von Schaaffhausen

Skript zur Versicherungsmathematik

zur Vorlesung

Anwendungen der Stochastik auf versicherungsmathematische Probleme

WS 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript soll die Vorlesung über Versicherungsmathematik im WS 2022/2023 an der Humboldt-Universität Berlin begleiten und den Teilnehmern das Verfolgen des Vorgetragenen erleichtern.

Die ersten zwei Kapitel befassen sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und mit Zinsrechnungen, den beiden Grundlagen der Lebens- und Pensionsversicherungs-mathematik. Die zusammengestellten wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe sollen als Bestandsaufnahme der im Weiteren verwendeten Werkzeuge dienen und sollten zum Vorwissen der Teilnehmer zählen. Die Ausführungen über Verzinsung sind ebenso zur Bezugnahme gedacht.

Die Kapitel über Verzinsung (1.), im Bereich Lebensversicherungen über die Verteilung der Lebensdauer (4.1 ausgenommen die Ausführungen über statistische Tests), über Nettoprämien (4.2. und 4.3.) und über das Nettodeckungskapital (4.4) sind sowohl hinsichtlich Stoffauswahl als auch bzgl. Argumentationsaufbau eng angelehnt an die Lehrbücher von Hans U. Gerber „Lebensversicherungsmathematik", Springer –Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, 1986 und „Life Insurance Mathematics" Third Edition 1997, Springer Swiss Association of Actuaries Zürich.

Die Ausführungen über statistische Tests (in Kapitel 4.1.6) entstanden unter Bezugnahme auf die Veröffentlichung von Oehlers-Vogel und Zschoyan in der Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 15, Verlag Versicherungswirtschaft e.V. Karlsruhe, 1985.

Dem Kapitel über Prämienkalkulationsprinzipien (3.4.) lag u.a. das Buch von Asmussen/Albrecher „Ruin Probabilities", World Scientific 2. Auflage 2010, zugrunde.

Erwähnt sei, dass immer dann, wenn in diesem Skript von einer Person die Rede ist und diese in der männlichen Form genannt wird (z.B. der Versicherte), beide Formen, die männliche und die weibliche, gemeint sind.

0. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe definiert, die im Weiteren verwendet werden.

Ihre Darstellung ist zwar Bestandteil dieses Skripts; sie sollen aber größtenteils nicht vorgetragen werden, sondern zur Bezugnahme dienen, für einheitliche Begriffe sorgen und verwendete Symbole einführen. Beweise zu Sätzen dieses Kapitels werden nicht geführt.

0.1. Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum

Es bezeichne Ω eine abstrakte Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ ihre Potenzmenge.
Die Menge der natürlichen Zahlen werde mit IN bezeichnet.
IR stehe für die Menge der reellen Zahlen.
Ø bezeichne die leere Menge.

1.1 Definition. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt **σ-Algebra** (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A} \tag{1.2}$$

Für jede Folge $(A_n)_n$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{A}$. (1.3)

Ein System $\mathcal{A}'$ von Teilmengen von Ω heißt **Teil-σ-Algebra** von $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}'$ eine in $\mathcal{A}$ enthaltene σ-Algebra ist.

Dabei bezeichne A^C das Komplement von A in Ω.

Zu jedem System E von Teilmengen von Ω existiert eine kleinste E enthaltende σ-Algebra $\mathcal{A}(E)$.

1.2 Definition. Man nennt $\mathcal{A}(E)$ die von E in Ω **erzeugte σ-Algebra** und E den **Erzeuger von $\mathcal{A}(E)$.**

Um nachzuweisen, ob ein Mengensystem eine σ-Algebra ist, kann der folgende Begriff nützlich sein.

1.3 Definition. Ein System $\mathcal{D}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt **Dynkin-System** (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Omega \in \mathcal{D} \tag{1.4}$$

$$D, E \in \mathcal{D}, D \subset E \Rightarrow E \setminus D \in \mathcal{D} \tag{1.5}$$

Für jede Folge $(D_n)_n$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{D}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathcal{D}$. (1.6)

1.4 Satz. Ein Dynkin-System $\mathcal{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn mit je zwei Mengen aus $\mathcal{D}$ auch deren Durchschnitt zu $\mathcal{D}$ gehört.

Wie für σ-Algebren gilt: Zu jedem System E von Teilmengen von Ω existiert ein kleinstes E enthaltendes Dynkin-System $\mathcal{D}(E)$. Man nennt $\mathcal{D}(E)$ das von E in Ω **erzeugte Dynkin-System.**

1.5 Satz. E sei eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$. Enthält E mit je zwei Mengen aus E auch deren Durchschnitt, so gilt für das von E erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}(E)$: $\mathcal{D}(E) = \mathcal{A}(E)$

1.6 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und P eine auf $\mathcal{A}$ definierte numerische Funktion. P heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (auf $\mathcal{A}$), wenn gilt:

$$P(\emptyset) = 0 \text{ und } P(\Omega) = 1 \tag{1.7}$$

Für jede Folge $(A_n)_n$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{A}$ ist

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1.8}$$

Eigenschaft (1.8) wird σ-Additivität genannt.

1.7 Definition. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** (kurz W.-Raum).

Die Elemente von Ω heißen **Elementarereignisse**.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **Ereignisse**.

Ω heißt das **sichere Ereignis**.

$\emptyset$ heißt das **unmögliche Ereignis**.

$P(E)$ mit $E \varepsilon \mathcal{A}$ heißt die **Wahrscheinlichkeit von E**.

Der (nicht näher spezifizierte) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt im weiteren stets als vorgegeben – sofern nichts anderes vorausgesetzt wird.

1.8 Satz (Stetigkeit des W-Maßes). Es seien $A_1, A_2, \ldots \varepsilon \mathcal{A}$.
Dann gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i), \qquad \text{falls } A_1 \subset A_2 \subset \ldots \tag{1.9}$$

und

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i), \qquad \text{falls } A_1 \supset A_2 \supset \ldots \tag{1.10}$$

Zum Nachweis: Die Behauptungen folgen direkt aus der σ-Additivität des W-Maßes.

Ein bedeutendes Beispiel bildet die von den halboffenen Intervallen im IR erzeugte σ-Algebra.

1.9 Definition. Die von dem System der halboffenen Intervalle im IR erzeugte σ-Algebra heißt **σ-Algebra der Borelschen Mengen des IR**. Ihre Elemente werden **Borelsche Mengen** genannt.

0.2. **Zufallsvariable**

2.1 Definition. Es sei IB eine σ-Algebra in IR. X sei eine Abbildung von Ω in IR. X heißt **(*A*-IB-) messbar**, wenn gilt:

$X^{-1}(B) \varepsilon A$ für alle $B \varepsilon IB$.

X heißt dann **Zufallsvariable.**

Ist IB die σ-Algebra der Borelschen Mengen des IR, sprechen wir auch von einer **reellen Zufallsvariablen.**

Dabei bezeichne $X^{-1}(B)$ die Urbildmenge von B in Ω: $X^{-1}(B) = \{\omega | \omega\varepsilon\Omega, X(\omega)\varepsilon B\}$.
Für diese Menge wird auch die Bezeichnung $(X\varepsilon B)$ verwendet.

In diesem Skript betrachten wir nur Zufallsvariablen mit Werten in IR, nicht in IR^n mit $n>1$.

2.2 Definition. Für alle $A\varepsilon A$ heißt die Funktion $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ mit $1_A(\omega) = 1$, falls $\omega\varepsilon A$, und sonst $1_A(\omega) = 0$ $(\omega\varepsilon\Omega)$ **Indikatorfunktion.**

2.3 Definition. Eine reellwertige Funktion auf Ω heißt **elementare Zufallsvariable**, wenn sie nicht negativ und *A*-IB-meßbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Dabei sei IB die σ-Algebra der Borelschen Mengen.

Ist $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ die Menge der Werte einer elementaren Zufallsvariable R und $A_i := R^{-1}(r_i)$, $i=1,\ldots,n$; dann gilt:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i 1_{A_i}$$

2.4 Definition. Eine Zufallsvariable X heißt **diskret** (verteilt), wenn sie höchstens abzählbar viele Werte $(x_k)_{k\varepsilon IN}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Die Funktion

$$x_k \to P(X = x_k), \quad \text{für all diese Werte } x_k$$

heißt **Massenfunktion** von X.

2.5 Definition. Eine integrierbare Funktion f: IR->IR heißt **Dichte**, wenn gilt:

$f(x) \geq 0$ für alle $x\varepsilon IR$ und

$\int_{IR} f(x)dx = 1.$

2.6 Definition. Eine reelle Zufallsvariable X heißt **absolutstetig** (verteilt), wenn eine Dichte f existiert, so dass für alle Borelschen Mengen B gilt:

$$P(X\varepsilon B) = \int_B f(x)\, dx \qquad (2.1)$$

Dann wird auch das Wahrscheinlichkeitsmaß B-> P(XεB) **absolutstetig** genannt.

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß wird auch mit P^X bezeichnet.

2.7 Definition. Für eine Zufallsvariable X wird die Funktion F_X: IR -> [0,1] mit

$$x \to F_X(x) := P(X \leq x) \quad (x\varepsilon IR)$$

Verteilungsfunktion von X genannt.

0.3. **Stochastische Unabhängigkeit**

3.1 Definition (Unabhängigkeit von Ereignissen).

Eine Menge von endlich vielen Ereignissen $A_1,\ldots,A_n$ aus $\mathcal{A}$ heißt **stochastisch unabhängig** (bzgl. P), wenn gilt

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n) = P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (3.1)$$

In diesem Fall werden auch die Ereignisse $A_1,\ldots,A_n$ stochastisch unabhängig genannt.

Eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen aus A heißt stochastisch unabhängig (bzgl. P), wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge $\{i_1,\ldots,i_n\}$ von $\mathbb{N}$ gilt:

$$P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_n}) \qquad (3.2)$$

In diesem Fall werden auch die Ereignisse A_1, A_2 ... stochastisch unabhängig genannt.

3.2 Definition (Unabhängigkeit von Teil-σ-Algebren).

Eine Menge von endlich vielen Teil-σ-Algebren $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ von $\mathcal{A}$ heißt stochastisch unabhängig (bzgl. P), wenn für jede mögliche Wahl von Ereignissen $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ die Gleichheit (3.1) gilt.

Eine Folge $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ heißt stochastisch unabhängig (bzgl. P), wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge $\{i_1,\ldots,i_n\}$ von $\mathbb{N}$ und für jede mögliche Wahl von Ereignissen $A_{i_\nu} \in \mathcal{A}_{i_\nu}$ $(\nu=1,\ldots,n)$ die Gleichheit (3.2) gilt.

3.3 Definition (Unabhängige Zufallsvariable).

Eine endliche oder unendliche Folge von Zufallsvariablen heißt stochastisch unabhängig, wenn die Menge der von ihnen erzeugten σ-Algebren stochastisch unabhängig ist.

0.4. **Erwartungswert, Varianz, Kovarianz**

0.4.1. Diskrete Zufallsvariablen

4.1 Definition. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Massenfunktion p_X. Gilt

$$\sum_{\{x \mid p_X(x)>0\}} |x| \; p_X(x) < \infty,$$

so ist der **Erwartungswert** von X definiert durch

$$E(X) := \sum_{\{x \mid p_X(x)>0\}} x \; p_X(x) \tag{4.1.1}$$

4.2 Definition. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Massenfunktion p_X. Gilt

$$\sum_{\{x \mid p_X(x)>0\}} x^2 \, p_X(x) < \infty,$$

so ist die **Varianz** von X definiert durch

$$\mathrm{Var}(X) := E([X - E(X)]^2) \tag{4.1.2}$$

0.4.2. Absolutstetige Zufallsvariablen

4.3 Definition. Sei X eine reelle absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f. Gilt

$$\int_{\mathrm{IR}} |x| \; f(x)\, d\, x < \infty,$$

so ist der **Erwartungswert** von X definiert als

$$E(X) := \int_{\mathrm{IR}} x \; f(x)\, dx. \tag{4.2.1}$$

4.4 Definition. Sei X eine reelle absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f, für die

$$\int_{\mathrm{IR}} x^2 \, f(x)\, dx < \infty,$$

erfüllt ist. Dann ist die **Varianz** von X definiert als

$$\mathrm{Var}(X) := E([X - E(X)]^2) \tag{4.2.2}$$

0.4.3. Diskrete und absolutstetige Zufallsvariablen

Anmerkung: Für diskrete und für absolutstetige Zufallsvariablen X gilt:

$$E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (4.3.1)$$

Die folgenden Definitionen beziehen sich auf diskrete und absolutstetige Zufallsvariablen.

4.5 Definition. Ist X eine Zufallsvariable mit existierender Varianz Var(X), so heißt

$$\sigma(X) := Var(X)^{1/2} \qquad (4.3.2)$$

Standardabweichung von X

4.6 Definition. Seien X und Y Zufallsvariablen mit existierenden Varianzen.
Dann existiert

$$Cov(X,Y) := E([X - E(X)]\,[Y - E(Y)]) \qquad (4.3.3)$$

und wird **Kovarianz** von X und Y genannt.

0.5. **Gesetz der großen Zahlen**

5.1 Satz. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Folge integrierbarer reeller Zufallsvariablen. Gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)\,\mathrm{Var}(X_n) < +\infty \qquad (5.1)$$

dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X_i)] = 0 \quad \text{P-fast sicher} \qquad (5.2)$$

In diesem Fall sagt man, die Folge genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Beweis des Satzes 5.1: s. z.B. Bauer, Heinz: Wahrscheinlichkeitstheorie. de Gruyter. Berlin; 2002; S. 111 ff.

0.6. **Zentraler Grenzwertsatz**

6.1 Satz. Sei $(X_k)_{k \varepsilon IN}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter Zufallsvariablen mit positiver und endlicher Varianz. Es bezeichne für $n \varepsilon IN$

$\sigma := Var(X_k)^{1/2}$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$S_n^* := [S_n - E(S_n)] / Var(S_n)^{1/2} = [S_n - n\, E(X_n)]/(n^{1/2}\, \sigma)$

$F_{S_n^*}(x)$ die Verteilungsfunktion von S_n^* an der Stelle x

Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Damit gilt:

$$\lim_{n \to \infty} F_{S_n^*}(x) = \Phi(x), \qquad x \varepsilon IR \tag{6.1}$$

Beweis s. z.B. Bauer, Heinz: Wahrscheinlichkeitstheorie. de Gruyter. Berlin; 2002; S. 237 ff.

Der Satz besagt, dass die Verteilungsfunktion von S_n^* punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung konvergiert.

0.7. **Bedingte Erwartungen**

0.7.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit und bedingte Dichte

7.1 Bemerkung. Für jedes Ereignis $B \varepsilon \mathcal{A}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit ist

P_B: $\mathcal{A}$ -> [0,1],

$A \to P_B(A) := P(A \cap B) / P(B) \qquad (A \varepsilon \mathcal{A})$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$.

$P_B(A)$ wird auch mit $P(A| B)$ bezeichnet.
Ist B das Urbild einer Borelschen Menge D bzgl. einer diskreten oder absolutstetigen Zufallsvariable X, d.h. $B=\{\omega| \omega\varepsilon\Omega, X(\omega)\varepsilon D\}$, so wird auch die Bezeichnung $P(A| X\varepsilon D)$ verwendet und falls $D=(r,\infty)$ mit $r\geq 0$, die Bezeichnung $P(A| X>r)$.

7.2 Definition. Das vorangehend definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $A \to P_B(A)$ heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit** des Eintretens von A gegeben, dass B bereits eingetreten ist.

7.3 Definition. Es sei P_B eine bedingte Wahrscheinlichkeit und g eine Dichte bzgl. P_B.
g wird dann auch **bedingte Dichte** genannt.

7.4 Beispiel: X sei eine reelle absolutstetige Zufallsvariable, d.h. es existiert eine Dichte f, so dass für jede Borelsche Menge B gilt: $P(X\varepsilon B) = \int_B f(x)\, dx$.
Es seien A und C Borelsche Mengen mit $P(X\varepsilon C)>0$. Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$P(X\varepsilon A| X\varepsilon C)$

$= P(\{X\varepsilon A\} \cap \{X\varepsilon C\}) / P(X\varepsilon C)$

$= P(X\varepsilon A\cap C) / P(X\varepsilon C)$

$= (\int_{A\cap C} f(x)\, dx) / P(X\varepsilon C)$

$= (\int_A 1_C(x) f(x)\, dx) / P(X\varepsilon C)$

$= \int_A g_C(x)\, dx$

mit $g_C(x) := 1_C(x) f(x)/P(X\varepsilon C)$

$g_C(x)$ ist eine bedingte Dichte.

0.7.2. Bedingter Erwartungswert

0.7.2.1. Definition und Beispiel

7.5 Definition. Es sei X eine diskrete oder absolutstetige Zufallsvariable und P_B eine bedingte Wahrscheinlichkeit, gegeben ein Ereignis B ($B\varepsilon \mathcal{A}$).
Der Erwartungswert von X bzgl. P_B wird **bedingter Erwartungswert**, gegeben B, genannt und mit $E(X| B)$ bezeichnet.
Ist B das Urbild einer Borelschen Menge D bzgl. einer diskreten oder absolutstetigen Zufallsvariable T, d.h. $B=\{\omega| \omega\varepsilon\Omega, T(\omega)\varepsilon D\}$, so wird auch die Bezeichnung $E(X| T\varepsilon D)$ verwendet und falls $D=(t,\infty)$ mit $t\geq 0$, die Bezeichnung $E(X| T>t)$.

