Maßtheorie für Statistiker
Gliederung zur Vorlesung

Martin Wahl

1. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1 σ-Algebren und Borel-Mengen

1.1 Algebren, σ-Algebren

Definition 1. Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Man nennt $\mathcal{A}$ eine Algebra (auf E), wenn

(i) $E \in \mathcal{A}$,

(ii) für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c \in \mathcal{A}$,

(iii) für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Definition 2. Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Man nennt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (auf E), wenn

(i) $E \in \mathcal{A}$,

(ii) für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c \in \mathcal{A}$,

(iii) für alle Folgen $(A_n)_{n\geq 1}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Beispiele.

(a) Jede σ-Algebra ist auch eine Algebra.

(b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$ ist eine σ-Algebra.

(c) $\mathcal{A} = \mathscr{P}(E)$ ist eine σ-Algebra.

(d) Für jede Teilmenge $B \subseteq E$ ist $\{\emptyset, E, B, B^c\}$ eine σ-Algebra.

(e) Für eine unendliche Menge E ist $\mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

Lemma 1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gilt*

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(b) für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{A}$,

(c) für alle $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{k=1}^m A_k, \bigcap_{k=1}^m A_k \in \mathcal{A}$.

Lemma 2. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so gilt darüberhinaus*

$$A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Lemma 3. *Sei E eine nichtleere Menge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist. Dann ist*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subseteq E : A \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I\}$$

ebenfalls eine σ-Algebra. Kurz: Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren ist eine σ-Algebra.

Lemma 4. *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Dann ist*

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } E \text{ mit } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra, die $\mathcal{S}$ umfasst. Sie ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{S}$ umfasst.

Definition 3. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$ heißt die von $\mathcal{S}$ *erzeugte σ-Algebra*, das Mengensystem $\mathcal{S}$ nennt man einen *Erzeuger* der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$.

Lemma 5. *Sei E eine nichtleere Menge.*

(a) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf E, so gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

(b) Sind $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq \mathscr{P}(E)$ zwei Mengensysteme mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, so gilt $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{S}')$.

Definition 4. Jedes Paar $(E, \mathcal{A})$, wobei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf E ist, heißt *messbarer Raum*. Eine Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ heißt *$\mathcal{A}$-messbare* oder kurz *messbare Menge*.

1.2 Die Borelsche σ-Algebra

Definition 5. Sei $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ das Mengensystem aller nach links halboffenen Intervalle

$$(a,b], \quad (-\infty,b], \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,+\infty),$$

wobei $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Definition 6. Die σ-Algebra

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\mathcal{S}_1\right)$$

heißt die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ heißt Borel-Menge.

Lemma 6. *Jedes der folgenden Mengensysteme ist auch ein Erzeuger der Borelschen σ-Algebra:*

(a) $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$,

(b) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$,

(c) $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$,

(d) $\{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

Definition 7. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Zahl $\epsilon > 0$ gibt, so dass $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U$. Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus V$ offen ist.

Satz 1. *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borel-Menge. Bezeichnet $\mathcal{U}_1$ bzw. $\mathcal{V}_1$ das Mengensystem aller offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, so gilt insbesondere*

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{U}_1) = \sigma(\mathcal{V}_1).$$

Beispiele.

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\}$ Borel-Menge.

(b) Jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Borel-Menge. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine Borel-Menge.

(c) Die Cantor-Menge C ist eine Borel-Menge.

Lemma 7. *Das Mengensystem*

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} I_i : m \in \mathbb{N},\, I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{S}_1 \textit{ paarweise disjunkt} \right\}$$

ist eine Algebra. Sie ist die kleinste Algebra, die $\mathcal{S}_1$ umfasst.

Definition 8 (Der allgemeine Fall)**.** Für $n \geq 1$ sei

$$\mathcal{S}_1^n = \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \cap \mathbb{R}^n : -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty,\, k = 1, \ldots, n \right\}$$

das Mengensystem aller (nach links) halboffenen Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma\left(\mathcal{S}_1^n\right)$$

die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ heißt Borel-Menge.

Definition 9. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Zahl $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\prod_{k=1}^{n}(x_k - \epsilon, x_k + \epsilon) \subseteq U$. Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus V$ offen ist.

