.$$

(iv) $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\langle |\mathbb{R}|, < \rangle$ eine Vervollständigung von $\langle |\mathbb{Q}|, < \rangle$. Damit gelten (i), (iv) und der letzte Teil von (iii). Wir müssen Operationen $+$, $\cdot$ auf $\mathbb{R}$ definieren.

(1) Sei $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in P$. Es gibt $s \in \mathbb{Q}$ mit $s < a < s + \varepsilon$.

Beweis. Agenommen nicht.
Dann $s + n\varepsilon < a$ durch Induktion auf n. Sei $\varepsilon \geq \frac{1}{q}$, $m \geq |s|$. Dann:
$n \leq s + (m+n) \leq s + (m+n)q\varepsilon < a$. Also $a \notin \mathbb{R}$. Widerspruch! QED(1)

Definition. $f \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$ *konvergiert* gdw. $\bigwedge \varepsilon \in P \bigvee n \bigwedge i, j \geq n \quad |f(i) - f(j)| < \varepsilon$
$K =_{\mathrm{Df}} \{f \mid f \text{ konvergiert}\}$.

Definition. Sei $f \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$. $a \in \mathbb{R}$ ist ein *Limespunkt* von f gdw.

$$\bigwedge r, s \in \mathbb{Q}(r < a < s \longrightarrow \bigvee n \bigwedge j \geq n \quad f(j) \in (r, s))$$

(2) f hat höchstens einen Limespunkt.

Beweis. Seien a, b Limespunkte, $a < b$. Sei $r < a < s < b < t$; $r, s, t \in \mathbb{Q}$. Sei n mit $\bigwedge j \geq n \quad f(j) \in (r, s)$. Dann $f(j) \notin (s, t)$ für $j \geq n$. Widerspruch!

Definition. $\lim f = \begin{cases} \text{dasj. } a \text{ mit } a \text{ ein Limespunkt von } f & \text{falls solches } a \text{ existiert;} \\ & \text{sonst undefiniert.} \end{cases}$

(3) $f \in K \longleftrightarrow \lim f$ existiert.

Beweis.
($\leftarrow$) Sei $\varepsilon \in P$. Sei $s < a < s + \varepsilon$, $s \in \mathbb{Q}$. Sei $n \in \omega$ mit $\bigwedge j \geq n \quad f(i) \in (s, s+\varepsilon)$. Also $\bigwedge h, j \geq n \quad |f(h) - f(j)| < \varepsilon$.
($\rightarrow$) Setze:

$$\begin{array}{lcllcl} a_n & = & \inf\{f(j) \mid j \geq n\}, & b_n & = & \sup\{f(j) \mid j \geq n\} \\ a & = & \sup\{a_n \mid n < \omega\}, & b & = & \inf\{b_n \mid n < \omega\} \end{array}$$

Für $n \leq m$ gilt also: $a_n \leq a_m \leq a \leq b \leq b_m \leq b_n$.
Behauptung. $a = b$
Agenommen nicht. Dann $a < b$. Sei

$$a < s < t < b, \quad s, t \in \mathbb{Q}.$$

Sei $n \in \omega$ mit $i, j \geq n \longrightarrow |f(i) - f(j)| < \varepsilon$ wobei $\varepsilon = t - s$. Sei $i \geq n$ mit $f(i) < s$ und $j \geq n$ mit $f(j) > t$. Dann $|f(j) - f(i)| > \varepsilon$. Widerspruch! QED(Behauptung)
Behauptung. $a = \lim f$.
Beweis. Sei $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < a < s$. Da $a = \sup\limits_n a_n = \inf\limits_n b_n$, existiert n mit $r < a_n \leq a \leq b_n < s$. Also $i \geq n \longrightarrow f(i) \in [a_n, b_n] \subset (r, s)$. QED(3)

Definition. Sei $f, g \in K$. $f \sim g \longleftrightarrow \bigwedge \varepsilon \in P \bigvee n \bigwedge j \geq n \quad |f(i) - f(j)| < \varepsilon$

(4) $f \sim g \longleftrightarrow \lim f = \lim g$

Beweis.
($\leftarrow$) Sei $\varepsilon \in P$. Sei $a = \lim f = \lim g$. Sei $s < a < s+\varepsilon$. Sei $\bigwedge i \geq n \quad f(i), g(i) \in (s, s+\varepsilon)$. Dann $\bigwedge i \geq n \quad |f(i) - g(i)| < \varepsilon$.
($\rightarrow$) Agenommen nicht.
Sei $a = \lim f < \lim g = b$. Sei $a < r < s < b$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Sei $\varepsilon = s - r$. Sei $r' < a < r$, $s < b < s'$. Sei $n \in \omega$ mit:

$$\begin{aligned} i \geq n &\longrightarrow |f(i) - g(i)| < \varepsilon \\ i \geq n &\longrightarrow f(i) \in (r', r) \\ i \geq n &\longrightarrow g(i) \in (s, s'). \end{aligned}$$

Dann $i \geq n \longrightarrow f(i) < r < s < g(i) \longrightarrow |f(i) - g(i)| > \varepsilon$. Widerspruch! QED(4)

Definition. Seien $f, g \in K$. $f + g \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$ ist definiert durch: $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$.

(5) $f + g \in K$.

Beweis. Sei $j, i \geq n \longrightarrow |f(i) - f(j)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $j, i \geq n \longrightarrow |g(i) - g(j)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann $j, i \geq n \longrightarrow |(f(i) + g(i)) - (f(j) + g(j))| \leq |f(i) - f(j)| + |g(i) - g(j)| < \varepsilon$. QED(5)

(6) $(f \sim f' \wedge g \sim g') \longrightarrow (f + g) \sim (f' + g')$

Beweis. Sei $n \in \omega$ mit: Für $i \geq n$ gilt: $|f(i) - f'(i)|, |g(i) - g'(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$
Dann $|(f(i) + g(i)| - (f'(i) + g'(i))| \leq |f(i) - f'(i)| + |g(i) - g'(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. QED(6)

(7) $\bigwedge a \in \mathbb{R} \bigvee f \in K \quad a = \lim f$.

Beweis. Sei $\langle k_i \mid i < \omega \rangle$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$.
Setze: $f(0) = k_h$, wobei $h = \min\{i \mid k_i < a\}$.
$f(i+1) = k_h$ wobei $h = \min\{j \mid f(i) < k_j < a\}$.
Dann $a = \sup\limits_i f(i)$. Also $a = \lim f$. QED(7)

Definition. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim f$, $b = \lim g$. $a + b =_{\text{Df}} \lim(f + g)$.

(8) $a + b = b + a$

Beweis. Sei $a + b = \lim(f + g)$. Dann $f + g = g + f$. QED(8)

(9) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Beweis. Sei $a = \lim f$, $b = \lim g$, $c = \lim h$.
$a + (b + c) = \lim f + \lim(g+h) = \lim(f + (g+h)) = \lim((f+g) + h) = (a+b) + c$. QED(9)

Definition. Sei $f \in K$. $(-f)(i) = -f(i)$.

(10) $-f \in K$ (trivial)

(11) $f \sim g \longrightarrow -f \sim -g$ (trivial)

(12) $f + (-f) = \text{const}_0$, wobei $\text{const}_r \in {}^\omega\mathbb{Q}$ definiert durch $\text{const}_r(i) = r$ für $r \in \mathbb{Q}$.

(13) $r = \lim \text{const}_r$ für $r \in \mathbb{Q}$

Beweis. Trivial.

Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim f$.

$$-a = \lim(-f).$$

Nach (12), (13):

(14) $a + (-a) = 0$

Da $0 = \lim \text{const}_0 + \text{const}_0 + f = f$:

(15) $a + 0 = 0.$

$\langle |\mathbb{R}|, +\rangle$ ist also eine Abelsche Gruppe. Nach (13) folgt auch:

(16) $(r+s)_{\mathbb{Q}} = r + s \quad$ für $r, s \in \mathbb{Q}$.

Definition. Sei $f, g \in K$. $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$.

(17) $f \cdot g \in K$

Beweis. Sei $a = \lim f$, $b = \lim g$, $r_0 < a < r_1$, $s_0 < b < s_1$, $r_h, s_h \in \mathbb{Q}$.
Setze $\delta = \max\{|r_0|, |r_1|, |s_0|, |s_1|\}$. Sei $n \in \omega$ mit:

$$\begin{aligned} i, j \geq n &\longrightarrow |f(i) - f(j)|, |g(i) - g(j)| < \frac{\varepsilon}{2\delta} \\ i \geq n &\longrightarrow f(i) \in (r_0, r_1),\ g(i) \in (s_0, s_1) \end{aligned}$$

Für $i, j \geq n$ gilt also:
$|f(i) \cdot g(i) - f(j)g(j)| \leq |f(i)g(i) - f(i)g(j)| + |f(i)f(j) - f(j)g(j)| <$
$< |f(i)||g(i) - g(j)| + |g(j)||f(i) - f(j)| < \delta(|f(i) - f(j)| + |g(i) - g(j)|) < \varepsilon$ QED(17)

(18) $(f \sim f' \wedge g \sim g') \longrightarrow f \cdot g \sim f' \cdot g'$.