7.6 Beispiel: Das Beispiel aus Abschnitt 0.7.1. wird fortgesetzt.

$E(X| C) = \int x\, g_C(x)\, dx$

0.7.2.2. Zur Berechnung des bedingten Erwartungswerts

Im weiteren werden die folgenden Formeln verwendet.
Dabei seien X und T diskrete oder absolutstetige nichtnegative reelle Zufallsvariablen.

Ist X eine Indikatorfunktion 1_A mit $A\varepsilon \mathcal{A}$ stimmt ihr Erwartungswert mit der Wahrscheinlichkeit von A überein: $E(1_A) = P(A)$.

Sind X und T stochastisch unabhängig, gilt offensichtlich für jede Zahl $t\geq 0$ mit $P(T>t)>0$:

$$E(X| T>t) = E(X) \qquad (7.2.1)$$

denn für die dem bedingten Erwartungswert zugrunde liegende bedingte Wahrscheinlichkeit gilt für alle $A\varepsilon \mathcal{A}$ und alle $t\geq 0$ mit $P(T>t)>0$:

$P(A| T>t) = P(A\cap\{T>t\}) / P(T>t) = P(A)\, P(T>t) / P(T>t) = P(A)$.

Also handelt es sich nicht um eine bedingte Wahrscheinlichkeit und ihr Erwartungswert ist $E(X)$.

Ist X eine elementare Zufallsvariable, so gilt für jedes $A\varepsilon \mathcal{A}$ und alle $t\geq 0$ mit $P(T>t)>0$

$$E(1_A X\,|\,T>t) = P(A| T>t)\, E(X\,|\,A \cap\{T>t\}) \qquad (7.2.2)$$

Der Nachweis ist einfach, wenn X eine Indikatorfunktion 1_H ist ($H \varepsilon \mathcal{A}$); denn auf der linken Seite der Gleichung steht dann

$P(A \cap H | T>t) = P(A \cap H \cap \{T>t\}) / P(T>t)$

und rechts steht

$[P(A \cap \{T>t\}) / P(T>t)]\ [P(H \cap A \cap \{T>t\}) / P(A \cap \{T>t\}] =$ linke Seite

Da X nach Voraussetzung eine elementare Zufallsvariable ist, gibt es endlich viele relle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$, für die mit $A_i := X^{-1}(r_i)$, $i = 1,\ldots,n$; gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} r_i 1_{A_i}$$

Da $E(1_A X | T>t) = \sum_{i=1}^{n} r_i E(1_A 1_{A_i} | T>t)$ und

$$E(X | A \cap \{T>t\}) = \sum_{i=1}^{n} r_i E(1_{A_i} | A \cap \{ T>t\}),$$

folgt die Behauptung, weil die Summanden – wie zuvor für Indikatorfunktionen gezeigt – jeweils gleich sind.

1. Verzinsung

1.1. Verzinsung eines Kapitals

Ein verzinslich angelegtes Kapital, anfänglich in Höhe von K_0, betrage bei Ablauf eines Jahres K_1 unter Hinzunahme der auf das Kapital entfallenden Zinserträge des Jahres. Einlagen und Entnahmen seien ausgeschlossen. K_0 sei größer als 0 und K_1 sei größer als K_0. Die **Zinsrate** (oder der **Zinssatz**) $K_1/K_0 - 1$ werde mit i bezeichnet. i sei auch im weiteren stets auf ein Jahr bezogen.

Das Zeitintervall, an dessen Ende der Zins gutgeschrieben wird, die sog. **Konversionsperiode**, muss nicht ein Jahr sein. Vorausgesetzt sei jedoch, dass zu Jahresablauf eine Konversionsperiode endet.

Beträgt die Konversionsperiode 1 Jahr, wird i **effektive Zinsrate** genannt.

Zunächst werden Größen eingeführt, die von i abhängen.

$v := 1/(1+i)$ wird **Abzinsungsfaktor** genannt.

Ist das Jahr in m ($m \in \mathbb{N}$) gleichlange Konversionsperioden eingeteilt, so bezeichne i(m) diejenige Größe, für die gilt:

$$[1+i(m)/m]^m = 1+i \,. \tag{1.1}$$

i(m) wird **nominelle Zinsrate** genannt.

Die nominelle Zinsrate führt also zeitanteilig m-mal konvertiert zum Zinssatz i.

Aus (1.1) folgt:

$$i(m) = m\,[(1+i)^{1/m} - 1] \tag{1.2}$$

$(i(m))_m$ ist eine fallende von unten beschränkte konvergente Folge.

$\delta := \lim i(m)$ mit $m \to \infty$ ist die sogenannte **Zinsintensität**.

Aus (1.1) folgt:

$$\delta = \ln(1+i) \;\text{ und }\; e^{\delta} = 1+i; \tag{1.3}$$

denn für jede natürliche Zahl M und alle natürlichen Zahlen $m \geq M$ gilt:

$$[1+\delta/m]^m \leq [1+i(m)/m]^m \leq [1+i(M)/m]^m$$

Also gilt für jedes M mit $m \to \infty$:

$$e^{\delta} = \lim\,[1+\delta/m]^m \leq \lim\,[1+i(m)/m]^m \leq \lim\,[1+i(M)/m]^m = e^{i(M)}$$

und da $\lim e^{i(M)} = e^{\delta}$ mit $M \to \infty$, folgt: $e^{\delta} = \lim\,[1+i(m)/m]^m$ mit $m \to \infty$.

$d := i/(1+i)$ wird jährliche effektive **Vorauszinsrate** oder **Diskontsatz** genannt.

Ist das Jahr in m gleichlange Konversionsperioden eingeteilt, so bezeichne d(m) diejenige Größe, für die gilt:

$$1/[1-d(m)/m] = (1+i)^{1/m} \tag{1.4}$$

d(m) wird **nominelle Vorauszinsrate** genannt.

Aus (1.2) folgt:

$$d(m) = m\,[1-(1+i)^{-1/m}], \tag{1.5}$$

$$d(m) = i(m) / [1+ i(m)/m], \tag{1.6}$$

$$\text{denn: } i(m) / [1+ i(m)/m] = i(m) / v^{-1/m} = m\,[v^{-1/m} - 1]/ v^{-1/m} = m\,[1-v^{1/m}] = d(m)$$

$$1/d(m) = 1/m + 1/i(m) \tag{1.7}$$

Also ist $(d(m))_m$ eine konvergente Folge.

und für $m \to \infty$ gilt:

$$\lim d(m) = \lim i(m) = \delta. \tag{1.8}$$

1.2. **Ewige Renten**

Es bestehe ein Anrecht auf sofort oder auf zu zukünftigen Zeitpunkten t(k) fällig werdende Zahlungen der Höhe r_k ($t(k) \geq 0$, k=1, 2,...). Es kann sich um endlich oder abzählbar unendlich viele Zahlungen handeln. Einmalige Zahlung sei nicht ausgeschlossen.
$v^{t(1)} r_1 + v^{t(2)} r_2 + \ldots$, die Summe der abgezinsten Zahlungen, wird **Barwert** genannt.

Im folgenden wird für eine ewige vorschüssige Rente, die aus jährlichen Zahlungen der Höhe 1 besteht, ihr Barwert zum Zeitpunkt 0 berechnet. Die erste Zahlung erfolgt zum Zeitpunkt 0.

Der Barwert wird mit $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ bezeichnet.

Also :

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = 1/(1-v) = 1/d \qquad (2.1)$$

Erfolgt die erste Zahlung zum Zeitpunkt 1, d.h. wenn nachschüssige Zahlung vorgesehen ist, wird ihr Barwert mit $a_{\overline{\infty}|}$ bezeichnet und es gilt:

$$a_{\overline{\infty}|} = 1/d - 1 = 1/i \qquad (2.2)$$

Sind anstelle der jährlichen Zahlungszeitpunkte unterjährliche Zahlungen in Höhe von 1/m zu den Zeitpunkten 0, 1/m, 2/m, ... vorgesehen, wird der Barwert mit $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ bezeichnet und mit (1.5) gilt:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = 1/m + 1/m\, v^{1/m} + 1/m\, v^{2/m} + \ldots = 1/[m\,(1 - v^{1/m})] = 1/d(m) \qquad (2.3)$$

Erfolgt die erste Zahlung zum Zeitpunkt 1/m, d.h. wenn nachschüssige Zahlung vorgesehen ist, wird ihr Barwert mit $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ bezeichnet und mit (1.7) gilt:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} - 1/m = 1/d(m) - 1/m = 1/i(m) \qquad (2.4)$$

Als Beispiel für eine ewige Rente mit **jährlich steigenden Zahlungen** wird folgender Zahlungsverlauf betrachtet. Die Zahlungen erfolgen vorschüssig. Innerhalb eines Jahres bleiben die unterjährlichen Zahlungen gleich. Die Zahlungen betragen im ersten Jahr insgesamt 1, im zweiten Jahr insgesamt 2, im dritten Jahr insgesamt 3 u.s.w.

Der Barwert dieser ewigen Rente wird mit $(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ bezeichnet.
Der folgenden Barwertberechnung liegt die Vorstellung zugrunde, dass eine Kombination von ewigen vorschüssigen Renten mit Zahlungen in der konstanten Höhe 1/m vorliegt, wobei die erste zum Zeitpunkt 0, die zweite zum Zeitpunkt 1, die dritte zum Zeitpunkt 2 u.s.w. beginnt.

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = 1/m + 1/m\, v^{1/m} + 1/m\, v^{2/m} + \ldots + 1/m\, v^{(m-1)/m} +$$

$$+ 2/m\, v + 2/m\, v^{1+1/m} + 2/m\, v^{1+2/m} + \ldots + 2/m\, v^{(2m-1)/m} +$$

$$+ 3/m\, v^2 + 3/m\, v^{2+1/m} + 3/m\, v^{2+2/m} + \ldots + 3/m\, v^{(3m-1)/m} + \ldots$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + v\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + v^2\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + \ldots$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}\ \ddot{a}_{\overline{\infty}|}$$

$$= 1/(d(m)\, d) \qquad (2.5)$$

Bei nachschüssiger Zahlung erfolgen die Zahlungen lediglich ein m-tel Jahr später:

$$(Ia)^{(m)}_{\overline{\infty}|} = v^{1/m}\, (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = v^{1/m} / (d(m)\, d) \qquad (2.6)$$

Man beachte, dass der Barwert der ewigen jährlich steigenden Rente endlich ist.

1.3. **Zeitrenten**

Im folgenden werden Barwerte für zeitlich befristete Renten zum Zeitpunkt 0 berechnet. Ihre Dauer beträgt stets n Jahre ($n \varepsilon IN$).

Die Rente besteht aus jährlich vorschüssigen Zahlungen der Höhe 1. Die erste Zahlung erfolgt zum Zeitpunkt 0. Ihr Barwert wird mit $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ bezeichnet.

Also :

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{\infty|}} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty|}} = 1/d - v^n/d = (1- v^n)/d \qquad (3.1)$$

Bei nachschüssiger bzw. bei unterjährlicher Zahlung gilt das Folgende. Die nun verwendeten Bezeichnungen $a_{\overline{n|}}$, $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$ und $a^{(m)}_{\overline{n|}}$ seien in analoger Weise definiert.

$$a_{\overline{n|}} = (1- v^n) / i \qquad (3.2)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = (1- v^n) / d(m) \qquad (3.3)$$

$$a^{(m)}_{\overline{n|}} = (1- v^n) / i(m) \qquad (3.4)$$

Die beiden letzten Formeln gelten auch, wenn n zwar keine natürliche Zahl aber ein Vielfaches von 1/m ist.

Neben dem Barwert interessiert man sich für den **Schlusswert** von Zeitrenten. Dieser ist die Summe der aufgezinsten Zahlungen am Ende der Dauer n. Also ergibt sich der Schlusswert durch Multiplikation des Barwerts mit dem Aufzinsungsfaktor $(1+i)^n$.
Die Bezeichnungen $\acute{s}_{\overline{n|}}$, $s_{\overline{n|}}$, $\acute{s}^{(m)}_{\overline{n|}}$ und $s^{(m)}_{\overline{n|}}$ seien in analoger Weise definiert.

$$\acute{s}_{\overline{n|}} = (v^{-n}-1)/d \qquad (3.5)$$

$$s_{\overline{n|}} = (v^{-n}-1)/i \qquad (3.6)$$

$$\acute{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = (v^{-n}-1)/d(m) \qquad (3.7)$$

$$s^{(m)}_{\overline{n|}} = (v^{-n}-1)/i(m) \qquad (3.8)$$

Ferner besteht folgender Zusammenhang zwischen Barwert und Schlusswert:

$$1/a_{\overline{n|}} = i + 1/s_{\overline{n|}} \qquad (3.9)$$

Als Beispiel für eine Zeitrente mit **jährlich steigenden Zahlungen** wird folgender Zahlungsverlauf betrachtet: Die Zahlungen erfolgen vorschüssig. Innerhalb eines Jahres bleiben die unterjährigen Zahlungen gleich. Die Zahlungen betragen im ersten Jahr insgesamt 1, im zweiten Jahr insgesamt 2, im dritten Jahr insgesamt 3 u.s.w. Die Rente endet mit Ablauf des n-ten Jahres.

Der Barwert dieser Zeitrente wird mit $(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}}$ bezeichnet.

Der folgenden Barwertberechnung liegt die Vorstellung zugrunde, dass eine ewige vorschüssige Renten mit den oben genannten Zahlungen jedoch ohne Ablauf vorliegt. Abzuziehen ist eine ewige Rente mit gleichen Zahlungen, jedoch um n Jahre aufgeschoben und eine um n Jahre aufgeschobene ewige Rente mit konstanten Zahlungen.

$$
\begin{aligned}
(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} &= 1/m + 1/m\, v^{1/m} + 1/m\, v^{2/m} + \ldots + 1/m\, v^{(m-1)/m} + \\
&\quad + 2/m\, v + 2/m\, v^{1+1/m} + 2/m\, v^{1+2/m} + \ldots + 2/m\, v^{(2m-1)/m} + \\
&\quad + 3/m\, v^{2m} + 3/m\, v^{2+1/m} + 3/m\, v^{2+2/m} + \ldots + 3/m\, v^{(3m-1)/m} + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + n/m\, v^{n-1} + n/m\, v^{n-1+1/m} + n/m\, v^{n-1+2/m} + \ldots + n/m\, v^{(n\,m-1)/m} \\
&= (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty|}} - v^n\, (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty|}} - v^n\, n\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}} \\
&= 1/d(m)\; 1/d - v^n/d(m)\; 1/d - v^n\, n/d(m) \\
&= [(1 - v^n)/d - v^n\, n] \,/\, d(m) \\
&= [\ddot{a}_{\overline{n|}} - v^n\, n] \,/\, d(m) \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Bei nachschüssiger Zahlung ist der Barwert für vorschüssige Zahlung mit $v^{1/m}$ zu multiplizieren, da die Zahlungen lediglich ein m-tel Jahr später erfolgen:

$$(Ia)^{(m)}_{\overline{n|}} = v^{1/m}\, (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = v^{1/m}\, (\ddot{a}_{\overline{n|}} - v^n\, n) \,/\, d(m) = (\ddot{a}_{\overline{n|}} - v^n\, n) \,/\, i(m)\,; \qquad (3.11)$$

denn $i(m)/v^{-1/m} = d(m)$

Als Beispiel für eine Zeitrente mit **jährlich fallenden Zahlungen** wird folgender Zahlungsverlauf betrachtet: Die Zahlungen erfolgen vorschüssig. Innerhalb eines Jahres bleiben die unterjährigen Zahlungen gleich. Die Zahlungen betragen im ersten Jahr insgesamt n, im zweiten Jahr insgesamt n-1, im dritten Jahr insgesamt n-2 u.s.w. Die Rente endet mit Ablauf des n-ten Jahres.

Der Barwert dieser ewigen Rente wird mit $(D\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}}$ bezeichnet.
Bei der folgenden Barwertberechnung wird verwendet, dass die Summe obiger steigender vorschüssiger Zeitrente und dieser fallenden Zeitrente eine Zeitrente mit den konstanten Zahlungen vom Jahresbetrag n+1 ergibt. Dann gilt die gleiche Beziehung für die Barwerte:

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} + (D\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = (n+1)\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} \qquad (3.12)$$

Unter Verwendung obiger Resultate für $(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}}$, s. (3.10), und $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$, s. (3.3), und der Beziehung

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + 1 - v^n \qquad (3.13)$$

erhält man

$$(D\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = (n - a_{\overline{n|}})/d(m) \tag{3.14}$$

2. Versicherungsmathematische Probleme

2.1. Versicherungsprodukte

Mit einer jährlichen Beitragseinnahme von rund 221 Milliarden € ist die Versicherungswirtschaft eine der umsatzstärksten Branchen der deutschen Wirtschaft. Von den vielen Versicherungszweigen, die es am Markt gibt, seien die nach Anzahl der Verträge größten aufgezählt (ohne Rückversicherungen und Sozialversicherungen).