Satz 2. *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine Borel-Menge. Bezeichnet $\mathcal{U}_n$ bzw. $\mathcal{V}_n$ das Mengensystem aller offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt insbesondere*

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma(\mathcal{U}_n) = \sigma(\mathcal{V}_n).$$

Aufgabe 1. Das Mengensystem

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} Q_k : m \in \mathbb{N},\, Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{S}_n \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

ist eine Algebra. Sie ist die kleinste Algebra, die $\mathcal{S}_n$ umfasst.

1.3 Verhalten unter Abbildungen

Satz 3. *Für eine Abbildung $f : E \to F$ von einer nichtleeren Menge in einen messbaren Raum $(F, \mathcal{B})$ ist das Mengensystem*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \right\}$$

eine σ-Algebra (auf E).

Lemma 8. *Seien E, F nichtleere Mengen und $f : E \to F$ eine Abbildung. Ist $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von F, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist, so gilt*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(B_i\right).$$

Ist B eine Teilmenge von F, so gilt

$$f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}\left(B\right)\right)^c.$$

1.4 Monotone Klassen*

Definition 10. Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Man nennt $\mathcal{C}$ eine monotone Klasse (auf E), wenn

(i) für alle $A, B \in \mathcal{B}$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{B}$,

(ii) für alle monoton wachsenden Folgen $(A_n)_{n \geq 1}$ von Mengen aus $\mathcal{B}$ ($A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$) gilt $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{B}$.

Definition 11. Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Man nennt $\mathcal{S}$ durchschnittsstabil, wenn $A \cap B \in \mathcal{S}$ für alle $A, B \in \mathcal{S}$.

Lemma 9. *Sei E eine nichtleere Menge und $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ eine Familie von monotonen Klassen auf E, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist. Dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ ebenfalls eine monotone Klasse.*

Definition 12. Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein Mengensystem. Dann heißt

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ ist eine monotone Klasse auf } E \text{ mit } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\}$$

die von $\mathcal{S}$ *erzeugte monotone Klasse.*

Satz 4. *Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem mit $E \in \mathcal{S}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S}).$$

2 Maße

2.1 Definition und Eigenschaften

Definition 13. Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *Maß* auf $\mathcal{A}$ (oder auf $(E, \mathcal{A})$), wenn

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,

(iii) μ ist σ-additiv, d.h. für jede Folge (A_n) paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Zusatz 1. Gilt $\mu(E) < \infty$, so heißt μ *endliches Maß*; gilt $\mu(E) = 1$, so heißt μ *Wahrscheinlichkeitsmaß*. Gibt es eine Folge (E_n) von Teilmengen von E mit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < \infty$, so heißt μ *σ-endliches Maß*.

Lemma 10. *Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

(a) Für $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $m \geq 2$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n).$$

(b) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(c) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Beispiele.

(a) *Zählmaß*: für $A \in \mathscr{P}(E)$ sei $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente von A, falls A endlich ist, und $\mu(A) := +\infty$, falls A unendlich viele Elemente enthält. Dann ist μ ein Maß (das sogenannte Zählmaß) auf $\mathscr{P}(E)$.

(b) *Diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße*: Für E abzählbar und $p : E \to [0,1]$ mit $\sum_{x\in E} p(x) = 1$, definiere $\mu(A) = \sum_{x\in A} p(x)$, wobei $A \in \mathscr{P}(E)$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathscr{P}(E)$. Ist E endlich und $p(x) = 1/|E|$ für alle x, so heißt μ gleichmäßige Verteilung auf E.

(c) *Lebesgue-Maß*: Betrachte den messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Im nächsten Kapitel zeigen wir, dass es ein eindeutiges Maß λ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ gibt welches $\lambda((a,b)) = b - a$ für alle $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ erfüllt.

Satz 5. *Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

(a) Ist (A_n) eine Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

(b) Ist (A_n) eine Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, und $\mu(A_1) < \infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Definition 14. Ein *Maßraum* ist ein Tripel $(E, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge E, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf E und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$. Gilt $\mu(E) = 1$, so heißt $(E, \mathcal{A}, \mu)$ auch *Wahrscheinlichkeitsraum.* Ist E endlich oder abzählbar unendlich und gilt $\mathcal{A} = \mathscr{P}(E)$, so heißt $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *diskreter Maßraum.*

2.2 Konstruktion von Maßen

Definition 15. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf einer nichtleeren Menge E. Eine Abbildung $\mu_0 : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Inhalt auf $\mathcal{A}$, falls

(i) $\mu_0(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu_0(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathcal{A}$.