Beweis. Sei $a = \lim f$, $b = \lim g$, $r_0 < a < r_1$, $s_0 < b < s_1$, $r_h, s_h \in \mathbb{Q}$.
Setze: $\delta = \max\{|r_0|, |r_1|, |s_0|, |s_1|\}$. Sei $n \in \omega$ mit:

$$\begin{aligned} i \geq n &\longrightarrow |f(i) - f'(i)|, |g(i) - g'(i)| < \frac{\varepsilon}{2\delta} \\ i \geq n &\longrightarrow f(i) \in (r_0, r_1),\ g'(i) \in (s_0, s_1). \end{aligned}$$

Für $i \geq n$ gilt:
$|f(i)g(i) - f'(i)g'(i)| \leq |f(i)g(i) - f(i)g'(i)| + |f(i)g'(i) - f'(i)g'(i)| \leq$
$\leq |f(i)||g(i) - g'(i)| + |g'(i)||f(i) - f'(i)| \leq \delta_i(|g(i) - g'(i)| + |f(i) - f'(i)|) < \varepsilon$. QED(18)

Definition. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim f$, $b = \lim g$. $\quad a \cdot b = \lim(f \cdot g)$.

(19) $a \cdot b = b \cdot a$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Beweis. wie vorhin, da z.B. $f(g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Definition. $K' = \{f \in K \mid \bigwedge i \quad f(i) \neq 0\}$.
Für $f \in K'$ setze: $(f^{-1})(i) = (f(i))^{-1}$ (Also $\bigwedge i \quad f^{-1}(i) \neq 0$).

(20) $f^{-1} \in K$ (also $f^{-1} \in K'$).

Beweis. Sei $a = \lim f$, $r < a < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Sei $\delta = \max(|r|, |s|)$.
Sei: $i, j \geq n \longrightarrow |f(i) - f(j)| < \delta^2 \varepsilon$
$i \geq n \longrightarrow f(i) \in (r, s) \longrightarrow |f(i)| < \delta$.
Dann $i \geq n \longrightarrow |f^{-1}(i) - f^{-1}(j)| = \left|\dfrac{f(j) - f(i)}{f(i)f(j)}\right| < \dfrac{|f(i) - f(j)|}{\delta^2} < \varepsilon$. QED(20)

(21) $f \sim g \longrightarrow f^{-1} \sim g^{-1}$

Beweis. Sei $a = \lim f = \lim g$. Sei r, s, δ wie oben.
Sei $i \geq n \longrightarrow |f(i) - g(i)| < \delta^2 \varepsilon$
$i \geq n \longrightarrow f(i), g(i) \in (r, s)$.
Dann $i \geq n \longrightarrow |f^{-1}(i) - g^{-1}(i)| = \left|\dfrac{g(i) - f(i)}{f(i)g(i)}\right| < \varepsilon$ QED(21)

(22) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \bigvee f \in K' \quad a = \lim f$

Beweis. Sei $a = \lim g$, $a \in (r, s)$ wobei $0 \notin (r, s)$. Sei $i \geq n \longrightarrow g(i) \in (r, s)$. Setze $f(i) = g(i)$ für $i \geq n$, $f(i) = 1$ für $i < n$. Dann $a = \lim f$. QED(22)

Definition. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a = \lim f$, $f \in K'$.

$$a^{-1} =_{\mathrm{Df}} \lim f^{-1}$$

(23) $a \cdot a^{-1} = 1, \quad a \cdot 1 = a \quad$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beweis. Trivial.

(24) $\langle |\mathbb{R}|, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper.

(25) $(r \cdot s)_{\mathbb{Q}} = (r \cdot s)_{\mathbb{R}}$ für $r, s \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Trivial, da $r = \lim \mathrm{const}_r$.

QED(Satz 3.6.15)

Lemma 3.6.16 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^\omega$.

Beweis.
($\leq$) $a \in \mathbb{R} \longrightarrow a = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\} = F(\{r \in Q \mid r < a\})$
Also $\mathbb{R} = F''X$, $X \subset \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$. $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{P}(\mathbb{Q})}} \leq 2^\omega$. QED($\leq$)

($\geq$) Für $f \in {}^{\omega}2$ definieren wir: $\langle I_f^n \mid n \in \omega \rangle$ mit $I_f^n = [a_f^n, b_f^n]$ durch:

$$I_f^0 = [0,1], \qquad I_f^{n+1} = \begin{cases} \left[a_f^n, a_f^n + \dfrac{(b_f^n - a_f^n)}{3}\right] & \text{falls } f(n) = 0 \\ \left[b_f^n - \dfrac{(b_f^n - a_f^n)}{3}, b_f^n\right] & \text{falls } f(n) = 1. \end{cases}$$

Dann: $n \leq m \longrightarrow a^n \leq a^m \leq b^m \leq b^n$. Also $n \leq m \longrightarrow I_f^m \subset I_f^n$.
Aber: $(f \restriction = g \restriction n \wedge f(n) \neq g(n)) \longrightarrow I_f^{n+1} \cap I_g^{n+1} = \emptyset$.
Setzt man: $I_f = \bigcap\limits_n I_f^n$, so folgt: $f \neq g \longrightarrow I_f \cap I_g = \emptyset$. Aber: $I_f = [a_f, b_f]$, wobei:

$$a_f = \sup_n a_f^n, \qquad b_f = \inf_n a_f^n.$$

(**Bemerkung.** $a_f = b_f$, denn $b_f - a_f \leq \inf\limits_n (b_f^n - a_f^n) = 0$.)

Setzt man: $F(f) = a_f$, so folgt: $F : {}^{\omega}2 \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$. QED(Lemma 3.6.16)

Im folgenden benutzen wir $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ als Symbole für $\langle |\mathbb{Z}|, < \rangle$, $\langle |\mathbb{Q}|, < \rangle$, $\langle |\mathbb{R}|, < \rangle$. (Also $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$).

Lemma 3.6.17 *Sei $S = \langle |S|, R \rangle$ ein LS mit:*

(a) *S ist vollständig.*

(b) *Es gibt ein abzählbares X, welches in S dicht liegt.*

Dann $S \cong \mathbb{R}$.

Beweis. Setze $s = \langle X, R \cap X^2 \rangle$. s ist dann eine DO. Also existiert $f : s \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \mathbb{Q}$. S ist aber eine Vervollständigung von s und $\mathbb{R}$ ist eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. Also existiert $F \supset f$ mit: $F : S \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \mathbb{R}$. QED(Lemma 3.6.17)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Das Souslinsche Problem

Souslin fragte, ob man (b) ersetzen kann durch:

(b′) S ist dicht und erfüllt die *abzählbare Kettenbedingung* (CCC).

Wir definieren:

Definition. Sei S ein LS.

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_S \quad = \quad \text{die Intervalle in } S = \text{ die Menge der } I \subset S \text{ mit:}$$
$$\bigwedge xy\,(x, y \in I \longrightarrow (x, y) \subset I) \wedge \overline{\overline{I}} \geq 2$$

$A \subset \mathcal{I}$ ist eine *Antikette* in $\mathcal{I}$ gdw. $\bigwedge I, I' \in A\,(I \neq I' \longrightarrow I \cap I' = \emptyset)$

S erfüllt CCC $\longleftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ Jede Antikette ist höchstens abzählbar.

Definition. S ist ein *Souslin Kontinuum* (SK) gdw.

(a) S ist eine vollständige DO.

(b) S erfüllt CCC.

(c) $S \ncong \mathbb{R}$.

Die *Souslinsche Hypothese* (SH) besagt: Es gibt kein SK.

Kapitel 4

Die relative Konsistenz von AC bezüglich ZF

Ziel dieses Kapitels ist ein Nachweis der relativen Konsistenz von dem Auswahlaxiom AC bzgl. der Theorie ZF. In §3.2 haben wir erwähnt, daß wir beispielsweise "$\mathbf{H} \vDash \varphi$" als eine Formel der ZF-Sprache darstellen können. Wir werden das hier präzisieren, was uns dann den Nachweis der Verträglichkeit von AC mit ZF ermöglichen wird.

4.1 Die Relativierung von Formeln

In §3.4 haben wir gesehen, daß On^2 versehen mit der lexikographischen Ordnung $<_*$ ein stark wohlgeordnetes System vom Ordnungstyp On bildet (siehe Korollare 3.4.15 und 3.4.16). Die folgende Funktion, bekannt als die *Gödelsche Paarfunktion*, ist also wohldefiniert.

Definition. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ definieren wir $\prec\alpha, \beta\succ =_{\mathrm{Df}} F(\alpha, \beta)$, wobei F der Mostowski-Kollaps von $\langle \mathrm{On}^2, <_* \rangle$ ist. Wir definieren außerdem:

$$(\gamma)_0 =_{\mathrm{Df}} \iota\alpha(\bigvee \beta \quad \gamma = \prec\alpha, \beta\succ)$$
$$(\gamma)_1 =_{\mathrm{Df}} \iota\beta(\bigvee \alpha \quad \gamma = \prec\alpha, \beta\succ)$$

für $\gamma \in \mathrm{On}$.

Die folgende Definiton erlaubt uns endliche Folgen von Ordinalzahlen in einer einzelnen Ordinalzahl zu verschlüsseln. Wohlbemerkt ist das n in dieser Definition keine Variable; wir haben also das folgende Definitionsschema:

Definition. Für $n \geq 1$ sei $F_n : \mathrm{On}^n \longleftrightarrow \mathrm{On}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} F_1 &= id{\restriction}\mathrm{On} \\ F_{n+1}(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle) &= F(\alpha_1, F_n(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})). \end{aligned}$$

Also $F = F_2$.

Definition. $\prec\alpha_1 \ldots, \alpha_n\succ = F_n(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)$

Definition. Für $\gamma \in \mathrm{On}$ und $i < n$ setzen wir:

$$(\gamma)_i^n =_{\mathrm{Df}} \iota\alpha(\bigvee \beta_0 \ldots \beta_{i-1}\beta_{i+1} \ldots \beta_n \quad \gamma = \prec\beta_0, \ldots, \beta_{i-1}, \alpha, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{n-1}\succ).$$

Dann gilt: $\gamma = \prec(\gamma)_0^n, \ldots, (\gamma)_{n-1}^n\succ$ und $(\gamma)_h = (\gamma)_h^2$ für $h = 0, 1$.