		Anzahl der Verträge Mio.
Lebens- und Pensionsversicherung		
davon:		
	Altersvorsorgeverträge	69,3
	Risikoversicherungen	17,0
	Zusatzversicherungen	22,9
	weitere	
Private Krankenversicherung		
davon:		
	Vollversicherung	30,0
	Krankenzusatzversicherung	9,9
	Pflegepflichtversicherung	4,5
	sonstige	0,6
Schaden- und Unfallversicherung		
davon:		
	Kraftfahrtversicherung	124
	Allgemeine Haftpflichtversicherung	47
	Verbundene Hausratversicherung	27
	Private Unfallversicherung	25
	Rechtsschutzversicherung	23
	Verbundene Wohngebäudeversicherung	19
	Transportversicherung	0,6
	Technische Versicherung	11,6

und viele weitere ...
Quelle: Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V. Stand: 2020.

Neben den Schadenzahlungen, die in Geld entrichtet werden, werden laufende Leistungen gewährt, w.z.B. betriebliche oder private Renten in der Lebensversicherung, Krankentagegelder in der Privaten Krankenversicherung, Unfallrenten in der privaten Unfallversicherung. Zu den Versicherungsleistungen zählen ferner Service und Rechtsschutz w.z.B. in der Allgemeinen Haftpflichtversicherung.

Versicherungen sollen Risiken durch Zusammenfassen teilen und gemeinsam finanzieren.

Charakteristisch für ein am Markt gehandeltes Versicherungsprodukt ist, dass
- das zu versichernde Schadenereignis zufällig ist,
- das Versicherungsgeschäft sich im Wesentlichen selbst trägt,
- es eine ausweisbare Kalkulation gibt.

Unter den größeren volkswirtschaftlichen Branchen war die Lebensversicherung diejenige, in die erstmals nicht-triviale mathematische Methoden Einzug hielten. Später wurden sie für andere Branchen modifiziert.

2.2. **Produktentwicklung und weitere Aufgaben des Versicherungsmathematikers**

In diesem Kapitel wird ohne Anspruch auf Vollständigkeit eine Bestandsaufname derjenigen Probleme aus dem Versicherungswesen und artverwandten Gebieten gemacht, die z.Zt. in Deutschland üblicherweise mit versicherungsmathematischen Methoden behandelt werden.

2.2.1. Lebensversicherung

Mit einem Lebensversicherungsvertrag wird gegen Entgelt die Zusage gegeben, bei Tod in einem bestimmten Zeitraum oder Erleben eines bestimmten Zeitpunkts oder bei Heirat, Berufs- oder Erwerbsunfähigkeit, Pflegebedürftigkeit etc., also bei Eintritt eines bestimmten Ereignisses, eine bestimmte Zahlung zu leisten.

Bei der Entwicklung eines solchen Versicherungsprodukts sind verschiedene Zwänge zu beachten. Nicht jede Deckung ist bedarfsgerecht, rechtlich zulässig, steuerlich sinnvoll, verwaltbar und risikotechnisch beherrschbar. Besteht die Gefahr einer Gegenauslese?

Zu der in Aussicht genommenen Leistungszusage muss zunächst die Prämie berechnet werden. Nach § 11 des Gesetzes über die Beaufsichtigung der Versicherungsunternehmen (Versicherungsaufsichtsgesetz - VAG) müssen die Prämien unter Zugrundelegung angemessener versicherungsmathematischer Annahmen kalkuliert werden und so hoch sein, dass das Versicherungsunternehmen allen seinen Verpflichtungen nachkommen kann. Das Gesetz der großen Zahlen bewirkt, dass bei großen Beständen der erwartete Barwert der Leistungen in etwa ausreicht, um den Verpflichtungen nachzukommen, wenn die versicherungsmathematischen Annahmen, insbesondere Zins und Wahrscheinlichkeitswerte vorsichtig gewählt wurden. Wird dieser Barwert mit dem Barwert der Prämien gleichgesetzt, hat man eine Bestimmungsgleichung für die einmalige bzw. laufende gleichbleibende Prämie. Die versicherungsmathematischen Annahmen müssen so vorsichtig gewählt werden, dass die dauernde Erfüllbarkeit der Verpflichtungen nicht gefährdet wird. Dazu gehört auch die Bemessung der Kostenzuschläge in einem angemessenen Kostenzuschlagsmodell. Die eingerechneten Kosten müssen ausreichen um die tatsächlichen Kosten des Versicherers zu decken.

Der der Prämien- und Deckungskapitalberechnung zugrunde liegende Rechnungszins soll so gewählt werden, dass er auf Dauer vom tatsächlichen Kapitalmarktzins nicht unterschritten wird. Zur Prämienberechnung enthält das VAG zwar keine direkten Bestimmungen über den Rechnungszins; zur Berechnung der Deckungsrückstellung sind aber je nach Vertragsart Höchstzinsen vorgegeben. Setzt man zur Prämienberechnung keinen höheren Rechnungszins als bei der Deckungskapitalberechnung an, dann können die Deckungsrückstellungen aus den aufgezinsten in den Prämien enthaltenen Sparanteilen gebildet werden.

Wirklichkeitsnäher wäre, die zukünftige Zinsentwicklung durch einen stochastischen Prozess zu modellieren. Dazu bedarf es aber eines stochastischen Modells für die langfristige Zinsentwicklung. Bei Annahme eines stochastischen Zinses ginge die Unabhängigkeit verloren, da dann alle Policen vom gleichen jährlichen Zins betroffen sind. Dadurch stellten sich weitere technische Probleme.

Zutiefst problematisch ist die derzeit anhaltende Niedrigzinsphase. Neue Produkte werden erforderlich, da die Lebensversicherungsunternehmen z.Zt. mit sicheren Anlagen kaum noch einen positiven Rechnungszins erwirtschaften können. Vielfach werden fondsbasierte Lebensversicherungen angeboten, bei denen der Versicherungsnehmer das Kapitalanlagerisiko faktisch selbst trägt.

Der Schadenverlauf eines Lebensversicherers kann durch Großschäden, z.B. Tod eines Versicherten mit hoher Versicherungssumme, außergewöhnlich stark beeinflusst werden. Die Auswirkungen können durch Abschluss von Rückversicherungsverträgen gemildert werden. Entsprechende Prämien sind vom Erst- und vom Rückversicherer zu berechnen.

Zum Schuss des Geschäftsjahres ist die Bruttodeckungsrückstellung, die Summe der Bruttodeckungskapitale der am Stichtag bestehenden Versicherungen, zu berechnen und dann als Schuldposten in der Bilanz auszuweisen. Die prospektive Methode ist gesetzlich vorgeschrieben, soweit sie nach Art des Vertrages anwendbar ist. Da die Deckungsrückstellung mit ihrem ursprünglichen Zinssatz kalkuliert, welcher sich aktuell als zu hoch erweist, nicht ausreichen kann, ist eine weitere realistischere Berechnung der Deckungsrückstellung erforderlich. Dies verlangt das Handelsgesetzbuch. Laut § 341f Abs 2 HGB ist der sich aus dem Jahresmittel der Anleihebestände über die letzten 10 Jahre ergebende Durchschnittszins, der sog. Referenzzins, zugrunde zu legen.

Infolge vorsichtiger Rechnungsannahmen fallen Überschüsse an. Diese sind fast vollständig an den Versicherungsnehmer zurück zu gewähren. Der einzelne Vertrag soll möglichst in der Höhe am Überschuss beteiligt werden, wie er zu dessen Entstehung beigetragen hat. Neben Barauszahlung oder Verrechnung mit Beiträgen gibt es weitere Verwendungsmöglichkeiten, z.B. verzinsliche Ansammlung oder Erhöhung der Leistungen. Dazu ist eine Zerlegung des Rohüberschusses nach Zins-, Risiko- und Kostenverlauf erforderlich. Zur Verteilung auf die einzelnen Verträge und zur Verwendung der Überschussanteile sind geeignete Systeme zu entwickeln.
Aufgrund eines Überschussbeteiligungssystems können für den einzelnen Vertrag unter gewissen Annahmen über die Überschussanteilsätze die Leistungen aus der Überschussbeteiligung hochgerechnet werden, so dass dem potenziellen Kunden schon vor Vertragsbeginn ein Bild über die Leistungen aus der Überschussbeteiligung verschafft werden kann.

2.2.2. Private Krankenversicherung

Ähnliche Probleme wie in der Lebensversicherung stellen sich in der privaten Krankenversicherung; vorrangig betrifft es Produktentwicklung und -pflege. Deren Kalkulation erfolgt nach den Prinzipien der Lebensversicherung. Stornowahrscheinlichkeiten sind einzubeziehen.

Zudem gelten für die private Krankenversicherung weitere detaillierte Regelungen.
Der Aktuar steht im Spannungsfeld zwischen aktuariellen Belangen, unternehmerischer Verantwortung und sozialpolitischem Auftrag. So zwingt die Kostenentwicklung im Gesundheitswesen den Versicherer zu dauernder Nachkalkulation der Beiträge. Die Rechnungsgrundlagen können aufgrund der jährlichen Überprüfung angepasst werden.

Da die zu erwartenden Schadenaufwendungen im Alter erheblich zunehmen, bedarf es der Kalkulation einer Alterungsrückstellung.

2.2.3. Schaden- und Unfallversicherung

Die zu kalkulierenden Prämien müssen wettbewerbsfähig und kostendeckend sein.
Ihre Auswirkungen sind durch Szenarien und Prognosen des erzielten Nutzens darzulegen.
In den Mengensparten wie Kraftfahrt-, Allgemeine Haftpflichtversicherung und industrielle Feuerversicherung werden versicherungsmathematische Methoden eingesetzt.
Die Gegebenheiten sind hier wesentlich schwieriger als in der Lebensversicherung. So sind die Risiken eines Kollektivs im Allgemeinen nicht homogen, pro Periode sind mehrere Schadensereignisse möglich, die Höhe des einzelnen eingetretenen Schadens ist zufällig und im voraus nicht bekannt.

Zu untersuchen ist, ob und ggf. in welcher Gestalt ein Bedarf an Rückversicherung besteht. Entsprechende Prämien sind vom Erst- und vom Rückversicherer zu kalkulieren.

Im Rahmen der Reservierung stellt sich das Problem, Schadenrückstellungen für bereits eingetretene aber noch nicht gemeldete oder noch nicht in vollständiger Höhe gemeldete Schäden (sog. IBNR-Schäden) zu berechnen.

Für laufende Haftpflicht- und Unfallrenten sind Deckungsrückstellungen wie in der Lebensversicherung zu bilden.

2.2.4. Betriebliche Altersversorgung

Man spricht von Zusagen der betrieblichen Altersversorgung, wenn ein Arbeitgeber seinem Arbeitnehmer Leistungen der Alters-, Invaliden- oder Hinterbliebenenversorgung aus Anlass des Arbeitsverhältnisses verspricht. Am weitesten verbreitet sind z.Zt. unmittelbare Versorgungszusagen, bei denen der Begünstigte keine eigenen Beiträge aufzubringen hat. Es gibt sie überall in der Wirtschaft. Eine Versicherungsgesellschaft ist in der Regel nicht zwischengeschaltet. Der Arbeitgeber trägt das Risiko, die versprochenen Leistungen zu erbringen, selbst.

Unter den Voraussetzungen des § 6a EStG darf bzw. muss der Arbeitgeber dafür Rückstellungen mit steuerlicher Wirkung aufbauen. Das Einkommensteuergesetz schreibt die maximale Höhe der steuerlichen Pensionsrückstellungen vor und verweist ausdrücklich auf die anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik. Da je nach Ausscheideursache (Invalidität oder Tod) unterschiedlich hohe Leistungen zu gewähren sind und die die Hinterbliebenenversorgung empfangende Person im voraus zumeist unbestimmt ist, wird – im Vergleich zur Lebensversicherung - regelmäßig ein erweitertes Modell zur Erfassung der Leistungen zugrunde gelegt. Steuerliche Pensionsrückstellungen sind ohnehin als Beitragsbemessungsgrundlage für den Pensions-Sicherungs-Verein aG zu berechnen.

Nach dem Handelsgesetzbuch sind Pensionsrückstellungen mit anderen realistischeren Rechnungsgrundlagen und zumeist nach anderen Formeln zu berechnen.

Abweichende sehr detaillierte Regeln enthalten die Internationalen Rechnungslegungsvorschriften („IFRS"). Die IFRS empfehlen ausdrücklich, einen Versicherungsmathematiker zur Bewertung der Leistungsverpflichtungen hinzu zu ziehen.

Mitunter werden Berechnungen nach ausländischen Rechnungslegungsvorschriften, z.B. nach US-GAAP, nachgefragt.

Neben unmittelbaren Versorgungszusagen sind für die sonstigen Durchführungswege Pensionsverpflichtungen zu bewerten. Erwähnt sei, dass der versicherungsmathematische Gutachter mit Berechnungen zum Versorgungsausgleich bei Ehescheidungen häufig in Familiengerichtsverfahren eingebunden ist.

Von den auftraggebenden Firmen werden manchmal Prognoseberechnungen über die langfristigen Verläufe der Pensionsrückstellungen gewünscht.

Bei den mittelbaren Durchführungswegen, d.h. über Direktversicherungen, Pensionskassen oder Pensionsfonds, sind die Aufgaben des Versicherungsmathematikers mit den Aufgaben in der Lebensversicherung vergleichbar.

2.2.5. Übergreifende Probleme

Die im Folgenden aufgeführten versicherungsmathematischen Probleme betreffen - sofern nicht ausdrücklich ausgeschlossen - jeden oben behandelten Versicherungszweig.

2.2.5.1. Asset-Liability-Management

Im Hinblick auf fonds- oder indexgebundene Versicherungsprodukte, die eine starke Sensitivität in Bezug auf Anlagerisiken, insbesondere Zinsänderungsrisiken, aufweisen, und im Hinblick auf die anhaltende Tiefzinsphase stellen sich Fragen, die sich auf die Steuerung von Kapitalanlagen des Versicherers beziehen. Vorrangig ist der Rechnungszins abzusichern.

Allgemein und in jedem Versicherungszweig sowie in den Versorgungseinrichtungen der betrieblichen Altersversorgung stellt sich das Problem, Kapitalanlagen unter angemessener Berücksichtigung von Risiko- und Renditeaspekten, insbesondere die Kapitalanlagen, die die versicherungstechnischen Verpflichtungen abdecken sollen, optimal zu steuern, das sog. Asset-Liability-Management. Es gilt dabei, die Wechselwirkung zwischen Kapitalanlage und Versicherungsverpflichtungen zu analysieren und aufeinander abzustimmen. Der Versicherungsmathematiker hat auf eine übergreifende Abstimmung der Aktiv- und Passivseite der Bilanz zu achten.

Es gibt dazu zahlreiche Ansätze. Diese können grob eingeteilt werden in

- Strategien zur Angleichung des Cash-Flows: Primäres Ziel ist die langfristige Liquiditätssteuerung bei gleichzeitiger Sicherung einer hohen Ertragsstärke. Zu vorliegenden jährlichen Kapitalabflüssen wird ein Wertpapier-Portefeuille zusammengestellt, dessen Kapitalzuflüsse in jedem Jahr die Abflüsse deckt.

- Immunisierung gegen Zinsänderungen: Beispielsweise wird das zur Deckung eines Bestands von Verpflichtungen dienende Kapitalanlagen-Portefeuille auf der Aktivseite der Bilanz so zusammengestellt, dass es auf kleine Änderungen der Kapitalmarktzinsen in ähnlicher Weise reagiert wie der auf der Passivseite stehende Gesamt-Wert des Bestands.

- Dynamische Finanzanalyse: Die zukünftige Entwicklung von Aktiv- und Passivgrößen wird parallel simuliert mittels stochastischer Modellierung.

Daneben gibt es viele weitere Ideen und Strategien zur Abstimmung von Aktiv- und Passivseite. Zumeist gelten die Versicherungsverpflichtungen als vorgegeben und die Aktivgrößen werden danach gesteuert.

2.2.5.2. Solvency II

Solvency II ist eine prinzipienbasierte europäische Richtlinie für Erst- und Rückversicherungsunternehmen, die vorgibt, wie viel Mindestkapital und wie viel Solvenzkapital Versicherungsunternehmen halten müssen.

Die Prinzipien von Solvency II müssen nicht auf Pensionskassen, Pensionsfonds oder berufsständige Versorgungswerke übertragen werden.

Solvency II regelt die Höhe einer Kapitaldecke, mit der mögliche Verluste abgefangen werden können. Das Solvenzkapital ist somit ein Puffer, der unerwartet hohe Verluste ausgleichen soll. Die Kapitaldecke ist Bestandteil der Eigenmittel.

Die bestehende Rechnungslegung nach HGB und ggf. nach IFRS wird um eine weitere auf Marktwerte abgestellte „Marktwertbilanz" ergänzt. Da für Verpflichtungen gegenüber Versicherungsnehmern meist keine Marktpreise existieren, gibt es klare gesetzliche Vorgaben zu deren Bewertung.

Solvency II ist thematisch auf 3 Bereiche („Säulen") aufgeteilt.

- Säule 1 enthält die quantitativen Regelungen mit Kapitalanforderungen, Berechnungsformeln und technischen Vorgaben.
- Säule 2 enthält qualitative Vorschriften über Aufbau eines Risikomanagements, einer Unternehmensorganisation und ethischer Standards.
- Säule 3 regelt das Berichtswesen an die Öffentlichkeit und die Aufsichtsbehörden.