Ein Inhalt heißt Prämaß, falls für jede Folge (A_n) paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

gilt.

Satz 6 (Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei E eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf E und μ_0 ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß μ auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A})$ mit*

$$\mu(A) = \mu_0(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Zusatz 2. Ist $A \in \sigma(\mathcal{A})$, so gilt

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

2.3 Das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$

Lemma 11. *Für $A = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, b_k] \in \mathcal{F}_1$ mit $(a_k, b_k]$ paarweise disjunkt, setze*

$$\lambda_0\left(\bigcup_{k=1}^{m} (a_k, b_k]\right) = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$$

(und $\lambda_0(A) := +\infty$, falls $A \in \mathcal{F}_1$ ein unendliches Intervall $(-\infty, b], (a, +\infty)$ oder $(-\infty, +\infty)$ enthält). Dann ist λ_0 ist ein Inhalt auf der Algebra $\mathcal{F}_1$.

Satz 7. *Der in Lemma 11 konstruierte Inhalt λ_0 ist sogar ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{F}_1$. Dieses kann nach dem Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz eindeutig zu einem σ-endlichen Maß λ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden.*

Definition 16. Das Maß λ aus Satz 7 heißt das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Bemerkung 1. Für das Lebesgue-Maß λ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ gelten:

(a) $\lambda(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\lambda((a,b]) = \lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,

(c) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, so gilt $\lambda(A) = 0$,

(d) $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2. Man kann zeigen: es existiert keine Funktion $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Monotonie: ist $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Translationsinvarianz: $\mu(A + x) = \mu(A)$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) σ-Additivität: für jede Folge (A_n) disjunkter Teilmengen von $\mathbb{R}$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(iv) Sind $a \leq b$ zwei reelle Zahlen, so gilt $\mu([a,b]) = b - a$.

2.4 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$

Definition 17. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ ist die *Verteilungsfunktion* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definiert durch

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Satz 8. *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Dann hat die Verteilungsfunktion F von μ folgende Eigenschaften:*

(a) F ist monoton wachsend,

(b) Es gilt $\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$,

(c) F ist rechtsstetig, das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $F(x) = \lim_{y \downarrow x} F(y)$.

Satz 9. *Sei umgekehrt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz 8. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß μ_F auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 3. Zusammengefasst werden die Sätze 8 und 9 auch Korrespondenzsatz genannt. Sie liefern Bijektion zwischen der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ und der Menge der Funktionen mit den Eigenschaften (i)-(iii).

3 Messbare Funktionen

3.1 Messbare Abbildungen

Definition 18. Seien $(E, \mathcal{A})$ und $(F, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : E \to F$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*messbar* (oder kurz *messbar*), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Ist $(F, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$, so heißt f auch *Borel-messbar.*

Lemma 12. *Ist $\mathcal{S}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$, so ist f bereits messbar, falls $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ für alle $S \in \mathcal{S}$.*

Korollar 1. *Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist Borel-messbar.*

(b) *$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*

(c) *$\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*

(d) *$\{x \in E : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*

(e) *$\{x \in E : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*

Korollar 2. *Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}^m$ ist bereits Borel-messbar, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Insbesondere sind alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Borel-messbar.*

Lemma 13. *Seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ zwei Borel-messbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$cf, \quad f^2, \quad f + g, \quad fg, \quad |f|$$

Borel-messbar.

Lemma 14. *Ist* (f_n) *eine Folge Borel-messbarer Funktionen* $f_n : E \to \mathbb{R}$*, so sind auch die Funktionen* F *und* f *definiert durch*

$$F(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x), \quad f(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x)$$

Borel-messbar, sofern diese Funktionen jeweils wohldefiniert sind. Falls $f_n(x)$ *für jedes* $x \in E$ *konvergiert, so ist auch die Funktion* f^* *definiert durch* $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *Borel-messbar.*

3.2 Induzierte Maße

Lemma 15. *Sei* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $(F, \mathcal{B})$ *ein messbarer Raum, sowie* f *eine* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-messbare Abbildung. Dann wird durch*

$$\mu^f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu\left(\{x \in E : f(x) \in B\}\right), \quad B \in \mathcal{B},$$

ein Maß auf $\mathcal{B}$ *definiert. Ist* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist* μ^f *ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Definition 19. Das Maß μ^f nennt man das von f *induzierte Maß*.