Wir führen nun die Relativierung von Formeln nach einer Klasse ein. Die Idee ist, zu einer gegebenen Formel φ eine solche zu finden, die dasselbe wie φ ausdrückt, wenn das Universum auf einen kleineren Individuenbereich eingeschränkt wird.

Definition. Sei φ eine Formel der Sprache E und A ein Term. Die *Relativierung* von φ nach A wird wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{array}{rcl}
(v \dot{=} w)_A & =_{\mathrm{Df}} & (v = w) \\
(v \dot{\in} w)_A & =_{\mathrm{Df}} & (v \in w) \\
(\psi e \chi)_A & =_{\mathrm{Df}} & (\psi_A e \chi_A) \\
(\neg\psi)_A & =_{\mathrm{Df}} & \neg(\psi_A) \\
(\bigwedge v\ \psi)_A & =_{\mathrm{Df}} & \begin{cases} \bigwedge v \in A\ \psi_A & \text{falls } v \notin \mathrm{Fr}(A); \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases} \\
(\bigvee v\ \psi)_A & =_{\mathrm{Df}} & \begin{cases} \bigvee v \in A\ \psi_A & \text{falls } v \notin \mathrm{Fr}(A); \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}
\end{array}$$

Dabei ist natürlich z.B. $\bigwedge v \in A\ \psi =_{\mathrm{Df}} \bigwedge v\,(v \in A \longrightarrow \psi)$. Man sieht, daß die Relativierung nicht immer definiert ist, weil nämlich der Fall auftreten kann, daß die gebundene Variable frei in dem Term A vorkommt. Jedoch durch Induktion über den Formelaufbau kann gezeigt werden, daß es zu jedem φ eine gebundene Umbennung φ' gibt, so daß die Relativierung von φ' nach A definiert ist. Außerden haben wir $\mathrm{E}_0 \vdash \varphi'_A \longleftrightarrow \varphi''_A$, falls φ' und φ'' beide gebundene Umbenennungen von φ sind.

Der Bequemlichkeit halber treffen wir die folgende Vereinbarung:

Definition. $\varphi_A =_{\mathrm{Df}} \varphi'_A$ für eine geeignete gebundene Umbenennung von φ.

In Abschnitt 3.2 bei dem Nachweis davon, daß $\mathrm{H} = H_\omega$ ein Modell von E_2 ist, hat sich herausgestellt, daß sich die Gültigkeit mancher Formeln zwischen **H** und **V** übertragen läßt. Wenn eine Formel diese Eigenschaft bzgl. zweier Terme besitzt, sagen wir, daß sie *absolut* bzgl. dieser Terme ist. Wir zeigen zunächst, daß eine gewisse Klasse von Formeln zwischen transitiven Termen absolut ist, was uns an einer späteren Stelle hilfreich sein wird.

Definition. $\Sigma_0 =_{\mathrm{Df}}$ die kleiste Menge X von E-Formeln mit:

(a) $\mathrm{Pfml} \subset \Sigma_0$

(b) $\varphi \in \Sigma_0 \longrightarrow \neg\varphi \in \Sigma_0$

(c) $\varphi, \psi \in \Sigma_0 \longrightarrow (\varphi\, e\, \psi) \in \Sigma_0 \quad$ für $e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

(d) $\varphi \in \Sigma_0 \longrightarrow \bigwedge v \in w\ \varphi,\ \bigvee v \in w\ \varphi\ \in \Sigma_0$ für $v, w \in \mathrm{Vbl}$.

Bemerkung. Man kann Beweise auch induktiv über den Aufbau der Σ_0-Formeln führen.

Satz 4.1.1 (E_0) (Σ_0-Absolutheit)
Sei $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ eine Σ_0-Formel, wobei $v_1, \ldots, v_n \notin \mathrm{Fr}(A)$, und A ein Term. Dann gilt:

$$\mathrm{E}_0 \vdash A \textit{ ist transitiv } \longrightarrow \bigwedge v_1 \ldots v_n \in A\ (\varphi \longleftrightarrow \varphi_A).$$

Beweis. Der Beweis läuft per Induktion über den Aufbau der Σ_0-Formeln.
FALL 1: $\varphi \in$ Pfml. In diesem Fall gilt sogar: $\varphi = \varphi_A$.
FALL 2: $\varphi = \neg\psi$. $\neg\psi \overset{\text{(I.V.)}}{\longleftrightarrow} \neg(\psi_A) \longleftrightarrow (\neg\psi)_A$.
FALL 3: $\varphi = \psi e \chi$. $(\psi e \chi) \overset{\text{(I.V.)}}{\longleftrightarrow} (\psi_A e \chi_A) \longleftrightarrow (\psi e \chi)_A$ für $e = \wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow$.
FALL 4: $\varphi = \bigvee x \in v_i\ \psi$, $\psi = \psi(x, v_1, \ldots, v_n)$, wobei $x \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Nach Induktionsvorausetzung gilt: $\bigwedge x v_1 \ldots v_n \in A\ (\psi \longleftrightarrow \psi_A)$. Sei also $x, v_1, \ldots, v_n \in A$. Dann $v_i \subset A$, da A transitiv ist. Folglich haben wir:

$$\begin{aligned}
\bigvee x \in v_i\ \psi &\longleftrightarrow \bigvee x \in A\ (x \in v_i \wedge \psi) \\
&\overset{\text{(I.V.)}}{\longleftrightarrow} \bigvee x \in A\ (x \in v_i \wedge \psi_A) \\
&\longleftrightarrow \bigvee x \in A\ (x \in v_i \wedge \psi)_A \\
&\longleftrightarrow \bigvee x\ (x \in v_i \wedge \psi)_A \\
&\longleftrightarrow (\bigvee x \in v_i\ \psi)_A.
\end{aligned}$$

FALL 5: $\varphi = \bigwedge x \in v_i\ \psi$, $\psi = \psi(x, v_1, \ldots, v_n)$. Analog zu Fall 4.

QED

Satz 4.1.2 *Sei A ein Term mit $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$ und φ eine prädikatenlogisch gültige Aussage. Dann $\mathrm{E}_0 \vdash A \neq \emptyset \longrightarrow \varphi_A$.*

Beweis. Wir bringen einen modelltheoretischen Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Setze $X = \mathrm{E}_0 \cup \{A \neq \emptyset, \neg\varphi_A\}$. Dann $\mathrm{con}(X)$. Sei $\mathfrak{B} = \langle |\mathfrak{B}|, \in_{\mathfrak{B}} \rangle$ ein Modell von X. $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|, \in_{\mathfrak{A}} \rangle$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{A}| &= \{a \in |\mathfrak{B}| \mid \mathfrak{B} \models (v \in A)[a]\} \\
\in_{\mathfrak{A}} &= \in_{\mathfrak{B}} \cap |\mathfrak{A}^2|
\end{aligned}$$

Durch Induktion über den Formelaufbau gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi[f] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi_A[f] \text{ für } f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}.$$

Insbesondere: $\mathfrak{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_A$. Da φ prädikatenlogisch gültig ist, folgt $\mathfrak{A} \models \varphi$; also $\mathfrak{B} \models \varphi_A$. Aber $\mathfrak{B} \models \neg\varphi_A$. Widerspruch!

Der folgende Satz wird eine wesentliche Rolle bei dem Nachweis der relativen Konsistenz von AC mit ZF spielen.

Satz 4.1.3 (Levys Relativierungssatz)
Sei $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ eine Formel der E*-Sprache. Dann:*

$$\mathrm{ZF} \vdash \textit{Es gibt beliebig große } \alpha \textit{ mit: } \bigwedge v_1 \dots v_n \in \mathbf{V}_\alpha \, (\varphi \longleftrightarrow \varphi_{\mathbf{V}_\alpha}).$$

Beweis. Der folgende Beweis zeigt sogar ein noch stärkeres Resultat. Rekursiv über den Formelaufbau definieren wir einen Term C_φ derart, daß für $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ beweisbar ist:

(a) C_φ ist abgeschlossen und unbeschränkt in ∞.

(b) Für $\alpha \in C_\varphi$ gilt $\bigwedge v_1 \dots v_n \in \mathbf{V}_\alpha \, (\varphi \longleftrightarrow \varphi_{\mathbf{V}_\alpha})$.

Fall 1: $\varphi = (v \dot{=} w)$, $(v \dot{\in} w)$. Setze $C_\varphi =_{\mathrm{Df}} \mathrm{On}$.
Fall 2: $\varphi = (\psi \, e \, \chi)$ $(e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$. $C_\varphi =_{\mathrm{Df}} C_\psi \cap C_\chi$.
Fall 3: $\varphi = \neg\psi$. $C_\varphi =_{\mathrm{Df}} C_\psi$.
Fall 4: $\varphi = \bigvee v \, \psi$.
O.B.d.A. sei $\mathrm{Fr}(\psi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, also $v \notin \{v_1, \dots, v_n\}$. Setze $D =_{\mathrm{Df}} \{\alpha \mid \bigwedge v_1 \dots v_n \in \mathbf{V}_\alpha \, (\bigvee v \, \psi \longrightarrow \bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi)\}$.

Behauptung: D ist cub.