In Säule 1 wird vorgeschrieben, wie das Mindestkapital und das Solvenzkapital, die das Versicherungsunternehmen halten müssen, zu berechnen sind. Zugrunde liegt eine ganzheitliche Betrachtung der Bilanz. Hierbei stehen insbesondere die Interaktion zwischen Aktiv- und Passivseite und die damit verbundenen Risiken im Vordergrund.

Die Solvenzkapitalanforderung, eine Sollgröße für das Eigenkapital, wird mit Hilfe der sog. Standardformel oder eines internen Modells berechnet. Anstelle der Standardformel können sich die Versicherungsgesellschaften Modelle genehmigen lassen, die ihrer speziellen Situation angepasst sind, und mit diesen die Solvenzkapitalanforderung berechnen. Die Standardformel berücksichtigt verschiedene versicherungsspezifische Risiken sowie operationelle Risiken. Letztere sind Risiken, die durch fehlerhafte firmeninterne Prozesse, mangelnde Kontrollen, falsche Einschätzungen, Betrug oder durch externe Ereignisse ausgelöst oder begünstigt werden.

Die Bestimmung der benötigten Marktwerte erfordert mathematisch-statistische Modelle, um z.B. auch Optionen und Garantien der Versicherungsnehmer bei Lebensversicherungsprodukten geeignet zu berücksichtigen. Die Beurteilung der Angemessenheit der bei der Berechnung der Rückstellungen verwendeten Daten, Annahmen, Verfahren und damit auch die Angemessenheit der Rückstellungen in der Marktwertbilanz bildet die Kernaufgabe der „Versicherungsmathematischen Funktion (VMF)". Diese ist eine rechtliche Einrichtung des Versicherungsaufsichtsgesetzes (§ 31). Die VMF muss auch zur Zeichnungs-, Annahmepolitik und Preisgestaltung sowie zur Rückversicherung und auf deren etwaige Auswirkungen auf die Rückstellungen Stellung nehmen.

2.2.6. Weitere Aufgabenfelder

Folgende Verpflichtungen sind wie Leistungen der betrieblichen Altersversorgung vom Erleben der begünstigten Person oder der Fortdauer seiner Aktivität abhängig:
- Arbeitgeberleistungen bei Altersteilzeit
- Gratifikationen zu Dienstjubiläen
- Zuwendungen bei Vorruhestand
- Sozialplanabfindungen
- Zahlung von Kaufpreisrenten

Entsprechende steuerliche oder handelsbilanzielle Rückstellungen für diese arbeitgeberseitigen Verpflichtungen sind nach versicherungsmathematischen Grundsätzen zu berechnen. Dies gilt in der Regel auch für Rückstellungen nach den IFRS und nach ausländischen Rechnungslegungsvorschriften.

Bei Wirtschaftsprüfern und bei Behörden wie der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Finanzämter bzw. Ministerien sind Versicherungsmathematiker beschäftigt, die sich spiegelbildlich mit der Prüfung von Rückstellungen für Pensionen, Altersteilzeit etc., mit der Aufsicht von Versicherungsgesellschaften bzw. mit Gesetzesvorhaben befassen.

Bei der Deutschen Rentenversicherung Bund arbeiten Versicherungsmathematiker an den spezifischen Problemen des Umlageverfahrens. Von zentralem Interesse ist die künftige Entwicklung der erforderlichen Beiträge zur gesetzlichen Rentenversicherung.

5. Markierte Punktprozesse, Barwert, Risikoprämie

3.1. Darstellung von Prämien und Leistungen als markierte Punktprozesse

Ein Versicherungsvertrag enthält in der Regel eine Vereinbarung über die Zahlung von Prämien. Diese Vereinbarung legt fest, zu welchen Zeitpunkten Prämien zu entrichten sind und wie hoch die Prämie zu dem einzelnen Zahlungszeitpunkt jeweils sein soll. Auch die Anzahl der Prämienzahlungen ergibt sich aus dem Vertrag. Diese Anzahl kann zufällig sein, z.B., wenn laufende Prämienzahlung bis zum Tod der versicherten Person vereinbart ist. Die Prämienzahlungszeitpunkte sind meist deterministisch vorgegeben, z.B. jährlich vorschüssige Zahlungsweise, können aber auch zufällig sein. Gleiches gilt für die Prämienhöhen. Zufällige Prämienzahlungszeitpunkte und zufällige Prämienhöhen wären etwa denkbar bei einer Lebensversicherung mit laufender Beitragszahlung, bei der, falls Invalidität eintritt, die Beitragszahlung zeitweise auszusetzen oder herabzusetzen ist.

Vorgegeben sei allgemein ein Prozess

$$\Pi := \{(\pi_k, P_k) \mid k=1,2,\ldots,L_P\},$$

wobei L_P eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ sei und für alle k seien π_k und P_k reelle, nichtnegative eindimensionale Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit $\pi_k<\pi_{k+1}$ P-fast sicher für $k=1,2,\ldots, L_P-1$.
Dieser Prozess hat somit folgende Deutung: Zu den Zeitpunkten π_k sind die Prämien P_k zu entrichten und es gibt insgesamt L_P Prämienzahlungszeitpunkte, wobei diese Zahl auch zufällig sein kann.

Π wird **Prämienprozess** genannt.

Zum anderen ist ein Versicherungsvertrag ist in der Regel auf bestimmte Versicherungsleistungen ausgerichtet, enthält also eine Vereinbarung über die Zahlung von Versicherungsleistungen, die bei Eintritt bestimmter Ereignisse zu erbringen sind. Diese Zahlungszeitpunkte sind in der Regel zufällig. Die Höhe der Zahlung ist in der Lebensversicherung zumeist deterministisch vorgegeben, kann aber auch zufällig sein, z.B. bei einer Todesfallversicherung mit doppelter Leistung bei Unfalltod. Auch die Anzahl der Leistungen ergibt sich aus dem Vertrag. Diese Anzahl kann zufällig sein, z.B. bei einer lebenslangen laufenden Rentenversicherung.

Wie der Prämienprozess sei formal vorgegeben ein Prozess

$$\Lambda := \{(\lambda_k, C_k) \mid k=1,2,\ldots,L_C\},$$

wobei L_C eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ sei und für alle k seien λ_k und C_k reelle, nicht negative eindimensionale Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit $\lambda_k<\lambda_{k+1}$ P-fast sicher für $k=1,2,\ldots, L_C -1$
Dieser Prozess hat daher folgende Deutung: Zu den Zeitpunkten λ_k sind die Leistungen C_k zu erbringen und es gibt insgesamt L_C Leistungszahlungszeitpunkte, wobei diese Zahl auch zufällig sein kann.

Λ wird **Leistungsprozess** genannt.

Bei diesen Prozessen handelt es sich um sogenannte markierte Punktprozesse. Im weiteren wird auf diese selbst nicht eingegangen. Wir nutzen hier im Wesentlichen nur die Möglichkeit, dass Prämien und Leistungen durch markierte Punktprozesse knapp und kompakt dargestellt werden können. Die Idee, Prämien- und Leistungsprozesse als spezielle markierte Punktprozesse zu fassen, geht auf Professor Hans-Micha Dietz, Vorlesung an der Humboldt-Universität Berlin, SS 1991, zurück.

Die Elemente dieser Punktprozesse sind also geordnete Paare, wobei der erste Partner einen Zeitpunkt darstellt und der zweite Partner eine Zahlungshöhe.

Man beachte, dass. Π bzw. Λ auch die leere Menge sein können, z.B. wenn $L_P = 0$ bzw. $L_C = 0$.

3.2. **Barwert**

Vorgegeben seien ein markierter Punktprozess $M = \{(\lambda_k, C_k) \mid k = 1,2,\ldots,L_C\}$ und ein Zinssatz $i>0$.

Unter dem Barwert B_t^M zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ wird die Summe der auf t abgezinsten Zahlungen, die zum Zeitpunkt t oder danach nach Maßgabe von M zu entrichten sind, verstanden, wobei der Barwert Null sein soll, wenn M die leere Menge ist, d.h.:

$B_t^M = 0$, falls $M = \varnothing$, sonst:

$$B_t^M = \sum_{k=1}^{L_C} v^{\lambda_k - t} C_k \, 1_{(\lambda_k \geq t)} \tag{2.1}$$

Diese Definition des Barwert ist eine Verallgemeinerung des in Abschnitt 1.2. eingeführten Barwerts.

Man beachte, dass der so definierte Barwert eine Hintereinanderausführung Borel-messbarer Funktionen also eine reelle Zufallsvariable ist.

3.3. **Anforderungen an die Mindesthöhe von Prämien**

3.3.1. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

Es seien B(1), B(2), B(3),... reelle eindimensionale nichtnegative Zufallsvariablen. Ihre Varianzen seien beschränkt. B(1), B(2), B(3),... seien stochastisch unabhängig.

Die einzelne Zufallsvariable kann als einjährige Gesamtschadenhöhe eines Risikos, dessen Versicherungsdauer 1 Jahr beträgt, gedeutet werden aber auch als Barwert des Leistungsprozesses des Risikos zum Zeitpunkt 0, wenn Zahlungen nicht nur im ersten Jahr möglich sind.

Es sei einmalige Prämienzahlung vorgesehen. Die Einmalprämie sei zu Beginn der Versicherung zu entrichten.

Das starke Gesetz der großen Zahlen, s. Kapitel 0.5., besagt, dass das arithmetische Mittel der zentrierten Zufallsvariablen fast sicher gegen Null konvergiert.
Also gibt es für jedes $\varepsilon>0$ eine natürliche Zahl n_ε, so dass für alle natürlichen Zahlen $N>n_\varepsilon$ fast sicher gilt:

$$(1/N)\sum_{i=1}^{N} [B(i) - E(B(i))] < \varepsilon,$$

wobei E(B(i)) den Erwartungswert von B(i) bezeichne.

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{N} B(i) < \sum_{i=1}^{N} [E(B(i)) + \varepsilon]$$

Handelt es sich um einjährige Risiken, steht auf der linken Seite der Ungleichung die Summe der Jahreschäden des Kollektivs (ohne Berücksichtigung etwaiger unterjähriger Zinsen) und rechts steht die Summe der Prämien des Kollektivs, wenn man die zu Jahresbeginn zahlbare Einmal-Prämie des einzelnen Risikos mindestens in Höhe seines Erwartungswerts zzgl. einem Zuschlag ε ansetzt. Wird also als Prämie zusätzlich zum Erwartungswert ein (kleiner) Zuschlag erhoben, so reicht die Prämiensumme zur Deckung der Schäden aus, wenn der Bestand an Risiken hinreichend groß ist.

Ebenso erhält man einen Mindestbeitrag, wenn man die jeweiligen gesamten Leistungsprozesse einbezieht, wenn man sich also für eine Überdeckung des kollektiven Barwerts der Leistungen interessiert. Bezeichnet B(i) nämlich den Barwert des Leistungsprozesses des i-ten Risikos zum Zeitpunkt 0, so steht auf der linken Seite der Ungleichung die kollektive Summe der Barwerte der Leistungsprozesse. Diese Summe ist also der Wert, der zu Beginn vorhanden sein muss, um zusammen mit den künftig bis zum jeweiligen Zahlungstermin anfallenden Zinsen die Leistungen erbringen zu können. Rechts steht die kollektive Summe der Einmal-Prämien, wenn man die zu Beginn der Versicherung zahlbare Einmal-Prämie des einzelnen Risikos mindestens in Höhe des Erwartungswerts des Barwerts seines Leistungsprozesses im Zeitpunkt 0 zzgl. einem

Zuschlag ε ansetzt. Wird also als Einmal-Prämie zusätzlich zum Erwartungswert des Barwerts ein (kleiner) Zuschlag erhoben, so reicht die Prämiensumme zur Deckung der Barwerte der Leistungsprozesse aus, wenn der Bestand an Risiken hinreichend groß ist.

Man beachte, dass die Zufallsvariablen B(1), B(2), B(3),... nicht als identisch verteilt vorausgesetzt wurden. D.h. der Ausgleich im Kollektiv (die Produktion des Versicherungsschutzes) wird auch mittels inhomogener Bestände bewirkt.

3.3.2. Aufgrund von Ruinwahrscheinlichkeiten

Zugrunde gelegt seien die Zufallsvariablen B(1), B(2),...,B(N) aus dem vorhergehenden Abschnitt. Ihre Varianzen sind positiv und beschränkt. Die einzelne Zufallsvariable werde als einjährige Gesamtschadenhöhe eines Risikos, dessen Versicherungsdauer 1 Jahr beträgt, gedeutet. Unter Zugrundelegung eines einfachen Ruinmodells wollen wir Ruinwahrscheinlichkeiten ermitteln, wenn die Prämie den Erwartungswert unterschreitet oder übersteigt. Wir behandeln hier nur den Fall identisch verteilter Risiken. Auch die Jahres-Prämie sei für alle Risiken gleich und betrage c.

Demnach ergibt sich zu einem Anfangskapital u (ohne Berücksichtigung von Zinsen) eine Risikoreserve von

$$K_u := u + Nc - \sum_{i=1}^{N} B(i)$$

Das Ereignis $\{K_u < 0\}$ wird einjähriger technischer Ruin genannt.

Es bezeichne $\mu := E(B(i))$ und $\sigma^2 := Var(B(i))$.

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz, s. Abschnitt 0.5., ergibt sich für alle reellen Zahlen u:

$$\lim_{N\to\infty} P(K_u < 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } c < \mu \\ ½ & \text{für } c = \mu \\ 0 & \text{für } c > \mu \end{cases}$$

Denn nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen B(i), dass die Zufallsvariable

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(\sigma^2 N)^{1/2}} (B(i) - \mu)$$

mit $N\to\infty$ in Verteilung gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable (mit Erwartungswert 0 und Varianz 1) konvergiert.
Es gilt:

$$\{K_u<0\} = \{[u + N(c-\mu) + \sum_{i=1}^{N} (\mu - B(i))] < 0\} = \{\frac{u}{(\sigma^2 N)^{1/2}} + N^{1/2} \frac{c-\mu}{(\sigma^2)^{1/2}} < - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(\sigma^2 N)^{1/2}} (\mu - B(i))\}$$

Da für $N \to \infty$ der Bruch $\frac{u}{(\sigma^2 N)^{1/2}}$ gegen 0 konvergiert, mithin die linke Seite letzterer Ungleichung für $c<\mu$ gegen $-\infty$ geht, wird $\{K_u<0\}$ zum sicheren Ereignis;
für $c>\mu$ geht die linke Seite gegen ∞, das Ereignis wird also zur leeren Menge;
für $c=\mu$ konvergiert die linke Seite gegen 0 und die Ruin-Wahrscheinlichkeit gegen ½ , weil obige Zufallsvariable in Verteilung gegen eine symmetrisch verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 konvergiert. Daraus folgt die Behauptung.

Wie im vorhergehenden Abschnitt ergibt sich, dass die Jahres-Prämie den Erwartungswert des einjährigen Gesamtschadens bzw. den Barwert übersteigen muss.

3.4. **Prämienkalkulationsprinzipien**

Ein Risiko ist versicherbar, wenn seine Übernahme durch feste Zahlungen, „Prämien", in endlicher Höhe kompensiert werden kann. Durch Versicherung gegen Prämien sollen die Schäden im Kollektiv ausgeglichen werden. Die Prämie ist somit aufgrund der Schadenverteilung des Risikos zu bestimmen. Nach den Ergebnissen des Abschnitts 3.3 muss die Prämie, die den allfälligen Schadenzahlungen gegenüber steht, die sog. **Risikoprämie**, unter den Gegebenheiten des Abschnitts 3.3 den Erwartungswert der abgedeckten Schäden übersteigen. Die Risikoprämie setzt sich also zusammen aus dem Erwartungswert, der sog. Nettoprämie, und einem positiven Schwankungszuschlag. Weitere Bestandteile, die zur Marktprämie führen, wie Zuschläge für Abschluss- und Verwaltungskosten, für Gewinne, für Steuern etc. werden im weiteren nicht behandelt.

Die Versicherungsdauer des zu versichernden Risikos betrage 1 Jahr.
Seine einjährige Gesamtschadenhöhe wird durch eine reelle eindimensionale nichtnegative Zufallsvariable B mit positiver und endlicher Varianz modelliert. Anstelle der einjährigen Dauer kann auch ein anderes Zeitintervall gesetzt werden. Über die Schadenverteilung von Kollektiven liegen oftmals hinreichende Erkenntnisse vor, nicht jedoch über die einzelnen Risiken aus dem Kollektiv. Dieses Thema wird im weitern nicht behandelt; hier wird davon ausgegangen, dass die Verteilung von B bekannt sei. Nun soll eine „vernünftige" Regel gefunden werden, nach der aufgrund der Verteilung von B eine Risikoprämie zu berechnen ist. Formal wird eine Abbildung H der einjährigen Gesamtschadenverteilung von B in die nichtnegativen reellen Zahlen (Höhe der jährlichen Risikoprämie RP) gesucht:

$$RP = H(B) \tag{4.1}$$

Man beachte, dass die Risikoprämie nicht von B selbst sondern von seiner Verteilung abhängt. H(B) ist die Jahresprämie, zu der der Versicherer bereit ist, das Risiko zu versichern. Die Risikoprämie muss aus dem Erwartungswert zzgl. einem positiven Schwankungszuschlag bestehen. Dieser sollte von der Variabilität des Risikos abhängen. Je höher die Variabilität des Gesamtschadens umso mehr Deckungsmittel muss der Versicherer vorhalten.