3.3 Einfache Funktionen

Lemma 16. *Sei* $(E, \mathcal{A})$ *ein messbarer Raum. Sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *und* $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$*, so ist die Funktion*

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \tag{3.1}$$

Borel-messbar.

Definition 20. Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ heißt eine Zerlegung von E.

Zusatz 3. Ist f von der Form (3.1), so gibt es eine Darstellung in der $(A_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine Zerlegung von E ist. Diese Darstellung wird eindeutig, wenn wir zusätzlich fordern, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ verschieden und $A_1, \ldots, A_m$ nichtleer sein sollen. Letztere Darstellung wird auch die kanonische Darstellung von f genannt.

Definition 21. Eine Funktion von der Form (3.1) mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ und $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ heißt *einfach*.

3.4 Approximation Borel-messbarer Funktionen

In der Integrationstheorie hat es sich als zweckmäßig erwiesen, auch Funktionen zuzulassen, die die Werte $+\infty, -\infty$ annehmen. Solche Funktionen werden auch numerische Funktionen genannt. Hierfür betrachtet man auf den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}}$ die folgende σ-Algebra:

$$\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \sigma\left(\{(a,\infty] : a \in \mathbb{R}\}\right) = \{A \cup B \mid A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, B \in \{-\infty, +\infty\}\}\,.$$

Definition 22. Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine numerische Funktion $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Borel-messbar, wenn sie $(\mathcal{A}, \mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$-messbar ist. Nach Lemma 12 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Man kann nun zeigen, dass sich die obigen Resultate in Korollar 1, Lemma 13 und Lemma 14 auf solche Funktionen erweitern lassen (siehe zum Beispiel Chapter 2 in Bartle, Kapitel 4.1 in Küchler oder Kapitel III, §4 in Elstrodt).

Satz 10. *Sei $(E, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ eine nicht-negative, Borel-messbare Funktion. Dann existiert eine Folge (f_n) einfacher Funktionen mit*

(a) $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le f(x)$ *für alle* $n \ge 1$, $x \in E$,

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in E$.

4 Das Integral

Im Folgenden sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum.

4.1 Integral für einfache Funktionen

Definition 23. Sei f eine nichtnegative, einfache Funktion und $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine Darstellung von f in der $(A_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine Zerlegung von E ist. Dann setzen wir

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j),$$

wobei wir stets $0 \cdot \infty = 0$ und $a + \infty = \infty$ setzen, und nennen $\int_E f\, d\mu$ das *Integral von f über E bezüglich μ.*

Lemma 17. *Sei f eine nichtnegative, einfache Funktion mit den Darstellungen $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$, wobei sowohl $(A_j)_{j=1,\dots,m}$ als auch $(B_k)_{k=1,\dots,n}$ eine Zerlegung von E sind. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k).$$

Insbesondere ist obige Definition des Integrals wohldefiniert.

Beispiele.

(a) Sei $(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,b]} \, d\mu = \lambda((a,b]) = b - a$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

(b) Sei $E = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(E)$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$. Dann ist jede Funktion $f : E \to [0, \infty)$ einfach und es gilt

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{k=1}^n f(k) \mu(\{k\}).$$

Lemma 18. *Für nichtnegative, einfache Funktionen f, g und eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$$

und

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

4.2 Integral für nichtnegative Funktionen

Definition 24. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ die Menge aller nichtnegativen, Borel-messbaren Funktionen $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$.

Definition 25. Für $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ setzen wir

$$\int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu : \varphi \text{ einfach, } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

und nennen $\int f \, d\mu$ das *Integral von f über E bezüglich μ*. Äquivalente Bezeichnungen sind $\int f \, d\mu$, $\int_E f(y)\mu(dy)$, $\int_E f(y) \, d\mu(y)$, etc. Für $A \in \mathcal{A}$ setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \int_E \mathbb{1}_A f \, d\mu.$$

Lemma 19.