Abgeschlossenheit. Angenommen, α sei ein Limespunkt von D, $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}_\alpha$ und $\bigvee v \, \psi$. Sei also $\nu < \alpha$, $\nu \in D$ mit: $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}_\nu$. Dann $\bigvee v \, \psi \longrightarrow \bigvee v \in \mathbf{V}_\nu \, \psi \longrightarrow \bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi$.
Unbeschränktheit. Sei $\gamma < \infty$. Wir konstruieren ein $\alpha > \gamma$ mit $\alpha \in D$. Definiere $\sigma : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathrm{On}$ durch:

$$\sigma(v_1, \dots, v_n) =_{\mathrm{Df}} \min\{\alpha \mid \bigvee v \, \psi(v, v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi(v, v_1, \dots, v_n)\}.$$

Für $\delta \in \mathrm{On}$ setze: $\bar{\sigma}(\delta) =_{\mathrm{Df}} \sup \sigma'' \mathbf{V}_\delta$. Rekursiv definieren wir eine Folge durch:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &=_{\mathrm{Df}} \gamma \\ \gamma_{n+1} &=_{\mathrm{Df}} \max(\bar{\sigma}(\gamma_n), \gamma_n + 1) \end{aligned}$$

Setze $\alpha = \sup_{n \in \omega} \gamma_n$. Dann $\alpha > \gamma$ und $\alpha \in D$, denn für $v_1, \dots, v_n$ gilt:
Falls $\bigvee v \;\; \psi(v, v_1, \dots, v_n)$, wobei $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}_{\gamma_i}$, so $\bigvee v \in \mathbf{V}_{\gamma_{i+1}} \, \psi(v, v_1, \dots, v_n)$ und damit $\bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi(v, v_1, \dots, v_n)$.

QED(Behauptung)

Setze $C_\varphi =_{\mathrm{Df}} D \cap C_\psi$.

Fall 5: $\varphi = \bigwedge v \, \psi$. Analog zu Fall 4.

Somit ist C_φ definiert für alle Formeln φ. Man kann nun induktiv über den Formelaufbau leicht nachweisen, daß C_φ cub ist. Die zweite geforderte Eigenschaft wird auch induktiv über den Formelaufbau nachgewiesen. Wir zeigen dies für φ aus Fall 4 (die anderen Fälle sind auch leicht nachzuweisen). Sei $\alpha \in C_\varphi$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}_\alpha$. Dann haben wir:

$$\varphi \;\longleftrightarrow\; \bigvee v \, \psi \;\longleftrightarrow\; \bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi \;\longleftrightarrow\; \bigvee v \in \mathbf{V}_\alpha \, \psi_{\mathbf{V}_\alpha} \;\longleftrightarrow\; \varphi_{\mathbf{V}_\alpha}$$

QED(Levys Relativierungssatz)

4.2 Die Arithmetisierung der Sprache

Wir wollen jetzt die prädikatenlogische Sprache, in der wir arbeiten, verschlüsseln, damit wir auch in der formalen Theorie — verschlüsselt — darüber reden können. Wir geben sozusagen den Symbolen und Formeln der Sprache Namen *innerhalb* der Sprache der Mengenlehre E, mit denen wir arbeiten können. Viele Fragestellungen werden uns hierdurch eröffnet, zum Beispiel Fragen der Beweisbarkeit und relativer Konsistenz. Einer solchen Frage sind wir schon nachgegangen, als wir uns den Nachweis davon, daß die Negation des Unendlichkeitsaxioms mit der Theorie E_2 verträglich ist, angeschaut haben. Jedoch war unserer Beweis davon in §3.2 nicht ganz streng, weil wir nicht bewiesen haben, daß beispielsweise "$\mathbf{H} \models \varphi$" als eine Formel der Sprache E dargestellt werden kann. In diesem Abschnitt wird diese Möglichkeit genauer untersucht.

Der Term "Arithmetisierung" stammt von Gödel, der in der elementaren Zahlentheorie arbeitend die Zeichen und Formeln der Sprache als Zahlen verschlüsselte. Die Zeichen und Formeln unserer Sprache dürfen wir mit Mengen benennen.

Definition.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &=_{\mathrm{Df}} \{x \mid \mathrm{Funk}(x) \wedge \mathrm{dom}(x) \in \omega\} \\ \mathbb{E} &=_{\mathrm{Df}} \{x \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{dom}(x) = 1\} = \{\{\langle u, 0\rangle\} \mid u \in \mathbf{V}\} \end{aligned}$$

Definition. Für $x, z \in \mathbb{Z}$ definieren wir die *Aneinanderreihung* oder *Verkettung* $x^\frown z$ durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(x^\frown z) &=_{\mathrm{Df}} \mathrm{dom}(x) + \mathrm{dom}(z) \\ (x^\frown z)(i) &=_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x(i) & \text{falls } i \in \mathrm{dom}(x); \\ z(i - \mathrm{dom}(x)) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Formal gesehen definieren wir für die obige Definition einen Term Ver durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ver}(y, x, z) \quad \longleftrightarrow \quad & x, y, z \in \mathbb{Z} \wedge \mathrm{dom}(y) = \mathrm{dom}(x) + \mathrm{dom}(z) \wedge \\ & \bigwedge i \in \mathrm{dom}(x)\ (y(i) = x(i)) \wedge \\ & \bigwedge i \in \mathrm{dom}(z)(y(\mathrm{dom}(x) + i) = z(i)) \end{aligned}$$

Bemerkung. $\emptyset \in \mathbb{Z}$ und fungiert wie die leere Zeichenreihe, d. h. $x^\frown\emptyset = x = \emptyset^\frown x$. Der Bequemlichkeit halber werden wir häufig das Verkettungssymbol $^\frown$ weglassen und einfach xz für $x^\frown z$ schreiben.

Definition. $z\mathrm{Teil}x =_{\mathrm{Df}} (z \in \mathbb{Z} \wedge \bigvee u_0, u_1 \in \mathbb{Z}(x = u_0{}^\frown z^\frown u_1 \wedge (u_0 \neq \emptyset \vee u_1 \neq \emptyset))$

$z\mathrm{Teil}x$ besagt also, daß z eine (echte) Teilzeichenreihe von x ist.

Satz 4.2.1 *Die Relation* Teil *ist stark fundiert.*

Beweis. *Mengenähnlichkeit.* Für $z \in \mathrm{Teil}(x)$ ist $z \in \bigcup_{i<\mathrm{dom}(x)} {}^i\mathrm{rng}(x) = \bigcup_{i<\mathrm{dom}(x)}\{f \mid f : i \longrightarrow \mathrm{rng}(x)\}$. Aber ${}^yx = \{f \mid f : y \longrightarrow x\}$, also ${}^yx \subset y \times x$ und somit ${}^yx \in \mathbf{V}$. Also $\{z \mid z\mathrm{Teil}x\} \in \mathbf{V}$.

Fundiertheit. Falls $z \in \mathrm{Teil}(x)$, so $\mathrm{dom}(z) < \mathrm{dom}(x)$. Sei also $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{Z}$. Setze $n = \min\{\mathrm{dom}(z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Sei $z \in A$ mit $\mathrm{dom}(z) = n$. Dann ist z Teil-minimal in A.

QED

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen kanonischen Klassenterm $\dot{n}$ mit $\mathrm{Fr}(\dot{n}) = \emptyset$, der die Zahl n "benennt":

$$\begin{aligned} \dot{0} &=_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \neq x\} \\ (n \dot{+} 1) &=_{\mathrm{Df}} \dot{n} \cup \{\dot{n}\} \end{aligned}$$

Die Zahl ist ein Objekt der Sprache und der kanonische Klassenterm fungiert wie einen Namen oder eine Ziffer für die Zahl. Solche Namen führen wir jetzt auch für die Zeichen unsere Sprache E ein.

Definition.

$$\begin{aligned}
\dot{(} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{0}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{)} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{1}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\wedge} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{2}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\vee} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{3}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\rightarrow} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{4}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\leftrightarrow} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{5}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\neg} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{6}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\bigwedge} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{7}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\bigvee} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{8}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{=} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{9}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{\in} &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{0},\dot{10}\rangle,\dot{0}\rangle\} \\
\dot{v}_i &=_{\mathrm{Df}} \{\langle\langle\dot{1},\dot{i}\rangle,\dot{0}\rangle\} \text{ für } i \in \omega
\end{aligned}$$

Bemerkung. Es geht normalerweise aus dem Zusammenhang hervor, ob wir ein Symbol des Systems ZF oder den Namen davon meinen. Um zu verdeutlichen, daß wir den Namen meinen, setzen wir häufig einen Punkt über das Symbol.

Definition.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vbl} &=_{\mathrm{Df}} \{\dot{v}_i \mid i \in \omega\} && \text{(die Klasse der Variablen)} \\
\mathrm{Pfml} &=_{\mathrm{Df}} \{x^\frown \dot{=}^\frown y \mid x, y \in \mathrm{Vbl}\} && \text{(die Klasse der Primformeln)}
\end{aligned}$$

Definition. Die Klasse der Formeln definieren wir durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fml} =_{\mathrm{Df}} \bigcap\{x \mid \ & \mathrm{Pfml} \subset x \wedge \bigwedge u, v \in x \ (u, v \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{(}^\frown u^\frown \dot{\wedge}^\frown v^\frown \dot{)} \in x) \wedge \\
& \bigwedge u, v \in x \ (u, v \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{(}^\frown u^\frown \dot{\vee}^\frown v^\frown \dot{)} \in x) \wedge
\end{aligned}$$

$$\bigwedge u, v \in x\ (u, v \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{(}{}^\frown u^\frown \dot{\rightarrow}{}^\frown v^\frown \dot{)} \in x) \wedge$$
$$\bigwedge u, v \in x\ (u, v \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{(}{}^\frown u^\frown \dot{\leftrightarrow}{}^\frown v^\frown \dot{)} \in x) \wedge$$
$$\bigwedge u \in x\ (u \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{\neg}{}^\frown u \in x) \wedge$$
$$\bigwedge u \in x \bigwedge i \in \omega\ (u \in \mathbb{Z} \longrightarrow \dot{\bigwedge}{}^\frown \dot{v}_i{}^\frown u,\ \dot{\bigvee}{}^\frown \dot{v}_i{}^\frown u\ \in x)\}$$

Im folgenden werden wir $\varphi, \psi, \chi \ldots$ als Variablen für (den Namen von) Formeln benutzen. Außerdem wird z. B. $\bigwedge \varphi \ldots \varphi \ldots$ als $\bigwedge x\ (x \in \mathrm{Fml} \longrightarrow \ldots x \ldots)$ zu verstehen sein.