In der Literatur wird eine Vielzahl von Prämienkalkulationsprinzipien (kurz: Prämienprinzipien) diskutiert, worunter einige hauptsächlich von theoretischem Interesse sind. Exemplarisch werden 5 Prämienprinzipien aufgeführt.

a) Nettoprämienprinzip (=Äquivalenzprinzip)
$$H(B) = E(B)$$

b) Erwartungswertprinzip
$$H(B) = (1+c)\, E(B)$$

c) Varianzprinzip
$$H(B) = E(B) + c\, Var(B)$$

d) Standardabweichungsprinzip
$$H(B) = E(B) + c\, Var(B)^{1/2}$$

e) Exponentialprinzip

$$H(B) = 1/a \ln E(e^{aB}) \text{ mit } a>0$$

mit dem jeweiligen Schwankungszuschlag $c>0$.

Weitere Prinzipien werden beispielweise von Asmussen/Albrecher (Ruin Probabilities. World Scientific 2. Auflage 2010 S. 510) oder Heilmann (Grundbegriffe der Risikotheorie. VVW Karlsruhe 1997 S. 136) behandelt.

Prämienprinzipien sind danach zu untersuchen, ob sie gewisse plausibel erscheinende Eigenschaften haben. Im folgenden werden einige wünschenswerte Standard-Eigenschaften genannt.

1) Erwartungswert übersteigend

   $H(B) \geq E(B)$ für jedes Risiko B

   In Abschnitt 3.3 wurde dargelegt, dass der Erwartungswert der abgedeckten Schäden überschritten werden muss.

2) Maximalschadenbegrenzt

   $H(B) \leq \max B$ für jedes endliche Risiko B

   Diese Forderung wird von den Prämienprinzipien b), c), und d) nicht erfüllt.

3) Translationsinvarianz (Konsistenz)

   $H(B + c) = H(B) + c$ für jedes Risiko B und alle reellen Zahlen c.

   Diese Forderung wird vom Erwartungswertprinzip nicht erfüllt.

4) Homogenität (Proportionalität)

   $H(c\,B) = c\,H(B)$ für alle positiven reellen Zahlen c

   Diese Forderung wird vom Varianzprinzip nicht erfüllt.

5) Kein ungerechtfertigter Schwankungszuschlag

   $H(c) = c$ für alle reellen Zahlen c.

   Diese Forderung wird vom Erwartungswertprinzip nicht erfüllt..

6) Additivität

   $H(B + C) = H(B) + H(C)$ für alle unabhängigen Zufallsvariablen B und C

   Diese Forderung wird vom Standardabweichungsprinzip nicht erfüllt.

Es folgt eine tabellarische Übersicht über das Vorliegen obiger Eigenschaften. Dabei werden nur nichtnegative Risiken zugrunde gelegt.

Prämien-kalkulations-prinzip	Eigenschaft 1)	2)	3)	4)	5)	6)
a)	+	+	+	+	+	+
b)	+	-	-	+	-	+
c)	+	-	+	-	+	+
d)	+	-	+	+	+	-
e)	+	+	+	-	+	+

Mit Ausnahme des Nettoprämienprinzips besitzt keines der aufgeführten Prämienprinzipien alle genannten Eigenschaften. Asmussen/Albrecher (Ruin Probabilities. World Scientific 2. Auflage 2010 S. 512) bemerken, dass in den letzten Jahren die Diskussion darüber, welche Eigenschaften ein Prämienprinzip in verschiedenen Anwendungen haben sollte, enormes Interesse und Aktivität erfahren hat.

Die Bestimmungen der Schwankungszuschläge der Prämienprinzipien b), c) und d) sowie die Bestimmung des Parameters a des Exponentialprinzips werden hier nicht behandelt. Die Prämienprinzipien a) bis e) (und viele andere) werden in der Praxis verwendet.
In der Lebensversicherung geht man konzeptionell einen anderen Weg zur Einbeziehung von Schwankungszuschlägen. Man stützt sich zunächst auf vorsichtige Rechnungsgrundlagen (niedriger Zins, erhöhte bzw. erniedrigte Sterbewahrscheinlichkeiten bei Tarifen mit Todes- bzw. Erlebensfallcharakter etc.) und berechnet die Prämie dann nach dem Äquivalenzprinzip. Somit entstehen implizite Schwankungszuschläge. Heilmann (Grundbegriffe der Risikotheorie. VVW Karlsruhe 1987, S. 110 ff.) weist darauf hin, dass es sich hierbei um ein Erwartungswertprinzip handelt.

6. Lebensversicherungen

4.1. Verteilung der Lebensdauer

4.1.1. Dichte, Lebenserwartung, Bezeichnungsweise

Für eine bestimmte Person, deren Alter x sei, werde ihre zukünftige Lebensdauer mit T bezeichnet. Also ist x+T das Alter beim Tode dieser Person.
T sei eine reelle eindimensionale nichtnegative beschränkte absolutstetige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Die Verteilung von T werde als bekannt vorausgesetzt.

Da T absolutstetig ist, gibt es eine integrierbare Funktion $g:[0,\infty)\text{->}[0,\infty)$ mit

$$P(T<t) = \int_0^t g(s)\, ds \quad \text{für alle } t>0 \qquad (1.1.1)$$

Man kann nun alle interessierenden Aspekte der Verteilung von T durch die Dichte g ausdrücken. In der Versicherungsmathematik gibt es aber eine Bezeichnungsweise, die international üblich ist. Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts bemühte sich die Internationale Vereinigung der Versicherungsmathematiker um eine Angleichung der versicherungsmathematischen Bezeichnungsweise. 1937 wurde eine Kommission dazu eingesetzt. Die von ihr ausgearbeitete Bezeichnungsweise ist international üblich. Grundlegende Symbole sollen hier im weiteren wenn möglich übernommen werden.

So bezeichne ${}_tq_x$ die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen, also

$${}_tq_x := P(T\leq t) \qquad (1.1.2)$$

Die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der x-jährigen Person ist

$${}_tp_x := 1 - {}_tq_x \qquad (1.1.3)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die x-jährige Person die nächsten s Jahre überlebt und dann innerhalb von t Jahren sterben wird, ist

$${}_{s|t}q_x := P(s < T \leq s+t) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x \qquad (1.1.4)$$

Vereinfachend bezeichne $q_x := {}_1q_x$, $p_x := {}_1p_x$, ${}_{s|}q_x := {}_{s|1}q_x$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die x-jährige Person nach Erreichen des Alters x+s weitere t Jahre leben wird, gegeben dass sie dieses Alter x+s erreicht, sei bezeichnet mit

$${}_tp_{x+s} := P(T > s+t \mid T>s)$$

Es gilt

$${}_tp_{x+s} = [1 - P(T\leq s+t)] \,/\, [1 - P(T\leq s)], \qquad (1.1.5)$$

vorausgesetzt $P(T\leq s)<1$.

Die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit, falls das Alter x+s erreicht worden ist, wird bezeichnet mit

$$ {}_tq_{x+s} := P(T \leq s+t | T>s) $$

Es gilt

$$ {}_tq_{x+s} = [P(T\leq s+t)-P(T\leq s)] / [1- P(T\leq s)] \tag{1.1.6} $$

Daraus folgt:

$$ {}_{s+t}p_x = {}_sp_x \, {}_tp_{x+s} \tag{1.1.7} $$

$$ {}_{s|t}q_x = {}_sp_x \, {}_tq_{x+s} \tag{1.1.8} $$

E(T), die Lebenserwartung des x-jährigen, ist

$$ \overset{o}{e}_x := \int_0^\infty t \, g(t) \, dt \tag{1.1.9} $$

Somit gilt:

$$ \overset{o}{e}_x = \int_0^\infty [1- P(T\leq t)] \, dt = \int_0^\infty {}_tp_x \, dt \tag{1.1.10} $$

4.1.2. <u>Die Sterblichkeitsintensität</u>

Die Sterblichkeitsintensität des x-jährigen im Alter x+t ist definiert als

$$ \mu_{x+t} := g(t) / {}_tp_x \tag{1.2.1} $$

Also:

$$ \mu_{x+t} = - \frac{d}{dt} \ln {}_tp_x \tag{1.2.2} $$

Durch Integration ergibt sich:

$$ {}_tp_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} \, ds) \tag{1.2.3} $$

Für kleine Dauern s erhält man mit (1.1.8) die Approximation

$$ {}_sq_{x+t} \approx \mu_{x+t} \, s $$

Demnach kann die Sterblichkeitsintensität wie folgt gedeutet werden:
Nimmt man an, die unterjährliche Sterblichkeit sei gleichverteilt, d.h. wenn ${}_sq_{x+t} = s \, q_{x+t}$ $(0<s<1)$, so ist das Produkt aus Sterblichkeitsintensität und s eine Näherung für die unterjährige Sterbewahrscheinlichkeit.
Dies gilt auch dann, wenn ${}_sq_{x+t}$ nicht als linear in s vorausgesetzt werden kann.

4.1.3. Einfache Formeln für die Verteilungsfunktion

Verschiedentlich wurde versucht, die Verteilungsfunktion der Lebensdauer durch eine einfache Formel (eine sog. analytische Verteilung) zu beschreiben. Dafür gab es mehrere Gründe:
Kann die Verteilungsfunktion durch eine einfache Formel beschrieben werden, bedarf es lediglich numerischer Werte für die Parameter dieser Formel.
Um die Verteilungsfunktion statistisch zu schätzen, genügt die Schätzung einer kleinen Anzahl von Parametern.
Einfache Formeln können ansprechende theoretische Eigenschaften haben und ihre mathematische Behandelbarkeit ermöglichen bzw. erleichtern.

Zunächst werden Beispiele von analytischen Verteilungen gegeben.

De Moivre forderte ein Höchstalter ω für die Lebensdauer und dass T gleichverteilt zwischen 0 und $\omega - x$ sei, d.h. $g(t)=t/(\omega-x)$ für $0<t<\omega$. Daraus ergibt sich die Sterblichkeitsintensität $\mu_{x+t} := 1/(\omega-x-t)$.

Gompertz forderte exponentielles Wachstum der Sterblichkeitsintensität: $\mu_{x+t} := B\, c^{x+t}$ für $t>0$ mit den Parametern $B>0$ und $c>1$.

Makeham verallgemeinerte den Gompertzschen Ansatz durch

$$\mu_{x+t} := A + B\, c^{x+t} \qquad (1.3.1)$$

mit $A>0$.

Weibull forderte für die Sterblichkeitsintensität Wachstum wie bei einer Potenz: $\mu_{x+t} := k\,(x+t)^n$ mit den Parametern $k>0$ und $n>0$.

Mit dem Ansatz von Gompertz/Makeham erhält man aus (1.2.1) und (1.2.3) die t-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten:

$${}_tp_x = \exp(- A\, t - (B/\ln c)\, c^x\, (c^t - 1)) \qquad (1.3.2)$$

4.1.4. Erstellung von Sterbetafeln

Um die benötigten Wahrscheinlichkeiten wie ${}_tp_x$, ${}_tq_x$,... auswerten zu können bzw. um die Parameter einer analytischen Verteilung festlegen zu können, bedarf es verschiedener Zahlentabellen. Eine Tabelle der q_ξ für die ganzzahligen Alter $\xi = x, x+1, x+2, ..., \omega$, wobei ω ein geeignetes Schlussalter, z.B.116, ist, genügt, um die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_x und damit auch die mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_tp_x$ sowie ${}_tq_x$ für ganzzahlige t zu berechnen, s. (1.1.3), (1.1.7). Eine solche Tabelle wird Sterbetafel genannt. Mit geeigneten Annahmen über den Verlauf der unterjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten (s. nachfolgender Abschnitt) gewinnt man die benötigten Wahrscheinlichkeiten auch für nicht-ganzzahlige t. Auch die Lebenserwartung kann damit ausgerechnet werden.

Sterbetafeln werden aus geeigneten nach Geschlecht und Alter unterscheidenden Statistiken über die einjährigen relativen Sterbehäufigkeiten gewonnen (auch für Alter $\xi<x$) , sog. Periodensterbetafeln. Dabei sollten je nach beabsichtigter Verwendung unterschiedliche Grundgesamtheiten herangezogen werden. So weist die Gesamtheit der Lebensversicherten deutlich geringere relative Sterbehäufigkeiten auf als die Gesamtbevölkerung. Ein Grund hierfür ist, dass vor Abschluss einer Lebensversicherung regelmäßig der Gesundheitszustand geprüft wird. Andere Unterscheidungsmerkmale sind Personen mit (potenziellem) Anspruch auf Leitungen der betrieblichen Altersversorgung versus Gesamtbevölkerung, Raucher versus Nichtraucher etc.

Periodensterbetafeln geben nur die Sterbehäufigkeiten für Alter an, die die Personen in der ausgewerteten Periode hatten. Sekulare Sterblichkeitsverbesserungen etwa durch medizinischen Fortschritt werden bei der Konstruktion von **Generationssterbetafeln** berücksichtigt Diese unterscheiden zusätzlich nach dem Geburtsjahr und Trendannahmen der Sterblichkeitsentwicklung werden einbezogen.

Zur Konstruktion von Sterbetafeln kommen Extrapolationen und statistische Methoden wie Ausgleichsrechnungen zum Einsatz.

Die erste brauchbare Sterbetafel wurde 1693 von Edmund Halley, dem Entdecker des Halleyschen Kometen, konstruiert.

4.1.5. Zeitanteilige Sterbewahrscheinlichkeiten

Da mittels Sterbetafeln die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten ${}_tp_x$ und ${}_tq_x$ nur für ganzzahlige t berechnet werden können, bedarf es geeigneter Annahmen über den Verlauf der unterjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten ${}_uq_x$ $(0<u<1)$.

Oft wird folgender Ansatz gewählt:
Die Funktion $u \to {}_uq_x$ sei linear.
Also:

$$ {}_uq_x = u\, q_x \qquad (1.5.1) $$

$$ {}_up_x = 1 - u\, q_x \qquad (1.5.2) $$

und in Anwendung von (1.2.2)

$$ \mu_{x+u} = q_x \,/\, (1 - u\, q_x) \qquad (1.5.3) $$

4.1.6. Überprüfung einer Sterbetafel mit einem statistischen Test

Der Lebensversicherer muss regelmäßig überprüfen, ob die von ihm verwendeten Sterbetafeln der realen Sterblichkeit des Kollektivs der versicherten und zu versichernden Personen entsprechen.

Dazu kann man pro Lebensaltersgruppe die Anzahlen der zu Jahresbeginn vorhandenen Personen und die pro Altersgruppe im Laufe des Jahres eingetretenen Todesfälle feststellen und der zu prüfenden Sterbetafel gegenüberstellen. Auf Probleme der Abgrenzung des Personenkreises der zu Jahresbeginn vorhandenen Personen und der Einteilung nach Altersgruppen wird hier nicht eingegangen. So wird die Einbeziehung von Zugängen des Jahres nicht behandelt. Auch Abgänge des Jahres außer durch Tod werden nicht untersucht. Unter einer Altersgruppe wollen wir die Klasse der Personen mit gleichem ganzzahligem Lebensalter verstehen.

4.1.6.1. Beobachtungen

Wir gehen von n verschiedenen Altersgruppen aus und dass für $\nu=1,2,\ldots,n$ in der Gruppe ν zu Jahresbeginn L_ν Personen vorhanden waren und davon t_ν Todesfälle im Laufe des Jahres eingetreten sind ($n, L_\nu, t_\nu \varepsilon$ IN, t_ν kann auch 0 sein). Diese Werte liegen vor.

Das Ereignis Tod einer Person im Laufe des Jahres, wollen wir als zufällig betrachten und durch eine reelle Zufallsvariable beschreiben. Für die Altersgruppen $\nu=1,\ldots,n$ und die jeweiligen Personen $l=1,2,\ldots,L_\nu$ seien also Zufallsvariablen $X_{\nu,l}$ vorgegeben. Die Zufallsvariablen seien auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,A,P) definiert und stochastisch unabhängig. $X_{\nu,l}$ ist bernoulliverteilt und nimmt den Wert 1 an, wenn die l-te Person der ν-ten Altersgruppe stirbt, sonst den Wert 0.

Die Anzahl der Todesfälle einer Altersgruppe ν ist

$$T_\nu := X_{\nu,1} + X_{\nu,2} + \ldots + X_{\nu,L\nu} \qquad (1.6.1)$$

und t_ν wird als Realisierung von T_ν aufgefasst.

4.1.6.2. Null-Hypothese

Die zu testende Hypothese („Null-Hypothese“) lautet:
Die der Stichprobe zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit stimmt mit der vorgegebenen (zu testenden) Sterbetafel in dem Sinne überein, dass die Abweichungen der relativen Sterbequoten T_ν/L_ν von den Werten der zu testenden bekannten Sterbetafel q_ν über den gesamten Altersbereich gering sind.