(a) Für $f, g \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ mit $f \leq g$ gilt

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

(b) Für $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Satz 11 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** *Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ die gegen f konvergiert. Dann gilt*

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Korollar 3. *Sei $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ und (f_n) eine monoton wachsende Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen die gegen f konvergiert. Dann gilt*

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Beispiel. *Integrale bezüglich diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße*: Sei $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Dann gilt für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \mu(\{k\}).$$

Korollar 4. *Für $f, g \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ und $c \geq 0$ gilt*

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$$

und

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

4.3 Integrierbare Funktionen

Definition 26. Für eine Borel-messbare Funktion f definieren wir den Positivteil f^+ und den Negativteil f^- durch

$$f^+(x) := \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) := \max(-f(x), 0).$$

Definition 27. Eine Borel-messbare Funktion $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *integierbar* (bezüglich des Maßes μ), falls

$$\int_E f^+ \, d\mu < \infty \text{ und } \int_E f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

und nennen $\int f \, d\mu$ *das Integral von f über E bezüglich μ*. Äquivalente Bezeichnungen sind $\int f \, d\mu$, $\int_E f(y) \mu(dy)$, $\int_E f(y) \, d\mu(y)$, etc. Für $A \in \mathcal{A}$ setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu.$$

Die Menge aller integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ bezeichnet.

Bemerkung 4. Für eine Borel-messbare Funktion $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

(b) $|f| \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Bemerkung 5. Sind f_1, f_2 zwei nichtnegative, Borel-messbare Funktionen mit $f = f_1 - f_2$, so gilt

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu - \int_E f_2 \, d\mu.$$

Definition 28. Man sagt, dass eine Aussage über die Punkte $x \in E$ *μ-fast-überall* gilt (kurz μ-f.ü.), falls es ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gibt, so dass diese Aussage für alle $x \in N^c$ gilt.

Satz 12 (Eigenschaften des Integrals)**.** *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $cf, f + g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu, \quad \int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

(b) Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

(c)

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

(d) Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, dann gilt

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

(e)

$$\int_E |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-fast überall.}$$

Korollar 5. *Sind* $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *mit* $f = g$ μ*-fast überall, so gilt*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

Satz 13 (Allgemeine Transformationsformel)**.** *Seien* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $(F, \mathcal{B})$ *ein messbarer Raum und* T *eine* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-messbare Abbildung. Dann gilt für alle Funktionen* $h \in \mathcal{M}^+(F, \mathcal{B})$

$$\int_E h(T(x)) d\mu(x) = \int_F h(y) d\mu^T(y). \tag{4.1}$$

Eine Borel-messbare Funktion $h : F \to \mathbb{R}$ *ist genau dann in* $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \mu^T)$ *enthalten, wenn* $h \circ T$ *in* $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *enthalten ist, und dann gilt* (4.1)*.*

4.4 Konvergenzsätze

Satz 14 (Satz von der dominierten Konvergenz)**.** *Seien* f*,* f_n*,* $n \geq 1$*, Borel-messbare Funktionen mit*

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in E$*,*

(b) es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *mit* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in E$*,* $n \geq 1$*.*

Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Definition 29. Eine Folge (f_n) von Funktionen konvergiert μ-fast überall gegen eine Funktion f, falls es ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in N^c$.

5 Produktmaße

5.1 Produkt-σ-Algebren

Definition 30. Seien $(E, \mathcal{A})$ und $(F, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume. Dann heißt

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right)$$

die *Produkt-σ-Algebra* auf $E \times F$.

Lemma 20. *Seien $(E, \mathcal{A})$ und $(F, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume und $\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{T}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Dann ist jedes der folgenden Mengensysteme auch ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:*

(a) $\{A \times F : A \in \mathcal{A}\} \cup \{E \times B : B \in \mathcal{B}\}$,

(b) $\{S \times F : S \in \mathcal{S}\} \cup \{E \times T : T \in \mathcal{T}\}$,

(c) $\{S \times T : S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}\}$, *falls* $E \in \mathcal{S}$ *und* $F \in \mathcal{T}$.

Bemerkung 6.