Die Namen der Formeln sind, wie die Formeln selber, eindeutig zu lesen.

Satz 4.2.2 (Eindeutige Lesbarkeit)
Für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}$ trifft genau eine der folgenden Bedingungen zu.

(a) $\varphi \in \mathrm{Pfml}$

(b) *Es gibt genau ein Paar* $\langle \psi_0, \psi_1 \rangle \in \mathrm{Fml}^2$ *mit* $\varphi = \dot{(}\psi_0 \dot{\wedge} \psi_1 \dot{)}$.

(c) *Es gibt genau ein Paar* $\langle \psi_0, \psi_1 \rangle \in \mathrm{Fml}^2$ *mit* $\varphi = \dot{(}\psi_0 \dot{\vee} \psi_1 \dot{)}$.

(d) *Es gibt genau ein Paar* $\langle \psi_0, \psi_1 \rangle \in \mathrm{Fml}^2$ *mit* $\varphi = \dot{(}\psi_0 \dot{\rightarrow} \psi_1 \dot{)}$.

(e) *Es gibt genau ein Paar* $\langle \psi_0, \psi_1 \rangle \in \mathrm{Fml}^2$ *mit* $\varphi = \dot{(}\psi_0 \dot{\leftrightarrow} \psi_1 \dot{)}$.

(f) *Es gibt genau ein* $\psi \in \mathrm{Fml}$ *mit* $\varphi = \dot{\neg}\psi$.

(g) *Es gibt genau ein Paar* $\langle i, \psi \rangle \in \omega \times \mathrm{Fml}$ *mit* $\varphi = \dot{\bigwedge} v_i\ \psi$.

(h) *Es gibt genau ein Paar* $\langle i, \psi \rangle \in \omega \times \mathrm{Fml}$ *mit* $\varphi = \dot{\bigvee} v_i\ \psi$.

Dabei sind natürlich auch die Primformeln eindeutig zu lesen.

Definition.

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi) &=_{\mathrm{Df}} \text{ die Menge der unmittelbaren Komponenten von } \varphi \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \varphi \in \mathrm{Pfml}; \\ \{\psi_0, \psi_1\} & \text{falls } \varphi = \dot{(}\psi_0 e \psi_1 \dot{)} \quad e = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \\ \{\psi\} & \text{falls } \varphi = \dot{\neg}\psi \text{ oder } \bigwedge \dot{v}_i\ \psi \text{ oder } \bigvee \dot{v}_i\ \psi. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Relation Θ ist stark fundiert, denn sie ist eine Teilrelation der stark fundierten Relation Teil, d. h. für $\psi, \varphi \in \mathrm{Fml}$ gilt $\psi \in \Theta(\varphi) \longrightarrow \psi \mathrm{Teil} \varphi$. Wegen der starken Fundiertheit von Θ haben wir auch den folgenden Rekursionssatz für Formeln.

Satz 4.2.3 (Rekursionssatz für Formeln) *Sei G ein Term. Es gibt einen Term F derart, daß in der Theorie* ZF *aus der Annahme*

(∗) $G : \mathrm{Fml} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$

folgt:

$$\bigwedge\varphi\ F(\varphi) = G(\varphi, F{\restriction}\Theta(\varphi)).$$

Außerdem gilt $\mathrm{ZF} \vdash (*) \longrightarrow F = F'$, *falls* F' *noch ein solcher Term ist.*
Wir erhalten auch: $\mathrm{Fr}(F) \subset \mathrm{Fr}(G)$.

Mit dem schon bereitgestellten Mittel können wir nun die Begriffe Modell, Belegung und Erfüllungsbeziehung innerhalb der Theorie definieren.

Definition. Ein *Modell* ist ein binäres System $\mathfrak{M} = \langle u, r\rangle$ mit $u \neq \emptyset$. Für die Relation des Systems $\mathfrak{M}$ schreiben wir häufig $\in_{\mathfrak{M}}$.

Definition. $\mathrm{Bel}_{\mathfrak{M}} =_{\mathrm{Df}} \{f \mid f : \mathrm{Vbl} \longrightarrow |\mathfrak{M}|\}$ (die Menge der Belegungen in $\mathfrak{M}$)

Definition. Rekursiv über den Formelaufbau definieren wir die Erfüllungsbeziehung Sat. $\mathrm{Sat}_{\mathfrak{M}}(\varphi)$ wird die Menge der $f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M} \vDash \varphi[f]$ sein.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sat}(v \dot{=} w) &=_{\mathrm{Df}} \{f \in \mathrm{Bel} \mid f(v) = f(w)\}\\
\mathrm{Sat}(v \dot{\in} w) &=_{\mathrm{Df}} \{f \in \mathrm{Bel} \mid f(v) \in_{\mathfrak{M}} f(w)\}\\
\mathrm{Sat}(\varphi \dot{\wedge} \psi) &=_{\mathrm{Df}} \mathrm{Sat}(\varphi) \cap \mathrm{Sat}(\psi)\\
\mathrm{Sat}(\varphi \dot{\vee} \psi) &=_{\mathrm{Df}} \mathrm{Sat}(\varphi) \cup \mathrm{Sat}(\psi)\\
\mathrm{Sat}(\varphi \dot{\to} \psi) &=_{\mathrm{Df}} \mathrm{Sat}(\varphi) \longrightarrow \mathrm{Sat}(\psi)\\
\mathrm{Sat}(\varphi \dot{\leftrightarrow} \psi) &=_{\mathrm{Df}} \mathrm{Sat}(\varphi) \longleftrightarrow \mathrm{Sat}(\psi)\\
\mathrm{Sat}(\dot{\bigwedge} w\ \varphi) &=_{\mathrm{Df}} \{f \in \mathrm{Bel} \mid \bigwedge a \in \mathfrak{M}\ f({}^{w}/_{a}) \in \mathrm{Sat}(\varphi)\}\\
\mathrm{Sat}(\dot{\bigvee} w\ \varphi) &=_{\mathrm{Df}} \{f \in \mathrm{Bel} \mid \bigvee a \in \mathfrak{M}\ f({}^{w}/_{a}) \in \mathrm{Sat}(\varphi)\}
\end{aligned}$$

Dabei sei $f({}^{w}/_{a})(v) = \begin{cases} a & \text{falls } v = w;\\ f(v) & \text{sonst.}\end{cases}$

Wir werden auch die gewöhnliche Schreibweise für die Erfüllungsbeziehung benutzen:

Definition. $\mathfrak{M} \vDash \varphi[f] =_{\mathrm{Df}} f \in \mathrm{Sat}_{\mathfrak{M}}(\varphi)$

Definition. $\mathfrak{M} = \langle u, r\rangle$ ist ein *Standardmodell* gdw. $r = \in \cap\, u^2$.

In diesem Fall schreiben wir auch: $u \vDash \varphi[f]$.

Satz 4.2.4 *Seien* f, g *Belegungen für* $\mathfrak{M}$. *Dann*

$$f{\restriction}\mathrm{Fr}(\varphi) = g{\restriction}\mathrm{Fr}(\varphi) \ \longrightarrow\ (\mathfrak{M} \vDash \varphi[f] \longleftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi[g]).$$

Definition.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \vDash \varphi[{}^{v}/_{a}] =_{\mathrm{Df}} \bigvee n\ (v : n \xrightarrow{1-1} \mathrm{Vbl} \wedge a : n \longrightarrow |\mathfrak{M}| \wedge \mathrm{Fr}(\varphi) \subset \mathrm{rng}(v) \wedge\\
\wedge \bigwedge f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{M}}\ (\bigwedge i < n\ f(v(i)) = a(i) \ \longrightarrow\ \mathfrak{M} \vDash \varphi[f]))
\end{aligned}$$

Definition.

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi[{}^{v_1 \ldots v_n}/a_1 \ldots a_n] \;=_{\mathrm{Df}}\; \begin{array}{l} v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Vbl} \wedge v_1, \ldots, v_n \text{ distinkt } \wedge \\ \mathrm{Fr}(\varphi) \subset \{v_1, \ldots, v_n\} \wedge \bigwedge f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{M}} \; ((f(v_1) \\ = a_1 \wedge \ldots \wedge f(v_n) = a_n) \longrightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi[f]) \end{array}$$

Wenn es klar ist, welche Variablen gemeint sind, schreiben wir auch: $\mathfrak{M} \vDash \varphi[a_1 \ldots a_n]$.

Definition.

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \;=_{\mathrm{Df}}\; \varphi \in \mathrm{Aus} \wedge \bigwedge f \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{M}} \; \mathfrak{M} \vDash \varphi[f]$$

Die folgenden Sätzen zeigen, daß die gerade in ZF formalisierten Erfüllungsbeziehung (für Mengen) in dem Sinne eine vernünftige ist, daß sie mit der Relativierung übereinstimmt.