4.1.6.3. Entscheidungsfunktion

Dazu kann ein statistischer Test eingesetzt werden. Mit einem Hypothesentest entscheidet man aufgrund von Beobachtungen (Stichproben), ob eine vorab formulierte Hypothese abzulehnen ist.

Im Rahmen unserer Gegebenheiten ist ein Test formal eine Funktion auf $t_1,\ldots,t_n$ mit den Werten 0 oder 1. Dabei bedeute 1 Ablehnen der Null-Hypothese, 0 bedeute, dass die Beobachtungen nicht im Widerspruch zu Null-Hypothese stehen.

Mit einem solchen Stichprobenverfahren wird man natürlich niemals Übereinstimmung der Sterbequoten mit der Sterbetafel erhalten. Es stellt sich die Frage, ob die Abweichungen von den Sterbetafelwerten nur zufallsbedingt sind oder ob im realen Bestand eine andere Gesetzmäßigkeit herrscht.

Die Entscheidung, die Sterbetafel abzulehnen, kann (zufallsbedingt) falsch sein, sog. Fehler 1. Art. Die Sterbequoten können zufallsbedingt derart von der Sterbetafel abweichen, dass sie zur Ablehnung der Sterbetafel führen, obwohl die Sterbetafel den realen Verlauf auf lange Sicht ganz passend erfasst. Ebenso kann die Entscheidung, aufgrund der Sterbequoten sei nichts gegen die Sterbetafel einzuwenden, falsch sein.

Gesucht wird ein Test, bei dem die Entscheidung, die Null-Hypothese abzulehnen, obwohl sie wahr ist, nur mit geringer vorgebbarer Wahrscheinlichkeit α, fällt. Diese Irrtumswahrscheinlichkeit kann z.B. 0,05 sein. Man spricht dann von einem „Test zum Niveau α".

4.1.6.4. χ^2 – Verteilung

Wir wollen die unbekannten Verteilungen der Stichprobe zu einer χ^2 – Verteilung umwandeln. Für diese Verteilung sind Tabellen über ihre Fraktile (Wertebereiche, in die eine Zufallsvariable mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit nicht fallen wird) erhältlich.

Wenn die Null-Hypothese wahr ist, hat T_v / L_v den Erwartungswert q_v und T_v ist binomialverteilt mit den Parametern L_v und q_v.

Im Hinblick darauf, dass für den theoretischen Fall, dass mit wachsendem Bestand $L_v\, q_v \rightarrow \lambda$ für ein $\lambda>0$, und demzufolge die Verteilung von T_v gegen die Poisson-Verteilung mit dem Parameter (Erwartungswert) λ konvergiert, und da q_v sehr klein und L_v gegenüber q_v sehr groß ist, wollen wir T_v näherungsweise als poissonverteilt annehmen mit dem Erwartungswert und der Varianz $L_v\, q_v$. Dieser Parameter ist unter der Null-Hypothese also näherungsweise der Erwartungswert von T_v.

Um die benötigten Wahrscheinlichkeit approximativ berechnen zu können, wird auf die standardisierte Abweichung übergegangen.

$$\chi_v := (T_v - L_v\, q_v) \,/\, (L_v\, q_v)^{1/2} \qquad (1.6.2)$$

Diese Zufallsvariable ist asymptotisch standartnormalverteilt (d.h. mit Erwartungswert 0 und Varianz 1).
Nehmen wir an, diese Zufallsvariablen seien standartnormalverteilt, dann ist

$$\chi^2 := \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_n \qquad (1.6.3)$$

χ^2 - verteilt mit n Freiheitsgraden.

4.1.6.5. Durchführung des χ^2 – Tests

Für die χ^2 - Verteilung liegen Tabellen über Fraktile vor. Eine Irrtumswahrscheinlichkeit bzgl. des Fehlers 1. Art kann gewählt werden. Bezeichne $\chi^2_{n,1-\alpha}$ das α-Fraktil der χ^2 - Verteilung mit n Freiheitsgraden, so lautet die Testvorschrift:

Falls $\chi^2 > \chi^2_{n,1-\alpha}$, ist die Null-Hypothese abzulehnen;

falls $\chi^2 \leq \chi^2_{n,1-\alpha}$, steht die Stichprobe $(t_1, ..., t_n)$ nicht im Widerspruch zur Null-Hypothese.

4.2. Nettoeinmalprämien und Kommutationszahlen

Im Folgenden wird für einige häufig vereinbarte Versicherungsleistungen ihr Erwartungswert vom Barwert zum Zeitpunkt 0 ermittelt. Dabei liegt ein bestimmter Zinssatz $i>0$ zugrunde und es wird die übliche Bezeichnung $v=1/(1+i)$ verwendet.

Zuerst ist der Leistungsprozess zu spezifizieren. Aus ihm ergibt sich nach Definition aus Abschnitt 3.2. der Barwert. Er wird mit B_0 bezeichnet. Der Erwartungswert $E(B_0)$ vom Barwert zum Zeitpunkt 0 wird **Nettoeinmalprämie** (kurz: NEP) genannt. Die NEP wird nachfolgend mit international üblichen Bezeichnungen ausgedrückt – soweit möglich.

Sofern nichts anderes vorgegeben wird, sei die versicherte Person zu Beginn der Versicherung x Jahre alt. Mit [T] werde die ganzzahlig gestutzte Lebensdauer T der versicherten Person bezeichnet. n sei eine natürliche Zahl. 1_A bezeichne die Indikatorfunktion eines Ereignisses A.

4.2.1. Zahl der Lebenden

Aufgrund der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten kann man eine zeitliche Entwicklung eines Bestands von x-jährigen konstruieren. Bei Verwendung dieser Werte kommt man oftmals zu einer kürzeren Formel für die NEP.

l_x sei eine positive Zahl und

$$l_\xi := l_{\xi-1} \cdot {}_1p_{\xi-1} \qquad \text{für } \xi = x+1, x+2,\ldots,\omega+1 \qquad (2.1.1)$$

$$\text{mit } \omega := \min\{\xi \mid \xi \in \mathrm{IN}, \xi \geq x, q_\xi = 1\}$$

$$d_\xi := l_\xi - l_{\xi+1} \qquad \text{für } \xi = x, x+1,\ldots,\omega \qquad (2.1.2)$$

Die Elemente der Folge l_x, l_{x+1}, ..., $l_{\omega+1}$ werden **Zahl der Lebenden** genannt.
l_ξ und d_ξ sind international übliche Bezeichnungen.

Es gilt:

$${}_kp_x = l_{x+k} \,/\, l_x \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, \omega - x \qquad (2.1.3)$$

$$q_\xi = d_\xi / l_\xi \qquad \text{für } \xi = x, x+1,\ldots, \omega \qquad (2.1.4)$$

$${}_kp_x\, q_{x+k} = d_{x+k} \,/\, l_x \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, \omega - x \qquad (2.1.5)$$

4.2.2. Kapitalleistungen

4.2.2.1. Lebenslange Todesfallversicherungen

Zu Ende des Versicherungsjahres, in dem die versicherte Person stirbt, (zum Zeitpunkt [T]+1) sei ein Kapital in Höhe von $s_{[T]+1}$ zu zahlen. Dabei sei s_x, s_{x+1}, s_{x+2},...
eine vorgegebene Folge von positiven reellen Zahlen.

Der Leistungsprozess besteht also aus nur dem einen Element $([T]+1, s_{[T]+1})$.
Demnach ist der Barwert der Leistungen $B_0 = v^{[T]+1}\, s_{[T]+1}$. Da

$$B_0 = v^{[T]+1}\, s_{[T]+1} \sum_{k=0}^{\infty} 1_{(k \le T < k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, s_{k+1}\, 1_{(k \le T < k+1)} \qquad (2.2.1)$$

folgt:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, s_{k+1}\, P(k \le T < k+1) = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1}\, s_{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \qquad (2.2.2)$$

denn $P(T \ge k, T < k+1) = P(T \ge k)\, P(T < k+1 \ge k) = {}_kp_x\, q_{x+k}$

Mit

$$C_\xi := d_\xi\, v^{\xi+1} \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega, \qquad (2.2.3)$$

$$D_\xi := l_\xi\, v^{\xi} \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega+1 \qquad (2.2.4)$$

ergibt sich (s. Abschnitt 4.2.1.):

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{\omega-x} (v^{x+k+1} / v^x)\, (d_{x+k} / l_x)\, s_{k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} s_{k+1}\, C_{x+k} / D_x \qquad (2.2.5)$$

Diese Erweiterung des Abzinsungsfaktors und seine Zusammenfassung mit der Zahl der Toten d_ξ bzw. der Zahl der Lebenden geht auf eine Idee von Nikolaus Tetens (1736-1807) zurück.

Speziell für $s_k \equiv 1$ ergibt sich mit

$$M_\xi := \sum_{k=\xi}^{\omega} C_k \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega \qquad (2.2.6)$$

$$E(B_0) = M_x / D_x \qquad (2.2.7)$$

In diesem Fall wird die NEP üblicherweise mit A_x bezeichnet.

4.2.2.2. Temporäre Todesfallversicherungen mit gleichbleibenden Leistungen

Stirbt der Versicherte vor Ablauf von n Jahren ($n \le \omega - x$), wird zu Ende des Versicherungsjahres, in dem er stirbt, ein Kapital in Höhe von 1 gezahlt.

Der Leistungsprozess enthält also keine Elemente, wenn $T \ge n$ (leere Menge). Sonst besteht er aus nur dem einen Element $([T]+1, 1)$. Demnach ist der Barwert der Leistungen
$B_0 = v^{[T]+1}\, 1_{(T<n)}$. (2.2.8)

Da

$$B_0 = v^{[T]+1} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{(k\leq T<k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, 1_{(k\leq T<k+1)} \tag{2.2.9}$$

folgt wie in Abschnitt 4.2.2.1.:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = (M_x - M_{x+n}) / D_x \tag{2.2.10}$$

Die NEP wird mit $A^1_{x\overline{n}|}$ bezeichnet.

4.2.2.3. Temporäre Todesfallversicherungen mit linear steigenden Leistungen

Stirbt der Versicherte vor Ablauf von n Jahren ($n\leq\omega-x$), wird ein Kapital gewährt. Es beträgt k bei Tod im k-ten Versicherungsjahr ($k=1,2,\ldots,n$) und wird zu Ende dieses Versicherungsjahres gezahlt.

Der Leistungsprozess enthält also keine Elemente, wenn $T\geq n$ (leere Menge). Sonst besteht er aus nur dem einen Element $([T]+1,[T]+1)$. Demnach ist der Barwert der Leistungen

$$B_0 = v^{[T]+1}\, ([T]+1)\, 1_{(T<n)}. \tag{2.2.11}$$

Da

$$B_0 = v^{[T]+1}\, ([T]+1) \sum_{k=0}^{n-1} 1_{(k\leq T<k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, (k+1)\, 1_{(k\leq T<k+1)} \tag{2.2.12}$$

folgt wie in Abschnitt 4.2.2.1.:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, (k+1)\, {}_kp_x\, q_{x+k} \tag{2.2.13}$$

Mit

$$R_\xi := \sum_{k=\xi}^{\omega} M_k \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega, \tag{2.2.14}$$

ergibt sich:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, C_{x+k} / D_x = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{x+k} - M_{x+n})/D_x = (R_x - R_{x+n} - n\, M_{x+n}) / D_x \tag{2.2.15}$$

Die NEP wird mit $(IA)^1_{x\overline{n}|}$ bezeichnet.

4.2.2.4. Erlebensfallversicherungen

Stirbt der Versicherte nicht vor Ablauf von n Jahren, wird zu Ende des n-ten Versicherungsjahres, das Kapital 1 gezahlt.

Der Leistungsprozess enthält also keine Elemente, wenn T<n (leere Menge). Sonst besteht er nur aus dem einen Element (n,1). Demnach ist der Barwert der Leistungen $B_0 = v^n \, 1_{(T \geq n)}$.

Also:

$$E(B_0) = v^n \, {}_np_x = D_{x+n} / D_x \qquad (2.2.16)$$

Die NEP wird mit $A_{x\overline{n|}}{}^1$ bezeichnet.

4.2.2.5. Gemischte Kapitalversicherungen

Stirbt der Versicherte vor Ablauf des n-ten Versicherungsjahres, ist zu Ende des Versicherungsjahres, in dem er stirbt, das Kapital 1 zu zahlen. Erlebt der Versicherte den Ablauf des n-ten Versicherungsjahres, so ist zu diesem Zeitpunkt das Kapital 1 zu zahlen.

Der Leistungsprozess besteht nur aus dem einen Element (min{[T]+1,n},1). Demnach ist der Barwert der Leistungen
$B_0 = v^{\min\{[T]+1,n\}}$

Dieser ist offensichtlich die Summe der Barwerte aus den Abschnitten 4.2.2.2. und 4.2.2.4. Folglich gilt:

$$NEP = A^1{}_{x\overline{n|}} + A_{x\overline{n|}}{}^1 \qquad (2.2.17)$$

Diese NEP wird mit $A_{x\overline{n|}}$ bezeichnet.

Das Beispiel gemischte Kapitalversicherung wird im weiteren zur Veranschaulichung hin und wieder aufgegriffen, obwohl es in der Niedrigzinsphase kaum noch praktische Relevanz hat.

4.2.2.6. Lebenslange Todesfallversicherungen mit Auszahlung unmittelbar bei Ausscheiden

Zum Zeitpunkt des Todes – nicht erst zu Ende des betreffenden Versicherungsjahres - sei ein Kapital in Höhe von 1 zu zahlen.

Der Leistungsprozess besteht also nur aus dem einen Element (T,1).
Demnach ist der Barwert der Leistungen $B_0 = v^T$. Also:

$$NEP = E(B_0) = \int_0^\infty v^t \, g(t) \; dt = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 v^{k+t} \, g(k+t) \; dt, \qquad (2.2.18)$$

wobei g(t) die Dichte der Verteilung von T sei, s. Abschnitt 4.1.1, Rz. (1.1.1.).

Wir nehmen an, dass für die unterjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten gilt:

$$ {}_{u}q_{x+k} = u\, q_{x+k} $$

mit k=0,1,2,... für alle u ε (0,1), s. Abschnitt 4.1.5. Damit folgt für alle u ε (0,1):

$$ \int_0^u g(k+t)\, dt = P(k \le T < k+u) = {}_{k}p_x\, {}_{u}q_{x+k} = {}_{k}p_x\, u\, q_{x+k} = \int_0^u {}_{k}p_x\, q_{x+k}\, dt \qquad (2.2.19) $$

Also stimmen die Integranten auf (0,1) fast sicher überein: $g(k+t) = {}_{k}p_x\, q_{x+k}$ fast sicher. g(k+t) ist fast sicher konstant in t für t ε (0,1).

Folglich gilt mit δ wie in Abschnitt 1.1.:

$$ NEP = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k}p_x\, q_{x+k} \int_0^1 v^{k+t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k}p_x\, q_{x+k}\, \frac{i}{\delta} = \frac{i}{\delta} A_x \qquad (2.2.20) $$

4.2.3. <u>Leibrenten</u>

4.2.3.1. Allgemeine Leibrentenversicherung

Im Folgenden wird eine allgemeine Leibrentenversicherung betrachtet. Viele einfache Rentenprodukte ergeben sich daraus als Spezialfälle.

Zu den Zeitpunkten 0, 1/m, 2/m, ... werden die Zahlungen (Rentenraten) $z_0, z_{1/m}, z_{2/m}$ zu leisten sein, wenn der Versicherte den jeweiligen Zeitpunkt erleben wird. m sei eine natürliche Zahl.

Der Leistungsprozess ist

$$ \Lambda := \{((l-1)/m,\, z_{(l-1)/m}) \mid l = 1, 2, \ldots, [mT]+1\} \qquad (2.3.1) $$

Demnach ist der Barwert der Leistungen B_0^{Λ}

$$ B_0^{\Lambda} = \sum_{l=1}^{[mT]+1} v^{(l-1)/m}\, z_{(l-1)/m} = \sum_{\nu=0}^{\infty} v^{\nu/m}\, z_{\nu/m}\, 1_{(\nu \le [mT])} \qquad (2.3.2) $$

Da $\nu \le [mT]$ äquivalent ist mit $\nu \le mT$ für natürliche Zahlen ν und ${}_{(mk+\mu)/m}p_x = {}_{k}p_x\, {}_{\mu/m}p_{x+k}$ und ${}_{\mu/m}p_{x+k} = 1 - {}_{\mu/m}q_{x+k}$, folgt:

$$E(B_0^{\wedge}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v^{\nu/m} z_{\nu/m\ \nu/m}p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m-1} v^{(mk+\mu)/m} z_{(mk+\mu)/m\ \ (mk+\mu)/m}p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x \sum_{\mu=0}^{m-1} z_{k+\mu/m}\ v^{\mu/m}\ (1-{}_{\mu/m}q_{x+k})$$

(2.3.3)

Wird angenommen (s. Abschnitt 4.1.5.), dass
${}_uq_{x+k} = u\ q_{x+k}$ für alle $u\varepsilon(0,1)$ und $k=0,1,\ldots$, so folgt:

$$NEP = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x\ (r_k - c_{k+1}) \tag{2.3.4}$$

mit

$$r_k := \sum_{\mu=0}^{m-1} z_{k+\mu/m}\ v^{\mu/m} \tag{2.3.5}$$

$$c_{k+1} := \sum_{\mu=1}^{m-1} z_{k+\mu/m}\ v^{\mu/m-1}\ \mu/m\ v\ q_{x+k} \tag{2.3.6}$$

Also:

$$NEP = \sum_{k=0}^{\omega-x} (D_{x+k}\ r_k - C_{x+k}\, c_{k+1}) / D_x \tag{2.3.7}$$

Diese Formel lässt sich so deuten: Die NEP stimmt überein mit der NEP einer Rentenversicherung mit jährlicher Rentenzahlung in Höhe der auf den Jahresbeginn abgezinsten Rentenraten des Jahres abzüglich der NEP für eine Todesfallversicherung, bei der im Todesjahr die nach dem Todeszeitpunkt bis Jahresende vorgesehenen wegen Tod nicht mehr zu zahlenden Rentenraten aufgezinst auf das Jahresende zu Jahresende gewährt werden.