(a) Sind $(E_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ messbare Räume und $\mathcal{S}_i$ Erzeuger von $\mathcal{A}_i$ mit $E_i \in \mathcal{S}_i$, so erhält man durch iterative Anwendung der Produktbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n &= \sigma\left(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}\right) \\ &= \sigma\left(\{S_1 \times \cdots \times S_n : S_i \in \mathcal{S}_i\}\right) \end{aligned}$$

und nennt $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ die Produkt-σ-Algebra auf $\prod_{i=1}^n E_i$. Insbesondere gilt $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Definiert man die Projektionen $\Pi_j : \prod_{i=1}^n E_i \to E_j, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$, so gilt außerdem

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right).$$

(c) Ist allgemeiner $(E_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Räumen, so heißt

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \Pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$$

die *Produkt-σ-Algebra* auf $\prod_{i \in I} E_i$. Sie ist die kleinste σ-Algebra bezüglich der alle Projektionen $\Pi_j : \prod_{i \in I} E_i \to E_j, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ messbar sind.

5.2 Das Produktmaß

Satz 15. *Sind $(E, \mathcal{A}, \mu)$ und $(F, \mathcal{B}, \nu)$ zwei Maßräume mit μ, ν σ-endlich, so existiert genau ein Maß π auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit*

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Definition 31. Das Maß π auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ heißt das *Produktmaß* von μ und ν. Man schreibt $\pi = \mu \otimes \nu$.

5.3 Der Satz von Fubini

Satz 16. *Seien $(E, \mathcal{A}, \mu)$ und $(F, \mathcal{B}, \nu)$ zwei Maßräume mit μ, ν σ-endlich.*

(a) (Tonelli) Für jedes $f \in \mathcal{M}^+(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ liegen die Funktionen

$$x \mapsto \int_F f(x,y)\, d\nu(y), \quad y \mapsto \int_E f(x,y)\, d\mu(x)$$

in $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{M}^+(F, \mathcal{B})$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f\, d\mu \otimes \nu &= \int_E \left(\int_F f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)\\ &= \int_F \left(\int_E f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

(b) (Fubini) Sei $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}A &:= \{x \in E : f(x, \cdot) \in L^1(F, \mathcal{B}, \nu)\} \in \mathcal{A}\\ B &:= \{y \in F : f(\cdot, y) \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)\} \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

mit $\mu(A) = \nu(B) = 1$, die Funktionen $x \mapsto \int_F f(x,y)\, d\nu(y)$ bzw. $y \mapsto \int_E f(x,y)\, d\mu(x)$ sind integrierbar über A bzw. B und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f\, d\mu \otimes \nu &= \int_A \left(\int_F f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)\\ &= \int_B \left(\int_E f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Korollar 6. *Ist $f : E \times F \to \bar{\mathbb{R}}$ Borel-messbar und eines der Integrale*

$$\int_{E\times F} |f|\, d\mu\otimes\nu, \quad \int_E \left(\int_F |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich, so sind alle Integrale endlich und gleich, f ist in $\mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ und es gelten die Aussagen unter Satz 16 (b).

5.4 Unabhängige Zufallsvariablen

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 32. Zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ heißen unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Definition 33. Eine $(\mathcal{A}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung $X : E \to \mathbb{R}$ nennt man auch *(reellwertige) Zufallsvariable*. Eine $(\mathcal{A}, \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Abbildung $X : E \to \mathbb{R}^n$ nennt man auch *(reellwertigen) Zufallsvektor*.

Definition 34. Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen unabhängig, wenn die σ-Algebren $X_1^{-1}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ und $X_2^{-1}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ unabhängig sind.

Definition 35. Sei $X : E \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvektor. Das von X induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^X$ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n},$$

heißt Verteilung von X.

Lemma 21. *Sind X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen, so gilt für die Abbildung $(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2, \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$, dass*

$$(X_1, X_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2)$$

für alle $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist (X_1, X_2) ein (zweidimensionaler) Zufallsvektor.

Lemma 22. *Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind genau dann unabhängig, wenn*

$$\mathbb{P}^{(X_1,X_2)} = \mathbb{P}^{X_1} \otimes \mathbb{P}^{X_2}.$$

Korollar 7. *Sind X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so gilt*

$$\int_\Omega X_1 X_2 \, d\mathbb{P} = \left(\int_\Omega X_1 \, d\mathbb{P} \right) \cdot \left(\int_\Omega X_2 \, d\mathbb{P} \right).$$

6 Ergänzungen

6.1 L^p-Räume

Im Folgenden sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum.