Satz 4.2.5 (Übergangssatz I) *Sei φ eine Aussage der Sprache* E *und $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash (u \neq \emptyset \longrightarrow (\varphi_u \longleftrightarrow u \vDash \dot{\varphi})).$$

Es folgen noch zwei Verallgemeinerungen dieses Satzes.

Satz 4.2.6 (Übergangssatz II) *Sei φ eine* E-*Formel, $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $u \neq v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash (u \neq \emptyset \wedge f \in \mathrm{Bel}) \longrightarrow (\varphi_u(f(\dot{v_1}), \ldots, f(\dot{v_n})) \longleftrightarrow u \vDash \dot{\varphi}[f]).$$

Satz 4.2.7 (Übergangssatz III) *Sei φ eine* E-*Formel, $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $u \neq v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash u \neq \emptyset \longrightarrow \bigwedge x_1, \ldots, x_n \in u(\varphi_u(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow u \vDash \dot{\varphi}[x_1 \ldots x_n]).$$

Dabei ist im Übergangssatz III $\varphi_u(x_1, \ldots, x_n)$ als $\varphi_u({}^{v_1 \ldots v_n}/x_1 \ldots x_n)$ zu verstehen, also wörtlich zu verstehen, und $u \vDash \dot{\varphi}[x_1 \ldots x_n]$ als $u \vDash \dot{\varphi}[{}^{v_1 \ldots v_n}/x_1 \ldots x_n]$.

Mit Version III haben wir insbesondere:

$$\mathrm{ZF} \vdash u \neq \emptyset \wedge v_1, \ldots, v_n \in u \longrightarrow (\varphi_u \longleftrightarrow u \vDash \dot{\varphi}[v_1 \ldots v_n]).$$

Die Beweise der Übergangssätze laufen per Induktion über den Formelaufbau.

Bemerkung. Die Erfüllungsbeziehung haben wir nur für Mengen, aber es bleibt uns offen, die Relativierung von Formeln nach beliebigen Klassentermen zu betrachten.

Wir zeigen zunächst, daß wir die Formeln der Sprache in natürliche Zahlen verschlüsseln können.

Satz 4.2.8 $\bigwedge n, m < \omega \quad \prec n, m \succ < \omega$.

Beweis. Nach Definition von $\prec\cdot,\cdot\succ$ ist $\prec\alpha,\beta\succ = F(\langle\alpha,\beta\rangle)$, wobei $F : \langle \mathrm{On}^2, <_*\rangle \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \langle \mathrm{On}, <\rangle$. Für $u \in \mathrm{On}^2$ setze $b_u =_{\mathrm{Df}} <_*{}''u$, $F_u =_{\mathrm{Df}} F{\restriction}b_u$, $<_u =_{\mathrm{Df}} <_* \cap b_u^2$ und $s_u =_{\mathrm{Df}} \langle b_u, <_u\rangle$. Dann haben wir $F_u : \langle b_u, <_u\rangle \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \langle \alpha, \in \cap\, \alpha^2\rangle$ nach dem Zählsatz, wobei $\alpha = |s_u| = F(u)$. Insbesondere: b_u endlich $\longleftrightarrow$ $F(u)$ endlich. Aber

$$\langle m', n'\rangle <_* \langle m, n\rangle \longrightarrow m', n' \leq \max(m,n) \longrightarrow \langle m', n'\rangle \in (\max(m,n)+1)^2,$$

wobei $(\max(m,n)+1)^2$ als Kreuzprodukt endlicher Menge selber endlich ist. Also ist $F(\langle n, m\rangle)$ endlich und somit auch $b_{\langle n,m\rangle}$.

Defintion. $e : \mathrm{Fml} \longrightarrow \omega$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned}
e(v_i = v_j) &=_{\mathrm{Df}} \prec 0, \prec i, j\succ\succ \\
e(v_i \in v_j) &=_{\mathrm{Df}} \prec 1, \prec i, j\succ\succ \\
e(\varphi \wedge \psi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 2, \prec e(\varphi), e(\psi)\succ\succ \\
e(\varphi \vee \psi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 3, \prec e(\varphi), e(\psi)\succ\succ \\
e(\varphi \rightarrow \psi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 4, \prec e(\varphi), e(\psi)\succ\succ \\
e(\varphi \leftrightarrow \psi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 5, \prec e(\varphi), e(\psi)\succ\succ \\
e(\neg\varphi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 6, e(\varphi)\succ \\
e(\bigwedge v_i\ \varphi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 7, \prec i, e(\varphi)\succ\succ \\
e(\bigvee v_i\ \varphi) &=_{\mathrm{Df}} \prec 8, \prec i, e(\varphi)\succ\succ
\end{aligned}$$

Satz 4.2.9 (ZF) *e ist injektiv.*

Beweis. Angenommen nicht. Setze $R =_{\mathrm{Df}} \{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi \in \Theta(\psi)\}$. Sei φ R-minimal mit: $\bigvee \psi\ (\psi \neq \varphi \wedge e(\varphi) = e(\psi))$. Sei z.B. $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$. Dann gilt:

$$e(\varphi) = \prec 2, \prec e(\varphi_0), e(\varphi_1)\succ\succ = e(\psi)$$

Folglich gibt es Formeln ψ_0 und ψ_1 mit $\psi = (\psi_0 \wedge \psi_1)$. Außerdem gilt $\prec e(\psi_0), e(\psi_1)\succ = \prec e(\varphi_0), e(\varphi_1)\succ$. Also $e(\varphi_0) = e(\psi_0)$ und $e(\varphi_1) = e(\psi_1)$. Nach R-Minimalität von φ ist $\varphi_0 = \psi_0$ und $\varphi_1 = \psi_1$. Aber das heißt: $\varphi = \psi$. Widerspruch!
(Die anderen Fällen laufen ganz analog.)

QED

4.3 Ordinale Definierbarkeit

Ordinale Definierbarkeit wird im nächsten Abschnitt eine wesentlich Rolle bei dem Nachweis der relativen Konsistenz von AC zu ZF spielen. In diesem Abschnitt führen wir zwei neue Klassenterme ein.

Satz 4.3.1 *Es gibt einen Klassenterm* OD *derart, daß* $\mathrm{Fr}(\mathrm{OD}) = \emptyset$ *und:*

(a) *Es gibt eine Formel $\varphi(y, x)$ mit:*

$$\mathrm{ZF} \vdash \bigwedge y \in \mathrm{OD} \bigvee \alpha\ y = \iota y(\varphi(y,\alpha)).$$

(b) *Sei* $\psi = \psi(y, z_1, \ldots, z_n)$ *eine* E-*Formel. Dann gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash \bigwedge x \bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n \; (x = \iota y(\psi(y, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow x \in \mathrm{OD}).$$

Definition. $\mathrm{OD} : \mathrm{On} \longrightarrow \mathbf{V}$ sei definiert wie folgt:
Sei $F_0 =_{\mathrm{Df}} \{\varphi \in \mathrm{Fml} \mid \mathrm{Fr}(\varphi) \subset \{v_0, v_1\}\}$. Falls $\varphi \in \mathrm{Fml}$, $u \neq \emptyset$, schreiben wir $u \vDash \varphi[a, b]$ für $(a, b \in u \wedge \langle u, \in \cap\, u^2\rangle \vDash \varphi[{}^{v_0 v_1}/_{ab}])$. Außerdem setzen wir:

$$\varphi_n =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} e^{-1}(n) & \text{falls } n \in e''F_0; \\ v_0 = v_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $\langle \varphi_i \mid i \in \omega\rangle$ eine Aufzählung von F_0. Für $\alpha \geq \omega$ sezte $\varphi_\alpha =_{\mathrm{Df}} (v_0 = v_1)$. Definiere $\mathrm{Od}(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{y \mid \mathbf{V}_{(\alpha)^3_0} \vDash \varphi_{(\alpha)^3_1}[y, (\alpha)^3_2]\}$. Die Klasse der *ordinal definierbaren* Mengen wird definiert durch: $\mathrm{OD} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Od}''\mathrm{On}$.

Beweis von Satz 4.3.1. Wir zeigen, daß die Klasse OD beide Bedingungen erfüllt.

(a) Sei $y \in \mathrm{OD}$. Dann gibt es ein α mit $y = \mathrm{Od}(\alpha) = \iota y(y = \mathrm{Od}(\alpha))$.

(b) Annahme: $y = \iota y\; \psi(y, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Behauptung: $y \in \mathrm{OD}$. Setze $\psi' = \psi'(y, x) =_{\mathrm{Df}} (x \in \mathrm{On} \wedge \psi(y, (x)^n_0, \ldots, (x)^n_{n-1})$. Dann $y = \iota y\; \psi(y, \alpha)$, wobei $\alpha = \prec\alpha_1, \ldots, \alpha_n\succ$. Setze $\varphi = \varphi(w_0, w_1) =_{\mathrm{Df}} \bigvee z(w_0 \in z \wedge \psi'(z, w_1))$. Dann $y = \{u \mid \varphi(u, \alpha)\} = \{u \mid \bigvee z(\psi'(z, \alpha) \wedge u \in z)\}$. Nach Levys Relativierungssatz existieren $\beta > \alpha$ und $y \in \mathbf{V}_\beta$ mit:

$$\bigwedge u, w \in \mathbf{V}_\beta(\varphi(u, w) \longleftrightarrow \varphi(u, w)_{\mathbf{V}_\beta} \longleftrightarrow \mathbf{V}_\beta \vDash \dot{\varphi}[u, w])$$

Also $y = \{u \mid \mathbf{V}_\beta \vDash \varphi[u, \alpha]\} = \mathrm{Od}(\gamma)$, wobei $\gamma = \prec\beta, e(\dot{\varphi}), \alpha\succ$. Also $y \in \mathrm{OD}$.