Man beachte, dass r_k und c_{k+1} unabhängig von der Sterbetafel sind und vorab errechnet werden können.

Ein Spezialfall ist eine Rentenversicherung mit unterjährig gleichbleibenden Rentenraten. Zumeist sind die Rentenraten eines Jahres gleich hoch und die Rentenhöhe ändert sich nur von Jahr zu Jahr. Das heißt:

$z_k = z_{k+\mu/m}$ für alle $\mu=1,2,\ldots,m-1$ und $k=0,1,\ldots$

Dann gilt:

$$r_k := \sum_{\mu=0}^{m-1} z_k\ v^{\mu/m} = z_k\ m\ \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}$$

$$c_{k+1} = z_k\ m\ \beta(m)$$

mit

$$\beta(m) := \sum_{\mu=0}^{m-1} v^{(\mu/m)-1}\ \mu/m^2 \tag{2.3.8}$$

Damit folgt aus (2.3.7):

$$\mathrm{NEP} = \sum_{k=0}^{\omega-x} z_k\, m\, (D_{x+k}\; \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} - C_{x+k}\,\beta(m)) / D_x \tag{2.3.9}$$

Mit

$\alpha(m) := \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} + d\,\beta(m)$

folgt, da

$C_{x+k} = D_{x+k}\, v - D_{x+k+1}$

und $D_{x+k}\; \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} - C_{x+k}\,\beta(m) = D_{x+k}\;\; (\alpha(m) - d\,\beta(m)) - D_{x+k}\, v\,\beta(m) + D_{x+k+1}\,\beta(m)$

und $d + v = 1$:

$$\mathrm{NEP} = \sum_{k=0}^{\omega-x} z_k\, m\, \{\alpha(m)\, D_{x+k} - \beta(m)\, (D_{x+k} - D_{x+k+1})\} / D_x \tag{2.3.10}$$

Die unterjährlichen Summanden sind damit beseitigt.

Die Zinsgrößen $\alpha(m)$ und $\beta(m)$ können unabhängig von der Sterbetafel vorab errechnet werden.

$$\alpha(m) = (1/m) \sum_{\mu=0}^{m-1} v^{\mu/m}\, (1 + (\mu/m)i) \approx 1 \tag{2.3.11}$$

$$\beta(m) \approx (1/m^2) \sum_{\mu=0}^{m-1} \mu\, (1+i)/(1 + (\mu/m)\, i) =: k^{(m)} \tag{2.3.12}$$

Insbesondere gilt für $z_k \equiv 1/m$ (sofort beginnende lebenslange gleichbleibende unterjährlich zu zahlende Leibrente vom Jahresbetrag 1):

$$\mathrm{NEP} = \alpha(m)\, (N_x/D_x) - \beta(m) \approx (N_x/D_x) - k^{(m)} \tag{2.3.13}$$

mit

$$N_\xi := \sum_{k=\xi}^{\omega+1} D_k \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega+1, \tag{2.3.14}$$

Diese NEP wird mit $\ddot{a}_x^{(m)}$ bezeichnet. Wenn m=1 (jährliche Zahlungsweise), kann der Index (m) weggelassen werden. Dies gilt auch für die Bezeichnungen der unten behandelten Leibrentenbeispiele.

4.2.3.2. Abgekürzte Leibrenten

Die Rentenzahlungsdauer betrage höchstens n Jahre. Zu den Zeitpunkten 0, 1/m, 2/m,..., n-1/m werden die Zahlungen (Rentenraten) $z_0, z_{1/m}, z_{2/m},..., z_{n-1/m}$ zu leisten sein, wenn der Versicherte den jeweiligen Zeitpunkt erleben wird. m und n seien natürliche Zahlen mit $n<\omega-x$.
Der Leistungsprozess dieser Rente ist

$$\{((l-1)/m, z_{(l-1)/m}) \mid l=1, 2, ..., \min\{[mT]+1; m\, n\}\}$$

und als Barwert B_0 ergibt sich:

$$B_0 = \sum_{l=1}^{\min\{[mT]+1;mn\}} v^{(l-1)/m} z_{(l-1)/m} = \sum_{v=0}^{mn-1/m} v^{v/m} z_{v/m} 1_{(v\leq[mT])} \qquad (2.3.15)$$

Dieser Barwert stimmt mit $B_0^{\wedge}$ nach (2.3.2) überein, wenn man in (2.3.2) $z_{v/m} = 0$ für $v/m \geq n$ setzt. Somit können die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2.3.1.übernommen werden.
Wird wieder angenommen, dass ${}_uq_{x+k} = u\, q_{x+k}$ für alle $u\varepsilon(0,1)$ und k=0,1,... , so ergibt sich insbesondere für $z_{v/m} \equiv 1/m$ für alle $v/m < n$ (sofort beginnende auf n Jahre abgekürzte gleichbleibende unterjährlich zu zahlende Leibrente vom Jahresbetrag 1) aus (2.3.10):

$$\text{NEP} = \sum_{k=0}^{n-1} \{\alpha(m)\, D_{x+k} - \beta(m)\, (D_{x+k} - D_{x+k+1})\} / D_x \qquad (2.3.16)$$

$$= \alpha(m)\, ä_{x\,\overline{n}|} - \beta(m)\, (1 - D_{x+n} / D_x)$$

$$\text{mit } ä_{x\,\overline{n}|} := (N_x - N_{x+n}) / D_x \qquad (2.3.17)$$

Diese NEP wird mit $ä^{(m)}_{x\,\overline{n}|}$ bezeichnet.

4.2.3.3. Aufgeschobene Leibrenten

Die Rente wird lebenslang gewährt, beginnt aber erst mit Ablauf des n-ten Jahres nach Versicherungsbeginn. Zu den Zeitpunkten n, n+1/m, n+2/m, ... werden die Zahlungen (Rentenraten) $y_0, y_{1/m}, y_{2/m},...$ zu leisten sein, wenn der Versicherte den jeweiligen Zeitpunkt erleben wird. m und n seien natürliche Zahlen mit $n<\omega-x$.

Der Leistungsprozess dieser Rente ist

$$\{(n + (l-1)/m, y_{(l-1)/m}) \mid l=1, 2, ..., [mT] + 1 - m\, n\}$$

und als Barwert B_0 ergibt sich:

$$B_0 = \sum_{l=1}^{[mT]+1-mn} v^{n+(l-1)/m}\, y_{(l-1)/m} = \sum_{v=m\,n}^{\infty} v^{v/m} y_{v/m-n} 1_{(v\leq[mT])} \qquad (2.3.18)$$

Setzt man $z_{v/m} = 0$ für $v/m < n$ und $z_{v/m} = y_{v/m - mn}$ für $v/m \geq n$, stimmt dieser Barwert mit $B_0{}^{\Lambda}$ aus (2.3.2) überein. Somit können die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2.3.1. übernommen werden. Wird wieder angenommen, dass ${}_u q_{x+k} = u\, q_{x+k}$ für alle $u\varepsilon(0,1)$ und $k=0,1,\ldots$, so ergibt sich insbesondere für $z_{v/m} \equiv 1/m$ für $v/m \geq n$ (um n Jahre aufgeschobene lebenslange gleichbleibende unterjährlich zu zahlende Leibrente vom Jahresbetrag 1) aus (2.3.10):

$$\mathrm{NEP} = \sum_{k=n}^{\omega-x} \{\alpha(m)\, D_{x+k} - \beta(m)\, (D_{x+k} - D_{x+k+1})\} / D_x \qquad (2.3.19)$$

$$= \alpha(m)\ N_{x+n} / D_x - \beta(m)\ D_{x+n} / D_x$$

Diese NEP wird mit ${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}{}_x$ bezeichnet.

4.2.3.4. Nachschüssige Zahlungsweise

Bei einer nachschüssig zu zahlenden Leibrente werden die Zahlungen nicht am Anfang des betreffenden zeitlichen Ratenzahlungsabschnitts sondern an seinem Ende gewährt, sofern die versicherte Person den Zahlungszeitpunkt erlebt.
Die Herleitung der NEP kann analog erfolgen und ist bezogen auf die oben behandelten Beispiele einfach. So ergibt sich bei der in Abschnitt 4.2.3.1. behandelten sofort beginnenden lebenslangen gleichbleibenden unterjährlich zu zahlenden Leibrente vom Jahresbetrag 1 unter den in 4.2.3.1. gemachten Voraussetzungen bei nachschüssiger Zahlungsweise eine NEP von $a_x^{(m)} := \ddot{a}_x^{(m)} - 1/m$.

4.2.4. Kommutationszahlen

Ergänzend sei folgende Bezeichnung eingeführt:

$$S_\xi := \sum_{k=\xi}^{\omega+1} N_k \qquad \text{für } \xi = x, x+1, \ldots, \omega+1,$$

Die Zahlen C_ξ, M_ξ, R_ξ, D_ξ, N_ξ, S_ξ werden Kommutationszahlen genannt.

Für $\xi = x, x+1, \ldots, \omega$ gilt:

$$C_\xi = v\, D_\xi - D_{\xi+1}$$

$$M_\xi = D_\xi - d\, N_\xi$$

$$R_\xi = N_\xi - d\, S_\xi$$

4.3. **Laufende Nettoprämien**

In Abschnitt 4.2. wurde der Begriff Nettoeinmalprämie eingeführt.

Vorgegeben seien eine Lebensdauer T - wie in Abschnitt 4.1. - und ein bestimmter Zinssatz i>0 sowie ein Leistungsprozess Λ und ein Prämienprozess Π, s. Abschnitt 3.1.

Definition: Π heißt **Nettoprämienprozess**, wenn

$$E(B_0^{\Pi}) = E(B_0^{\Lambda}). \tag{3.1}$$

Handelt es sich um einen Nettoprämienprozess mit vereinbarungsgemäß einmaliger Beitragszahlung, nennen wir den Einmalbeitrag **Nettoprämie.** Soll der Einmalbeitrag (wie üblich) zu Beginn der Versicherung entrichtet werden, stimmt die Nettoprämie mit der in Abschnitt 4.2. definierten Nettoeinmalprämie überein.

Handelt es sich andererseits um einen Nettoprämienprozess mit vereinbarungsgemäß periodischer Beitragszahlung in gleichbleibender Höhe, nennen wir den periodischen Beitrag **Nettoprämie.**

Die Ermittlung der Nettoprämie soll am Beispiel Gemischte Kapitalversicherung aufgezeigt werden. Die Gegebenheiten seien wie in Abschnitt 4.2.2.5. Der Erwartungswert vom Barwert der Leistungen zu Beginn der Versicherung ist also $A_{x\overline{n}|}$.

Die Beiträge seien jährlich vorschüssig und in gleichbleibender Höhe zu entrichten. Die Beitragszahlungsdauer ende bei Tod, spätestens mit Ablauf des n-ten Versicherungsjahres. Der Prämienprozess ist somit

$$\Pi = \{(k-1, b) \mid k=1,2,\ldots,\min\{[T]+1;n\}\} \tag{3.2}$$

wobei b die zunächst unbekannte Nettoprämie sei.
Demnach ist der Barwert der Prämien zu Beginn der Versicherung

$$B_0^{\Pi} = \sum_{k=1}^{\min\{[T]+1;n\}} v^{k-1}\, b = b \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, 1_{(k\leq T)} \tag{3.3}$$

Mit $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$, s. (2.3.17) in Abschnitt 4.2.3.2., folgt:

$$E(B_0^{\Pi}) = b\, \ddot{a}_{x\overline{n}|}\,. \tag{3.4}$$

$$b = A_{x\overline{n}|} \,/\, \ddot{a}_{x\overline{n}|} \tag{3.5}$$

Gleiches gilt für die weiteren Beispiele aus den Abschnitten 4.2.2. und 4.2.3., für die die Nettoeinmalprämie $E(B_0)$ ermittelt wurde:
Sind die Beiträge jährlich vorschüssig und in gleichbleibender Höhe zu entrichten und endet die Beitragszahlungsdauer bei Tod, spätestens mit Ablauf des n-ten Versicherungsjahres, so ergibt sich für die jährliche Nettoprämie b:

$$b = E(B_0) / \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} \; . \qquad (3.6)$$

Sind jedoch die Beiträge laufend und in unterschiedlicher Höhe zu entrichten, reicht (3.1) im allgemeinen zur Ermittlung des Nettoprämienprozesses nicht aus.

4.4. **Nettodeckungskapital**

4.4.1. Erfordernis einer Deckungsrückstellung

Die Äquivalenz zwischen Prämien und Leistungen gemäß (3.1) in Abschnitt 4.3 gilt nur für den Zeitpunkt t=0. Nach Beginn der Versicherung und vor Ablauf der Versicherung, überwiegt der erwartete Barwert der zu erbringenden Leistungen regelmäßig den erwarteten Barwert der noch nicht zahlbar gewesenen Prämien. Also besteht in Höhe dieser Differenz für den Versicherer eine Verpflichtung. Dafür ist eine Deckungsrückstellung zu bilden und bilanziell auszuweisen.

Andererseits sollen die bereits eingenommenen Prämien zur Finanzierung der künftig zu gewährenden Versicherungsleistungen dienen. Insoweit ist ein Guthaben entstanden, welches zur Finanzierung gebildet werden muss. Es soll die rechnungsmäßigen Zinsen erbringen. Überzinsen sind grundsätzlich im Rahmen der Überschussbeteiligung dem Versicherungsnehmer zukommen zu lassen. Schon für deren Bemessung bedarf es der Festsetzung dieses entstandenes Guthabens.

Vorgegeben seien eine Lebensdauer T - wie in Abschnitt 4.1. - und ein bestimmter Zinssatz $i>0$ sowie ein Leistungsprozess Λ und ein Prämienprozess Π, s. Abschnitt 3.1. t sei eine nichtnegative Zahl.

4.4.2. Das prospektive Nettodeckungskapital

4.1 Definition. $${}_tV := E(B_t^\Lambda - B_t^\Pi | T>t) \qquad (4.2.1)$$

heißt (prospektives) **Nettodeckungskapital** zum Zeitpunkt t.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen entsprechen also bei großem Bestand das Nettodeckungskapital zuzüglich Barwert der sofort oder zukünftig zu zahlenden Prämien approximativ dem Barwert der sofort oder zukünftig zu erbringenden Leistungen.

4.2 Beispiel. Gemischte Kapitalversicherung mit laufenden Nettoprämien
Die Gegebenheiten seien wie in Abschnitt 4.2.2.5.:

Stirbt der Versicherte vor Ablauf des n-ten Versicherungsjahres, ist zu Ende des Versicherungsjahres, in dem er stirbt, das Kapital 1 zu zahlen. Erlebt der Versicherte den Ablauf des n-ten Versicherungsjahres, so ist das Kapital 1 zu diesem Zeitpunkt zu zahlen.

Die Beiträge seien jährlich vorschüssig und in gleichbleibender Höhe zu entrichten. Die Beitragszahlungsdauer ende bei Tod, spätestens mit Ablauf des n-ten Versicherungsjahres. Laut Abschnitt 4.3. ergibt sich eine Nettoprämie b von $A_{x\overline{n}|} / \ddot{a}_{x\overline{n}|}$.

Zu einem Zeitpunkt $t\varepsilon\{1,2,...,n\}$ ist - sofern $T>t$ - der Barwert der Leistungen $B_t = v^{\min\{[T]+1-t,n-t\}}$ und sein bedingter Erwartungswert ist $A_{x+t\,\overline{n-t}|}$, s. Abschnitt 4.2.2.5.

