Aufgaben zu Kapitel 0

0.1. Seien A und B zwei Mengen. Wie kann man paarweise disjunkte Mengen A_1, A_2 und A_3 so wählen, dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \cup B$ gilt?

0.2. Seien E ein Menge und A eine Teilmengen von E. Zeige:

$$(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad \text{und} \quad A \cup A^c = E.$$

0.3. Für $A, B \subseteq E$ gilt $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. Insbesondere gilt $A = B$ genau dann, wenn $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

0.4. Seien E ein Menge und A, B zwei Teilmengen von E. Zeige:

(a) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$,

(b) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cup B}$,

(c) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Verwende (a)-(c) um die Gleichheit $\mathbb{1}_{(A\cup B)^c} = \mathbb{1}_{A^c \cap B^c}$ zu beweisen.

0.5. Sei $f : E \to F$ eine Abbildung und B, C zwei Teilmengen von F. Zeige:

(a) $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$,

(b) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

0.6. Eine Familie $(Z_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von E heißt eine Zerlegung von E, falls folgendes gilt:

(a) $E = \bigcup_{i\in I} Z_i$,

(b) $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ (paarweise Disjunktheit).

Zeige: Sind $A_1, \ldots, A_m$ Teilmengen von E, so bildet die Menge aller Durchschnitte

$$\bigcap_{k=1}^{m} M_k$$

wobei $M_k \in \{A_k, A_k^c\}$ für alle $k = 1, \ldots, m$, eine Zerlegung von E.

0.7. Seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Gebe die Komplemente folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$ an:

(a) $(a, b]$,

(b) $(-\infty, a] \cup (b, c]$.

0.8. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Zeige:

(a) $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b - 1/n]$,

(b) $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b + 1/n)$.

0.9. Ist A eine Teilmenge von E und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von E, so gilt

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i).$$

0.10. Für eine Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ von Teilmengen aus E setze

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Dann gilt:

(a) Ein Element x gehört genau dann zur Menge $\limsup_{n\to\infty} A_n$, wenn zu jeder natürlichen Zahl n eine Zahl $n_0 \geq n$ existiert (die von x abhängen kann), so dass $x \in A_{n_0}$. Es gilt also:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in E : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}.$$

(b) Ein Element x gehört genau dann zur Menge $\liminf_{n\to\infty} A_n$, wenn eine natürliche Zahl n_1 existiert (die von x abhängen kann), so dass $x \in A_n$ für alle $n \geq n_1$. Es gilt also:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in E : x \in A_n \text{ für alle, bis auf endlich viele } n\}.$$

Aufgaben zu Kapitel 1

1.1. Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra und sind $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

1.2. Bestimme die von den Mengen $(30, \infty)$, $[51, 61)$ und $[61, \infty)$ erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

1.3. Sei E eine nichtleere Menge. Zeige:

(a) Für $B \subseteq E$ ist $\{\emptyset, E, B, B^c\}$ eine σ-Algebra.

(b) Sind $B_1, \dots, B_m$ paarweise disjunkte Mengen mit $E = \bigcup_{j=1}^m B_j$, dann ist

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j \in M} B_j \mid M \subseteq \{1, \dots, m\} \right\}$$

eine σ-Algebra (setze hier $\bigcup_{j \in \emptyset} B_j = \emptyset$).

1.4. Für eine unendliche Menge E ist

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$$

eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

1.5. Sei E eine nichtleere Menge und (A_n) eine Folge von Teilmengen von E. Dann gibt es eine Folge (B_n) paarweise disjunkter Teilmengen von E, so dass

$$\bigcup_{n=1}^m A_n = \bigcup_{n=1}^m B_n$$

für alle $m \geq 1$.

1.6. Jedes der folgenden Mengensysteme ist auch ein Erzeuger der Borelschen σ-Algebra:

(a) $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$.

1.7. Weise nach, dass $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ offen ist.

1.8. Seien E eine nichtleere Menge, $f : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Bestimme die von f erzeugten σ-Algebren $f^{-1}(\mathscr{B}_\mathbb{R})$ auf E für folgende Abbildungen:

(a) Sei $A \in E$ und f die Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

(b) Sei $E = \mathbb{R}$ und $f(y) = \exp(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Aufgaben zu Kapitel 2

2.1 Es seien $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}$. Insbesondere gilt

$$\mu\,(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}$.

2.2. Es seien $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}$ eine feste Menge. Dann ist ν definiert durch

$$\nu(A) = \mu(A \cap B), \quad A \in \mathcal{A},$$

auch ein Maß auf $\mathcal{A}$.

2.3. Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ Maße auf $\mathcal{A}$ und $a_1, \ldots, a_n$ nichtnegative reelle Zahlen, so ist auch

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$.

2.4. Sei x ein festes Element von E. Für $A \in \mathscr{P}(E)$ definiere

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist δ_x ein Maß auf $\mathscr{P}(E)$ (das sogenannte Dirac-Maß bei x). Im Fall, dass $E = \mathbb{R}$, bestimme die Verteilungsfunktion von δ_x.