QED

Definition. $\mathrm{HOD} =_{\mathrm{Df}} \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}\}$

Lemma 4.3.2 $(x \subset \mathrm{HOD} \wedge x \in \mathrm{OD}) \longrightarrow x \in \mathrm{HOD}$

Beweis. $\mathrm{TC}(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} \mathrm{TC}(y) = \bigcup_{y \in x} \mathrm{TC}(\{y\}) \subset \mathrm{HOD}$. Also $\mathrm{TC}(\{x\}) = \{x\} \cup \mathrm{TC}(x) \subset \mathrm{OD}$. Folglich $x \in \mathrm{HOD}$.

Lemma 4.3.3 HOD *ist transitiv.*

Beweis. Sei $y \in x \in \mathrm{HOD}$. Dann $y \in \mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{HOD}$.

Lemma 4.3.4 (ZF) *Sei* $u = \iota u\; \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$, *wobei* $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{OD}$. *Dann ist* $u \in \mathrm{OD}$.

Beweis. Sei $x_i = \mathrm{Od}(\alpha_i)$. Dann $u = \iota u\; \psi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wobei $\psi(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) =_{\mathrm{Df}} \varphi(u, \mathrm{Od}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{Od}(\alpha_n))$.

Korollar 4.3.5 *Sei* $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ *ein Term mit* $\mathrm{Fr}(t) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash (y = t \wedge x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{OD}) \longrightarrow y \in \mathrm{OD}.$$

Beweis. $y = \iota y(y = t(x_1, \ldots, x_n))$.

4.4 Das innere Modell HOD

Definition. Ein *inneres Modell* von ZF ist ein Klassenterm W mit:

(a) W ist transitiv.

(b) $\mathrm{On} \subset W$

(c) $\mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{ZF})_W$.

Wir haben schon gesehen, daß HOD transitiv ist. Es enthält auch alle Ordinalzahlen. Wir werden in diesem Abschnitt auch zeigen, daß alle ZF-Sätze relativiert nach HOD in ZF gelten.

Satz 4.4.1 $\mathrm{ZF} \vdash \varphi_{\mathrm{HOD}}$ *für jede* ZF-*Formel* φ, *also ist* HOD *ein inneres Modell von* ZF.

Wir werden eigentlich nachweisen, daß HOD ein Modell der Theorie ZF′ ist, die wir gleich definieren werden und aus der die Theorie ZF folgt. (Die beiden Theorie sind sogar äquivalent.)

Definition. Die Theorie ZF′ habe die folgenden Axiomen:

A1′ (Extensionalität) $\bigwedge x \bigwedge y (\bigwedge w (w \in x \longleftrightarrow w \in y) \longrightarrow x = y)$

A2′ $\bigvee y \bigwedge x\, x \notin y, \quad \bigwedge xz \bigvee y\, x, z \in y, \quad \bigwedge x \bigvee y \bigwedge z \in x\, z \subset y.$

A3′ (Aussonderung) Für E-Formeln $\varphi = \varphi(x, u_1, \dots, u_n)$:

$$\bigwedge u_1 \dots u_n \bigvee y \bigwedge x (x \in y \longleftrightarrow x \in u_1 \wedge \varphi)).$$

A4′ (Beschränkungsaxiom) Für $\varphi = \varphi(x, y, u_1, \dots, u_n)$:

$$\bigwedge u_1 \dots u_n (\bigwedge x \bigvee y \varphi \longrightarrow \bigwedge v \bigvee w \bigwedge x \in v \bigvee y \in w\ \varphi)$$

A5′ (Potenzmengenaxiom) $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge z (z \subset x \longrightarrow z \in y)$

A6′ (Fundierung) Für $\varphi = \varphi(y, u_1, \dots, u_n)$ und $z \neq u_1, \dots, u_n$:

$$\bigwedge u_1 \dots u_n (\bigvee y\ \varphi \longrightarrow \bigvee y (\varphi \wedge \bigwedge z \in y\ \neg\varphi({}^{y}/{}_{z}))).$$

A7′ $\omega \in \mathbf{V}$

Lemma 4.4.2 ZF′ ⊢ ZF.

Beweis. Beide Theorien besitzen dieselben Extensionalitäts-, Aussonderungs- und Fundierungsaxiomen. Sie besitzen auch beide das Unendlichkeitsaxiom. Wir müssen also nur überprüfen, daß in ZF′ die Axiome **A2**, **A3** (das Ersetzungsaxiom) und **A5** (das Potenzmengenaxiom) herleitbar sind.

(4.1) $\quad \mathrm{ZF}' \vdash \emptyset \in \mathbf{V}, \quad \{x, y\} \in \mathbf{V}, \quad \bigcup x \in \mathbf{V}.$

Beweis.

$\emptyset \in \mathbf{V}$: $\emptyset = \iota y\,(\bigwedge x\; x \notin y) \in \mathbf{V}$ wegen Extensionalität und **A2′**.

$\{x, y\} \in \mathbf{V}$: Sei u mit $x, y \in u$. Dann $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\} \cap u \in \mathbf{V}$ nach **A3′**, dem Aussonderungsaxiom.

$\bigcup x \in \mathbf{V}$: Nach **A2′** gibt es ein u mit: $\bigwedge y \in x\; y \subset u$. Also $\bigcup x = u \cap \{z \mid \bigvee y \in x\; z \in y \in x\} \in \mathbf{V}$ nach Aussonderung.

(4.2) $\quad \mathrm{ZF}' \vdash$ Ersetzung

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für alle Terme F und alle $u \in \mathbf{V}$ gilt: $\mathrm{Funk}(F) \longrightarrow F''u \in \mathbf{V}$. Sei also F ein Term mit $\mathrm{Funk}(F)$ und $u \in \mathbf{V}$. Weiterhin sei $\mathrm{Fr}(F) \subset \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $F = \{\langle y, x\rangle \mid \varphi(y, x, u_1, \ldots, u_n)\}$. Dann gilt: $\bigwedge x \bigvee y\; \varphi$. Also gibt es nach dem Beschränkungsaxiom **A4′** ein w mit: $\bigwedge x \bigvee y \in w\; \varphi$. Insbesondere: $F''u \subset w$. Also $F''u = w \cap F''u \in \mathbf{V}$.

(4.3) $\quad \mathrm{ZF}' \vdash \mathfrak{P}(x) \in \mathbf{V}$

Beweis. Nach **A5′** gibt es ein u mit $\bigwedge y\; (y \subset x \longrightarrow y \in u)$. Dann $\mathfrak{P}(x) = u \cap \{z \mid z \subset x\} \in \mathbf{V}$ nach **A3′**.

QED(Lemma 4.4.2)

Beweis von Satz 4.4.1.
Behauptung: Es genügt zu zeigen, daß für ein beliebiges ZF′-Axiom φ gilt: $\mathrm{ZF} \vdash \varphi_{\mathrm{HOD}}$.

Beweis. Sei ψ ein ZF-Axiom und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ZF′-Axiome mit: $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \longrightarrow \psi$. Also:

$$\mathrm{ZF} \vdash ((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \longrightarrow \psi)_{\mathrm{HOD}}$$
$$\mathrm{ZF} \vdash (\varphi_{1\mathrm{HOD}} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n\mathrm{HOD}}) \longrightarrow \psi_{\mathrm{HOD}}.$$

Aber $\mathrm{ZF} \vdash \varphi_{1\mathrm{HOD}} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n\mathrm{HOD}}$. Also $\mathrm{ZF} \vdash \psi_{\mathrm{HOD}}$.

QED(Behauptung)

Lemma 4.4.3 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Extensionalität}_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Die Formel $\bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)$ ist äquivalent mit $\bigwedge z \in x(z \in y) \wedge \bigwedge z \in y(z \in x)$ und somit eine Σ_0-Formel. Also sind die folgenden Formeln äquivalent nach Satz 4.1.1 (Σ_0-Absolutheit):

$$(\bigwedge xy(\bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y))_{\mathrm{HOD}}$$
$$\bigwedge xy \in \mathrm{HOD}(\bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)_{\mathrm{HOD}}$$
$$\bigwedge xy \in \mathrm{HOD}(\bigwedge z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y) \quad \text{(nach } \Sigma_0\text{-Absolutheit).}$$

QED(Lemma 4.4.3)

Lemma 4.4.4 $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{A2}'_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Es gilt: $(\bigvee y \bigwedge x\ x \notin y)_{\mathrm{HOD}} \longleftrightarrow \bigvee y \in \mathrm{HOD} \bigwedge x \in \mathrm{HOD}\ x \notin y$. Außerdem ist $\emptyset \in \mathrm{HOD}$, denn $\emptyset \in \mathrm{OD}$ und $\emptyset \subset \mathrm{HOD}$. Also $\bigwedge x \in \mathrm{HOD}\ x \notin \emptyset$.

Es gilt: $(\bigwedge x, y \bigvee u\ x, y \in u)_{\mathrm{HOD}} \longleftrightarrow \bigwedge x, y \in \mathrm{HOD} \bigvee u \in \mathrm{HOD}\ x, y \in u$. Sei also $x, y \in \mathrm{HOD}$. Dann $\{x, y\} \in \mathrm{OD}$ und $\{x, y\} \subset \mathrm{HOD}$, also $\{x, y\} \in \mathrm{HOD}$.