Definition 36. Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge aller Borel-messbaren Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_E |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ setze

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Bemerkung 7. Eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p$ heißt auch *p-fach integrierbar* (bezüglich μ). Im Fall $p = 2$ nennt man sie auch *quadratisch integrierbar* (bezüglich μ).

Satz 17 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ gilt $fg \in \mathcal{L}^1$ und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

d.h.

$$\int_E |fg| \, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |f|^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Satz 18 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sind $f, g \in \mathcal{L}^2$, so ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und es gilt*

$$\left(\int_E fg \, d\mu \right)^2 \leq \left(\int_E f^2 \, d\mu \right) \cdot \left(\int_E g^2 \, d\mu \right). \tag{6.1}$$

Beispiele.

(a) Wendet man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf $|f|$ und $|g|$ an, so erhält man

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

(c) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes, so gilt

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right) \cdot \left(\int_a^b (g(x))^2\, dx\right).$$

(d) Ist μ ein endliches Maß und f quadratisch integrierbar, so gilt

$$\left(\int_E |f|\, d\mu\right)^2 \leq \mu(E) \cdot \left(\int_E f^2\, d\mu\right).$$

(e) Es gilt genau dann Gleichheit in (6.1), wenn es Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ gibt mit $|s| + |t| > 0$ und $sf + tg = 0$ μ-f.ü.

Satz 19 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sind $f, g \in \mathcal{L}^p$, $p \geq 1$, so ist $f + g \in \mathcal{L}^p$ und es gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Korollar 8. *Sei $p \geq 1$. Dann gilt*

$$f, g \in \mathcal{L}^p, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow af + bg \in \mathcal{L}^p.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^p$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

Korollar 9. *Sei $p \geq 1$. Dann gilt*

(i) $\|af\|_p = |a|\|f\|_p$ *für alle* $f \in \mathcal{L}^p$, $a \in \mathbb{R}$,

(ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ *für alle* $f, g \in \mathcal{L}^p$,

(iii) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *μ-f.ü.*

Insbesondere ist $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.

Bemerkung 8. Identifiziert man zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p$, wenn $f = g$ μ-f.ü. (d.h. wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden), so erhält man den Raum

$$L^p = L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)\},$$

wobei

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) : g = f \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

Man setzt

$$[f] + [g] = [f + g], \quad [af] = a[f], \quad \|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Insbesondere kann Korollar (9) (iii) als $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$ geschrieben werden und $\|\cdot\|_p$ ist somit eine *Norm* auf L^p. Man sagt L^p ist ein *normierter linearer Raum*. Der Fall $p = 2$ ist dabei besonders wichtig, da die Norm $\|\cdot\|_2$ zusätzlich durch ein Skalarprodukt gegeben ist: $\|[f]\|_2 = \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}$, wobei

$$\langle [f], [g] \rangle = \langle f, g \rangle = \int_E f g \, d\mu.$$

6.2 Die Transformationsformel

Definition 37. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann heißt

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die *Funktionalmatrix* (oder *Jacobi-Matrix*) von φ. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so heißt $\varphi : U \to V$ ein *Diffeomorphismus*, wenn sie umkehrbar (=bijektiv), stetig differenzierbar und $D\varphi(x)$ invertierbar (d.h. $\det(D\varphi(x)) \neq 0$) für alle $x \in U$ ist.

Satz 20. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar bezüglich λ^n über V, wenn $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ integrierbar ist bezüglich λ^n über U. Es gilt dann*

$$\int_V f(y) \, d\lambda^n(y) = \int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| \, d\lambda^n(x).$$

Korollar 10. *Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Mx$ die zugehörige lineare Abbildung. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich λ^n über $\mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\lambda^n(y) = |\det M| \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)\, d\lambda^n(x).$$

Beispiel (Zweidimensionale Polarkoordinaten)**.** Die Abbildung

$$\varphi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\}), (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ist ein Diffeomorphismus mit

$$\det D\varphi(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$$

Für $f \geq 0$ Borel-messbar gilt also

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta dr.$$

Damit zeigt man, dass $\lambda^2(B_1(0)) = \pi$ und $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$.