2.5. Es seien F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x) + \frac{1}{6}\mathbb{1}_{[2,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

und μ_F das durch F bestimmte Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Berechne das μ_F-Maß folgender Mengen:

$$[1, +\infty), \quad [0, 2), \quad [3, +\infty), \quad [2/3, 5/2), \quad [0, 1] \cup [2, 5).$$

2.6. Sei μ ein Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ mit Verteilungsfunktion F. Zeige:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ exisitiert der linksseitige Grenzwert $F(x-) := \lim_{y \uparrow x} F(y)$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mu((-\infty, x]) &= F(x), \\ \mu((-\infty, x)) &= F(x-), \\ \mu(\{x\}) &= F(x) - F(x-). \end{aligned}$$

2.7. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$. Für Intervalle aus $\mathcal{S}_1$ setze

$$\begin{aligned} \mu_F((a, b]) &= F(b) - F(a), \\ \mu_F((-\infty, b]) &= F(b), \\ \mu_F((a, +\infty)) &= 1 - F(a), \\ \mu_F((-\infty, +\infty)) &= 1 \end{aligned}$$

und für eine Menge $A = \bigcup_{k=1}^m I_k$ mit paarweise disjunkten $I_k \in \mathcal{S}_1$ setze weiter

$$\mu_F(A) = \sum_{k=1}^{m} \mu_F(I_k).$$

Zeige:

(a) μ_F ist ein Inhalt auf $\mathcal{F}_1$.

(b) Ist F rechtsstetig, so ist μ_F sogar ein Prämaß auf $\mathcal{F}_1$ (vgl. Satz Kapitel II, §2 Satz 2.2 in Elstrodt).

Aufgaben zu Kapitel 3

3.1. Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

3.2. Wir betrachten das Modell des zweifachen Würfelwurfes $(E, \mathscr{P}(E), \mu)$ mit $E = \{1, \ldots, 6\}^2$ und gleichmäßiger Verteilung $\mu((y_1, y_1)) = 1/36$, $(y_1, y_2) \in E$. Wir interessieren uns für die Augensumme $f : E \to F$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$, mit $F = \{2, 3, \ldots, 12\}$ und σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathscr{P}(F)$ auf F.

(a) Gebe die Elemente der σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{B})$ an.

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ^f.

3.3. Seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ zwei Borel-messbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen

$$cf, \quad f^2, \quad f + g, \quad fg, \quad |f|$$

Borel-messbar.

3.4. Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Sind $f, g : E \to \mathbb{R}$ zwei Borel-messbare Funktionen, so sind die Mengen

$$\begin{aligned} &\{x \in E : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in E : f(x) \leq g(x)\}, \\ &\{x \in E : f(x) = g(x)\}, \quad \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$-messbar.

3.5. Zeige:

$$\sigma\left(\{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}\right) = \{A \cup B \,|\, A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}, B \in \{-\infty, +\infty\}\}.$$

3.6. Überprüfe, ob die Funktionen f und g gegeben durch

$$\begin{aligned} f(y) &= 2\mathbb{1}_{[0,3/4]}(y) + 4\mathbb{1}_{[1/4,1]}(y), \quad y \in [0, 1], \\ g(y) &= 2\mathbb{1}_{[0,1/4]}(y) + 6\mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(y) + 4\mathbb{1}_{(3/4,1]}(y), \quad y \in [0, 1], \end{aligned}$$

auf dem Interval $[0, 1]$ gleich sind. Berechne die Integrale $\int_{(0,1]} f(y)\, d\lambda$ und $\int_{(0,1]} g(y)\, d\lambda$.

3.7. Wir betrachten das Modell des zweifachen Würfelwurfes $(E, \mathscr{P}(E), \mu)$ mit $E = \{1, \dots, 6\}^2$ und gleichmäßiger Verteilung $\mu((y_1, y_1)) = 1/36$, $(y_1, y_2) \in E$. Seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f((y_1, y_1)) = y_1 + y_2.$$

$$g((y_1, y_1)) = y_1,$$

Bestimme die kanonische Darstellung von f und g und berechne $\int f\, d\mu$ und $\int g\, d\mu$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 4

4.1. Sei $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Dann ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|\mu(\{k\}) < \infty$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\mu(\{k\}).$$

4.2. Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (f_n) eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$. Beweise:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E f_n\, d\mu \right).$$

Hinweis: Wende den Satz von der monotonen Konvergenz an.

4.3. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ und $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Zeige:

$$\int_{[0,\infty)} f\, d\lambda = \lim_{b \to \infty} \int_{[0,b]} f\, d\lambda.$$

Hinweis: Wende den Satz von der monotonen Konvergenz an.

4.4. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ nichtnegativ mit $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$. Setze

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda$$

für alle $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

(a) μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
Hinweis: Wende Aufgabe 5.2 an.

(b) Die Verteilungsfunktion des Maßes μ hat die Form

$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f \, d\lambda.$$

(c) F ist stetig.

(d) Ist f stetig, so ist die Verteilungsfunktion differenzierbar und es gilt $F' = f$.

(e) Für alle $h \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} hf \, d\lambda.$$

Hinweis: Zeige die Aussage zuerst für einfache Funktionen.

Bemerkung. Die Funktion f heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte* von μ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ.

4.5. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = (R-) \int_a^b f(x) \, dx$$

gilt, wobei $(R-)$ für das Riemann-Integral steht (für eine allgemeinere Aussage siehe Satz 5.30 in Küchler).
Bemerkung. Das wesentliche Hilfsmittel zur konkreten Berechnung solcher Integrale ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: ist F eine Stammfunktion von f (d.h. es gilt $F' = f$), so gilt

$$F(b) - F(a) = (R-) \int_a^b f(x) \, dx.$$

4.6. Für $t > 0$, berechne

$$\int_{[0,\infty)} e^{-tx} \, d\lambda(x).$$