Wir haben die folgende Kette von äquivalenten Formeln:

$$(\bigwedge x \bigvee y \bigwedge z \in \quad z \subset y)_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge x \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD}\ \bigwedge z \in x \quad z \subset y \qquad \text{(nach } \Sigma_0\text{-Absolutheit)}$$

$$\bigwedge x \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD}\ \bigcup x \subset y.$$

Sei also $x \in \mathrm{HOD}$. Dann $\bigcup x \subset \mathrm{HOD}$ und $\bigcup x \in \mathrm{OD}$. Also $\bigcup x \in \mathrm{HOD}$. QED(Lemma 4.4.4)

Lemma 4.4.5 $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{A3}'_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Gegeben sei eine Formel $\varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$. Die zwei folgenden Formeln sind nach Σ_0-Absolutheit äquivalent:

$$(\bigwedge u_1 \ldots u_n \bigvee y \bigwedge x(x \in y \longleftrightarrow (x \in u_1 \wedge \varphi)))_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge u_1 \ldots u_n \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD} \bigwedge x \in \mathrm{HOD}\ (x \in y \longleftrightarrow (x \in u_1 \wedge \varphi_{\mathrm{HOD}})).$$

Seien also $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{HOD}$. Setze $y = u_1 \cap \{x \mid \varphi_{\mathrm{HOD}}\}$. Dann $y \subset u_1 \subset \mathrm{HOD}$ und $z \in \mathrm{OD}$. Also $y \in \mathrm{HOD}$ und $\bigwedge x \in \mathrm{HOD}\ (x \in y \longleftrightarrow (x \in u_1 \wedge \varphi_{\mathrm{HOD}}))$.

QED(Lemma 4.4.5)

Lemma 4.4.6 $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{A4}'_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Sei $\varphi = \varphi(x, y, u_1, \ldots, u_n)$. Äquivalent sind dann nach Σ_0-Absolutheit:

$$(\bigwedge u_1 \ldots u_n (\bigwedge x \bigvee y\ \varphi \longrightarrow \bigwedge v \bigvee w \bigwedge x \in v \bigvee y \in w\ \varphi))_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge u_1 \ldots u_n \in \mathrm{HOD}(\bigwedge x \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD}\ \varphi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \bigwedge v \in \mathrm{HOD} \bigvee w \in \mathrm{HOD} \bigwedge x \in v \bigvee y \in w\ \varphi).$$

Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{HOD}$, $\bigwedge x \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD}\ \varphi_{\mathrm{HOD}}$ und $v \in \mathrm{HOD}$.
Behauptung: $\bigvee w \in \mathrm{HOD} \bigwedge x \in v \bigvee y \in w\ \varphi_{\mathrm{HOD}}$.
Setze $f(x) =_{\mathrm{Df}} \min\{\mathrm{rn}(y) \mid y \in \mathrm{HOD} \wedge \varphi_{\mathrm{HOD}}\}$, $\alpha = \mathrm{lub} f''v$ und $w = \mathbf{V}_\alpha \cap \mathrm{HOD}$. Dann ist $w \subset \mathrm{HOD}$ und $w \in \mathrm{OD}$. Also $w \in \mathrm{HOD}$. Außerdem gilt: $\bigwedge x \in v \bigvee y \in w\ \varphi_{\mathrm{HOD}}$.

QED(Lemma 4.4.6)

Lemma 4.4.7 $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{A5}'_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Äquivalent sind:

$$(\bigwedge x \bigvee y \bigwedge z(z \subset x \longrightarrow z \in y))_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge x \in \mathrm{HOD} \bigvee y \in \mathrm{HOD} \bigwedge z \in \mathrm{HOD}(z \subset x \longrightarrow z \in y)$$

Sei also $x \in \mathrm{HOD}$ und $y =_{\mathrm{Df}} \mathrm{HOD} \cap \mathfrak{P}(x)$. Dann $y \subset \mathrm{HOD}$ und $y \in \mathrm{OD}$, also $y \in \mathrm{HOD}$. Außerdem gilt: $\bigwedge z \in \mathrm{HOD}(z \subset x \longrightarrow z \in y)$. QED(Lemma 4.4.7)

Lemma 4.4.8 ZF $\vdash$ $\mathbf{A6'}_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Sei $\varphi = \varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$. Äquivalent sind:

$$(\bigwedge u_1 \ldots u_n (\bigvee x\, \varphi \longrightarrow \bigvee x\, (\varphi \wedge \bigwedge z \in x\, \neg\varphi(^x/_z))))_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge u_1 \ldots u_n \in \mathrm{HOD}(\bigvee x \mathrm{HOD}\, \varphi_{\mathrm{HOD}} \longrightarrow \bigvee x \in \mathrm{HOD}\, (\varphi_{\mathrm{HOD}} \wedge \\ \wedge \bigwedge z \in \mathrm{HOD}\, (z \in x \longrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{HOD}}(^x/_z))))$$

Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{HOD}$ und $\bigvee x \in \mathrm{HOD}\, \varphi_{\mathrm{HOD}}$. Setze $A =_{\mathrm{Df}} \{x \mid \varphi_{\mathrm{HOD}}\} \cap \mathrm{HOD}$. Dann $A \neq \emptyset$. Sei $x \in A$ $\in$-minimal in A. Dann $\bigwedge z \in x\; z \notin A$, d. h. $\bigwedge z \in \mathrm{HOD}\, (z \in x \longrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{HOD}}(^x/_z))$. QED(Lemma 4.4.8)

Lemma 4.4.9 ZF $\vdash$ $\mathbf{A7'}_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. $\omega = \iota y\, (y = \omega)$. QED(Lemma 4.4.9)

Also gilt φ_{HOD} für beliebige ZF$'$-Axiome φ, und somit auch für beliebige ZF-Axiome φ.
QED(Satz 4.4.1)

Also ist HOD ein inneres Modell von ZF. Wir zeigen zunächst, daß auch $\mathrm{AC}_{\mathrm{HOD}}$ in ZF gilt.

Lemma 4.4.10 ZF $\vdash$ $\mathrm{AC}_{\mathrm{HOD}}$

Beweis. Wir haben: ZF $\vdash$ AC $\longleftrightarrow$ $\bigwedge x\, (D(x) \longrightarrow \bigvee y\, C(y,x))$, wobei

$$D(x) =_{\mathrm{Df}} \bigwedge y \in x \bigvee z \in y\, (z = z) \wedge \bigwedge yz \in x \bigwedge w \in y\, (w \notin z) \qquad \text{und}$$

$$C(y,x) =_{\mathrm{Df}} \bigwedge z \in x \bigvee w \in y\, (w \in z) \wedge \bigwedge z \in x \bigwedge w, w' \in z\, (w, w' \in y \longrightarrow w = w').$$

$D(x)$ heißt also, daß x eine Menge von nichtleeren Mengen ist, die zusätzlich paarweise disjunkt sind, und $C(y,x)$ heißt, daß y eine Auswahlmenge für x ist.

D und C sind Σ_0. Also sind die folgenden Formeln äquivalent:

$$(\bigwedge x\, (D(x) \longrightarrow \bigvee y\, C(y,x)))_{\mathrm{HOD}}$$

$$\bigwedge x \in \mathrm{HOD}\, (D(x) \longrightarrow \bigvee y \in \mathrm{HOD}\, C(y,x))$$

Sei also $x \in \mathrm{HOD}$ mit $D(x)$. Für $z \in x$ definieren wir

$$\beta(z) = \min\{\beta \mid \mathrm{Od}(\beta) \in z\}.$$

Setze $y =_{\mathrm{Df}} \{\mathrm{Od}(\beta(z)) \mid z \in x\}$. Wir behaupten, daß $y \in \mathrm{HOD}$ und $C(y,x)$. Sei $z \in x$. Dann $\mathrm{Od}(\beta(z)) \in z \cap y$. Seien nun $w, w' \in z \cap y$. Behauptung: $w = w'$. O.B.d.A. sei $w = \mathrm{Od}(\beta(z))$. Falls $w' \neq w$, so $w' = \mathrm{Od}(\beta(z'))$ für ein $z' \in x$, $z' \neq z$. Aber dann $z' \cap z = \emptyset$. Also $w' \notin z$. Widerspruch! Also $C(y,x)$. Außerdem ist $y \in \mathrm{HOD}$, denn mit $x \in \mathrm{HOD}$ ist $y \in \mathrm{OD}$ und $y \subset \bigcup x \subset \mathrm{HOD}$.
QED(Lemma 4.4.10)

Hiermit haben wir die relative Konsistenz von AC mit ZF:

Korollar 4.4.11 $\mathrm{con(ZF)} \longrightarrow \mathrm{con(ZFC)}$

Beweis. Angenommen nicht; sei con(ZF) und ¬con(ZFC). Dann gilt $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ für eine Formel φ. Nach dem Endlichkeitssatz gibt es dann ZFC-Axiome $\psi_1, \ldots, \psi_n$ mit:

$$\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \longrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

Folglich:

$$\mathrm{ZF} \vdash ((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \longrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi)_{\mathrm{HOD}}$$
$$\mathrm{ZF} \vdash ((\psi_{1\mathrm{HOD}} \wedge \ldots \wedge \psi_{n\mathrm{HOD}}) \longrightarrow (\varphi_{\mathrm{HOD}} \wedge \neg\varphi_{\mathrm{HOD}}))$$

Aber $\mathrm{ZF} \vdash \psi_{i\mathrm{HOD}}$ für $i = 1, \ldots, n$. Also $\mathrm{ZF} \vdash \varphi_{\mathrm{HOD}} \wedge \neg\varphi_{\mathrm{HOD}}$, d. h. ¬con(ZF). Widerspruch!
QED(Korollar 4.4.11)