Zum Zeitpunkt t ergibt sich ein Prämienbarwert von

$$B_t^{\Pi} = \sum_{k=t+1}^{\min\{[T]+1;n\}} v^{k-1-t}\, b = b \sum_{k=t}^{n-1} v^{k-t}\, 1_{(k\le T)} \qquad (4.2.2)$$

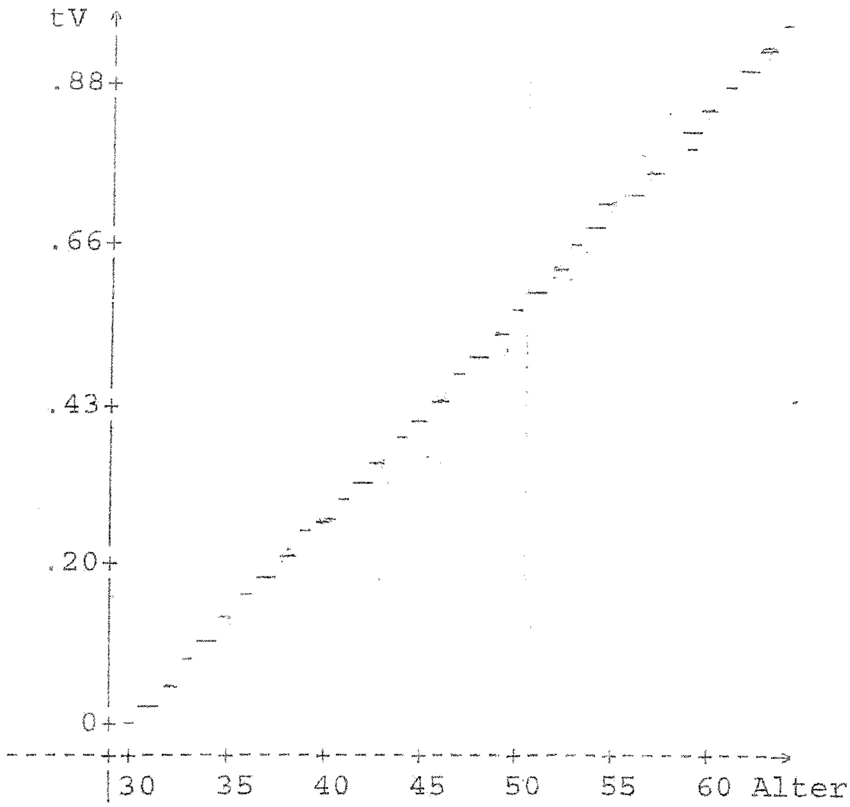
und sein bedingter Erwartungswert, gegeben $T>t$, ist $b\, \ddot{a}_{x+t\,\overline{n-t}|}$.

Für $t=1,2,\ldots,n-1$ ist das Nettodeckungskapital somit

$${}_tV = A_{x+t\,\overline{n-t}|} - b\, \ddot{a}_{x+t\,\overline{n-t}|}\,, \qquad (4.2.3)$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ gilt nach Definition: ${}_0V = 0$. Zum Zeitpunkt n ist $\Pi = \emptyset$, also $B_n^{\Pi} = 0$, und der Barwert der Leistungen dann 1, also gilt nach Definition ${}_nV = 1$.

Der Verlauf des Nettodeckungskapitals dieser Versicherung sei graphisch dargestellt am Beispiel eines 1992 geborenen, bei Eintritt x=30 Jahre alten Versicherten mit einer Versicherungsdauer von n=35 Jahren. Die Versicherungssumme sei 1. Zugrunde liegen die Richttafeln von Klaus Heubeck 2018 G Gesamtbestand und ein Rechnungszins von 0,9 % p.a.



4.4.3. Rekursionsformel

Das Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt t soll rekursiv berechnet werden können. Dafür ist ein Zusammenhang zu einem Nettodeckungskapital der Lebensversicherung herzustellen, das auf einen anderen Zeitpunkt bezogen ist.

Zu dem vorgegebenen Leistungsprozess $\Lambda = \{(\lambda_k, C_k) \mid k = 1,2,...,L_C\}$ und dem Prämienprozess $\Pi = \{(\pi_k, P_k) \mid k = 1,2,...,L_P\}$ bezeichne b_t die zum Zeitpunkt t per saldo zu leistenden Zahlungen. b_t ist die Summe der zum Zeitpunkt t zu erbringenden Leistungen abzüglich der Summe der zum gleichen Zeitpunkt an den Versicherer zu entrichtenden Prämien, d.h.

$$b_t := \sum_{l=1}^{L_C} C_l \, 1_{(\lambda_l = t)} - \sum_{l=1}^{L_P} P_l \, 1_{(\pi_l = t)} \tag{4.3.1}$$

Der Zusammenhang wird mit dem Nettodeckungskapital zu einem Zeitpunkt $\theta > t$ hergestellt. Wir setzen voraus, dass zwischen den Zeitpunkten t und θ keine Leistungszahlungen und keine Prämienzahlungen erfolgen können, d.h. θ wird so gewählt, dass λ_l und π_l nicht Element des offenen Intervalls (t,θ) für alle $l = 1,2,...,L_c$ bzw. $l = 1,2,...,L_p$ sind.
Dann gilt für $T>t$:

$$\begin{aligned}
&B_t^{\Lambda} - B_t^{\Pi} - b_t \\
&= \sum_{k=1}^{L_C} v^{\lambda_k - t} C_k \, 1_{(\lambda_k \geq t)} - \sum_{k=1}^{L_P} v^{\pi_k - t} P_k \, 1_{(\pi_k \geq t)} - b_t \\
&= \sum_{k=1}^{L_C} v^{\lambda_k - t} C_k \, 1_{(\lambda_k > t)} - \sum_{k=1}^{L_P} v^{\pi_k - t} P_k \, 1_{(\pi_k > t)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{L_C} v^{\lambda_k - \theta} C_k \, 1_{(\lambda_k \geq \theta)} - \sum_{k=1}^{L_P} v^{\pi_k - \theta} P_k \, 1_{(\pi_k \geq \theta)} \right) v^{\theta - t} \\
&= v^{\theta - t} (B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi}) \\
&= v^{\theta - t} [1_{(T \leq \theta)} (B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi}) + 1_{(T > \theta)} (B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi})]
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Also gilt nach Definition von ${}_tV$ und anschließend nach obigem:

$$\begin{aligned}
{}_tV - E(b_t \mid T>t) &= E(B_t^{\Lambda} - B_t^{\Pi} \mid T>t) - E(b_t \mid T>t) \\
&= E(B_t^{\Lambda} - B_t^{\Pi} - b_t \mid T>t) \\
&= v^{\theta-t} P(T \leq \theta \mid T>t) \, E(B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi} \mid \theta \geq T > t) + v^{\theta-t} P(T > \theta \mid T>t) \, E(B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi} \mid T > \theta) \\
&= v^{\theta-t} \, {}_{\theta-t}q_{x+t} \, E(B_\theta^{\Lambda} - B_\theta^{\Pi} \mid \theta \geq T > t) + v^{\theta-t} \, {}_{\theta-t}p_{x+t} \, {}_\theta V
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Gleichung (4.3.4) besagt, dass das Deckungskapital zu einem Zeitpunkt t zusammen mit den zu diesem Zeitpunkt zu zahlenden Prämien abzgl. den zu diesem Zeitpunk zu gewährenden Leistungen übereinstimmt mit dem erwarteten Barwert des zum Zeitpunkt θ notwendigen Kapitals (Leistungen bei Tod und Deckungskapital ${}_{\theta}V$ bei Erleben).

Diese Rekursionsformel sei an der gemischten Kapitalversicherung aus Abschnitt 4.3. illustriert.
Wir setzen: $\theta = t+1$.
Damit gilt: $b_t = -b$, wenn $T>t$. $B_{t+1}{}^{\Lambda} = 1$ und $B_{t+1}{}^{\Pi} = 0$, wenn $t+1 \geq T>t$. Folglich:

$$ {}_{t}V + b = v\, q_{x+t} + v\, p_{x+t}\ {}_{t+1}V \qquad (4.3.4)$$

Somit kann das Nettodeckungskapital ${}_{t}V$ für t=0,1,2,....,n rekursiv berechnet werden, entweder beginnend mit ${}_{n}V = 1$, dann ${}_{n-1}V$, dann ${}_{n-2}V$ u.s.w. oder beginnend mit ${}_{0}V = 0$, dann ${}_{1}V$, dann ${}_{2}V$ u.s.w.

Gleichung (4.3.4) ist äquivalent mit

$$ {}_{t}V - E(b_t \mid T>t) = {}_{\theta}V\, v^{\theta-t} + [E(B_{\theta}{}^{\Lambda} - B_{\theta}{}^{\Pi} \mid \theta \geq T>t) - {}_{\theta}V]\ v^{\theta-t}\ {}_{\theta-t}q_{x+t} \qquad (4.3.5)$$

Diese Gleichung kann so gedeutet werden, dass das neue Deckungskapital ${}_{\theta}V$ in jedem Fall ausfinanziert wird und zusätzlich bildet man einen Auffüllungsbetrag auf das neue Deckungskapital für die zu erwartenden Leistungsfälle.

4.4.4. Zerlegung der Prämie in Spar- und Risikoanteil

Um die nun verwendeten Ideen deutlich zu machen, gehen wir vereinfachend von den folgenden Spezifizierungen aus.

Prämien, sofern sie vorgesehen sind, müssen zu Beginn eines Versicherungsjahres gezahlt werden. Die Prämienzahlungsdauer endet spätestens mit dem Ableben der versicherten Person.

Der Nettoprämienprozess ist also

$$\Pi := \{(k, P_k) \mid k=0,1,...,\min\{[T];m\}\},$$

wobei P_k die jeweilige zu Beginn des Jahres zu entrichteten Jahresprämie des Jahres (k,k+1) sei. m sei eine natürliche Zahl, die das Ende der Prämienzahlungsdauer angibt.

Im Todesfall ist eine Leistung c_k vorgesehen, wenn der Versicherte im Zeitraum (k-1,k] stirbt mit k=0,1,2,... Die Leistung ist zum Zeitpunkt k auszuzahlen. Mit der Auszahlung endet die Versicherung. Erlebt der Versicherte den Ablauf des k-ten Versicherungsjahres, ist zu diesem Zeitpunkt eine Leistung in Höhe von z_k auszuzahlen.

Der Leistungsprozess ist also

$$\Lambda := \{(k, C_k) \mid k=0,1, ..., \min\{[T]+1;s\}\}$$

$$\text{mit } C_l = \begin{cases} z_l & \text{für } l \leq T \\ c_l & \text{für } l > T \end{cases}$$

Dabei sei s eine natürliche Zahl, die das Ende der Rentenzahlungsdauer angibt.

In Gleichung (4.3.6) sei nun $\theta = t+1$.

Im Falle $T \geq t$ ergibt sich nach Gleichung (4.3.6) $b_t = z_t - P_t$ und im Falle $t < T \leq \theta$

$$E(B_\theta^\Lambda - B_\theta^\Pi \mid \theta \geq T > t) = c_\theta,$$

so dass aus Gleichung (4.3.6) folgt:

$$_tV - z_t + P_t = {}_{t+1}V\ v + (c_{t+1} - {}_{t+1}V)\ v\ q_{x+t} \qquad (4.4.1)$$

Die Prämie P_t kann also in zwei Komponenten zerlegt werden

Definition. $P^s_t := {}_{t+1}V\ v - {}_tV + z_t$ heißt **Sparanteil** zum Zeitpunkt t.

$P^r_t := (c_{t+1} - {}_{t+1}V)\ v\ q_{x+t}$ heißt **Risikoanteil** zum Zeitpunkt t.

Sparanteil und Risikoanteil ergeben zusammen die Jahresprämie P_t.
Der Sparanteil zusammen mit dem Deckungskapital zum Zeitpunkt t abzüglich Erlebensfallleistung des Zeitpunkts t ergeben das um ein Jahr abgezinste Deckungskapital zum Zeitpunkt t+1.
Der Risikoanteil ist die Nettoprämie für eine einjährige Todesfallversicherung in Höhe des bei Tod erforderlichen Auffüllungsbetrags auf das um ein Jahr abgezinste Deckungskapital zum Zeitpunkt t+1.

Die Summe der aufgezinsten Sparanteile der vor dem Zeitpunkt t zu zahlen gewesenen Prämien, stimmt mit dem Nettodeckungskapital überein; denn

$$\sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^{t-k} P^s_t = {}_tV$$

4.4.5. <u>Die Prämiendifferenzformel</u>

Zugrunde liege die in Abschnitt 4.4.4. spezifizierte Lebensversicherung. Nettoprämienprozess Π und Leistungsprozess Λ sind dort dargestellt. Wir nehmen zusätzlich an, dass die jährlichen Nettoprämien gleichbleibend seien, die Prämienzahlungsdauer bei Tod der versicherten Person, spätestens mit Ablauf des s-ten Versicherungsjahres ende und dass x+s kleiner als ω sei.

Nach dem Äquivalenzprinzip ergibt sich als Jahresbeitrag b_0:
$b_0 = E(B_0^\Lambda) / \ddot{a}_{x\,\overline{s}|}$
Für das Nettodeckungskapital $_tV$ zum Zeitpunkt t ($t \leq s$) ergibt sich zunächst:

$$_tV = E(B_t^\Lambda \mid T > t) - b_0\ \ddot{a}_{x+t\,\overline{s-t}|}$$

$$= (b_t - b_0)\, \ddot{a}_{x+t\,\overline{s-t}|} \qquad (4.4.2)$$

mit

$b_t = E(B_t^{\Lambda}| T>t) / \ddot{a}_{x+t\,\overline{s-t}|}$

Formel (4.4.2) wird Prämiendifferenzformel genannt und kann so gedeutet werden: Nach Beginn der Versicherung reichen die zukünftigen Jahresprämien allein nicht mehr aus, um die zugesagten Leistungen zu erbringen. Darum wird ja ein Deckungskapital gebildet. Würde man die Nettoprämien auf b_t ab dem Zeitpunkt t festsetzen, wären die künftigen Leistungen abgedeckt. Es soll aber die Jahresprämie b_0 beibehalten werden. $(b_t - b_0)$ ist nun die Differenz, die somit fehlt. Ihr erwarteter Barwert stimmt laut (4.4.2) mit dem Nettodeckungskapital überein.

4.4.6. Das retrospektive Nettodeckungskapital

Zur Herleitung und Untersuchung wird der Prämienprozess und der Leistungsprozess aus Abschnitt 4.4.4. zugrunde gelegt. Vereinfachend betrage die Versicherungsdauer n Jahre ($n \varepsilon IN$) d.h. n = s = m-1. Für diesen Spezialfall wird das retrospektive Nettodeckungskapital definiert.

Für diese Versicherung gilt für t=1,...,n-1:

$$E(B_0^{\Pi}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x\, P_k$$

$$E(B_t^{\Pi}| T>t) = \sum_{k=t}^{n-1} v^{k-t}\, {}_{k-t}p_{x+t}\, P_k$$

$$E(B_0^{\Lambda}) = \sum_{k=0}^{n-1} (v^k\, {}_kp_x\, z_k + v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}\, c_{k+1})$$

$$E(B_t^{\Lambda}| T>t) = \sum_{k=t}^{n-1} (v^{k-t}\, {}_{k-t}p_{x+t}\, z_k + v^{k+1-t}\, {}_{k-t}p_{x+t}\, q_{x+k}\, c_{k+1})$$

Daraus ergibt sich wieder das prospektive Nettodeckungskapital in der Form ${}_tV = E(B_t^{\Lambda}| T>t) - E(B_t^{\Pi}| T>t)$.

Man kann eine analoge Schlusswertbetrachtung durchführen. Dazu sei $p_{x+t} > 0$.

$$S_t^{\Pi} := \sum_{k=0}^{t-1} {}_kp_x\, P_k\, (1+i)^{t-k} / p_{x+t}$$

S_t^Π ist ein mittlerer Schlusswert zum Zeitpunkt t. Zunächst wird der Barwert zu Beginn der Versicherung für die vor t zu entrichteten Beiträge berechnet. Anschließend wird dieser Barwert auf den Zeitpunkt t aufgezinst und dann mittels der Überlebenswahrscheinlichkeit erhöht zur Erfassung der Anheimfälle von Beiträgen von Personen des Bestands, die vor dem Zeitpunkt t verstorben sind.

$$S_t^\Lambda := \sum_{k=0}^{t-1} ({}_{k+1}p_x \; z_{k+1} + {}_kp_x \; q_{x+k} \; c_{k+1}) \, (1+i)^{t-k-1} / {}_tp_{x+t}$$

S_t^Λ ist ebenso ein mittlerer Schlusswert zum Zeitpunkt t. Zunächst wird der Barwert zu Beginn der Versicherung für die vor t zu zahlenden Leistungen berechnet. Anschließend wird dieser Barwert auf den Zeitpunkt t aufgezinst und dann mittels der Überlebenswahrscheinlichkeit erhöht zur Erfassung von Leistungen der Anheimfälle von Personen des Bestands, die vor dem Zeitpunkt t verstorben sind

Das **retrospektive Nettodeckungskapital** zum Zeitpunkt t ist definiert als

$${}_tV^{retro} := S_t^\Pi - S_t^\Lambda$$

Für S_t^Π bzw. S_t^Λ bestehen folgende Zusammenhänge mit den erwarteten Barwerten der Prämien bzw. Leistungen zu den Zeitpunkten 0 und t.

$$E(B_0^\Pi) = v^t \, p_{x+t} \, [S_t^\Pi + E(B_t^\Pi | \, T>t)],$$

$$E(B_0^\Lambda) = v^t \, p_{x+t} \, [S_t^\Lambda + E(B_t^\Lambda | \, T>t)]$$

Da nach dem Äquivalenzprinzip die linken Seiten beider Gleichungen übereinstimmen, sind auch die rechten Seiten gleich, also

$$S_t^\Pi - S_t^\Lambda = E(B_t^\Lambda | \, T>t)] - E(B_t^\Pi | \, T>t)$$

und somit ${}_tV^{retro} := {}_tV$ für jedes $t=1,\ldots,n-1$.