Funktionalanalysis
Gliederung zur Vorlesung im Wintersemester 2022/23

Markus Reiß
Humboldt-Universität zu Berlin
`mreiss@math.hu-berlin.de`

VORLÄUFIGE FASSUNG: 7. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Banach- und Hilberträume

1.1 Definition und Beispiele

1.1 Definition. Ein vollständiger normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt Banachraum. Ein vollständiger $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum. Hier bezeichnet $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ stets die reellen oder komplexen Zahlen.

1.2 Satz. $\mathbb{K}^n$ *mit beliebiger Norm bildet einen Banachraum.*

1.3 Definition. Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definiere die Folgenräume $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n \geqslant 1} \mid a_n \in \mathbb{K}, \|(a_n)\|_{\ell^p} < \infty\}$ mit $\|a\|_{\ell^p} = (\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^p)^{1/p}$ für $1 \leqslant p < \infty$ und $\|a\|_{\ell^\infty} = \|a\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |a_n|$, wobei stets $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$.

1.4 Satz. *Es gelten folgende Ungleichungen:*

(a) *Youngsche Ungleichung:* $|xy| \leqslant \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q$ *für alle* $x, y \in \mathbb{K}$, $p, q \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(b) *Hölder-Ungleichung: für* $a \in \ell^p$, $b \in \ell^q$ *mit* $p, q \in [1, \infty]$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(wobei* $1/\infty := 0$*) gilt* $a \cdot b \in \ell^1$ *und* $\sum_{n \geqslant 1} |a_n b_n| \leqslant \|a\|_{\ell^p} \|b\|_{\ell^q}$

(c) *Minkowski-Ungleichung: für* $a, b \in \ell^p$, $p \in [1, \infty]$, *gilt* $\|a + b\|_{\ell^p} \leqslant \|a\|_{\ell^p} + \|b\|_{\ell^p}$.

1.5 Satz. $(\ell^p, \|\bullet\|_{\ell^p})$ *ist für jedes* $p \in [1, \infty]$ *ein Banachraum und* $(\ell^2, \|\bullet\|_{\ell^2})$ *ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt* $\langle a, b \rangle_{\ell^2} = \sum_{n \geqslant 1} a_n \bar{b}_n$.

1.6 Definition. Für einen metrischen (oder bloß topologischen) Raum T setze $C(T) = \{f : T \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$, $C_b(T) = \{f \in C(T) \mid f \text{ beschränkt}\}$ sowie $\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} |f(t)|$, $f \in C(T)$.

1.7 Satz. $(C_b(T), \|\bullet\|_\infty))$ *bildet einen Banachraum. Insbesondere ist* $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ *ein Banachraum für kompaktes* K.

1.8 Beispiel. $C([0,1])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$ ist nicht vollständig und bildet somit keinen Hilbertraum.

1.9 Definition. Normierte Räume X, Y heißen isomorph, wenn es eine lineare Bijektion $\varphi : X \to Y$ gibt mit $c\|x\|_X \leqslant \|\varphi(x)\|_Y \leqslant C\|x\|_X$ für Konstanten $C \geqslant c > 0$ und alle $x \in X$. Eine lineare Abbildung $\varphi : X \to Y$ nennt man Isometrie, falls $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Normierte Räume X, Y heißen isometrisch isomorph, wenn es eine bijektive Isometrie $\varphi : X \to Y$ gibt.

1.10 Definition. Ein Banachraum $\tilde{X}$ heißt Vervollständigung eines normierten Raums X, falls es eine Isometrie $\iota : X \to \tilde{X}$ gibt, deren Bild $\iota(X)$ dicht in $\tilde{X}$ liegt.

1.11 Satz. *Zu jedem normierten Raum gibt es eine Vervollständigung. Diese ist bis auf Isometrie eindeutig (d.h. zwei Vervollständigungen sind stets isometrisch isomorph).*

1.12 Definition. Für einen Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ setze $\mathscr{L}^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}$ mit $\|f\|_{L^p} = (\int_X |f(x)|^p \mu(dx))^{1/p}$ für $1 \leqslant p < \infty$ und $\|f\|_{L^\infty} = \inf_{N \in \mathscr{F}, \mu(N)=0} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$ (essentielles Supremum).

Im Fall $X \subseteq \mathbb{R}^d$ Borelmenge mit der σ-Algebra $\mathscr{F} = \mathscr{B}_X$ der Borelmengen in X und dem Lebesguemaß $\mu = \lambda|_X$ auf X schreiben wir einfach $\mathscr{L}^p(X)$, z.B. $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathscr{L}^p([a, b])$.

1.13 Definition. Betrachte die Äquivalenzklassen $[f] = \{g \in \mathscr{L}^p(\mu) \mid f = g \ \mu\text{-fast überall}\}$ in $\mathscr{L}^p(\mu)$ und setze $L^p(\mu) = \{[f] \mid f \in \mathscr{L}^p(\mu)\}$. Im folgenden bedeutet $f \in L^p(\mu)$, dass wir $[f]$ betrachten, also f nur modulo μ-Nullmengen als wohldefiniert ansehen.

1.14 Lemma. *$[f] \mapsto \|[f]\|_{L^p}$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum $L^p(\mu)$ für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

1.15 Satz (Satz von Fischer-Riesz). *Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\bullet\|_{L^p})$ vollständig, bildet also einen Banachraum. $L^2(\mu)$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mu(dx)$ bildet einen Hilbertraum.*

1.16 Definition. $f \in C([a, b])$ heißt <u>schwach differenzierbar</u>, falls es ein $g \in L^1([a, b])$ gibt mit $f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy$ (Integral bzgl. Lebesguemaß). g heißt <u>schwache Ableitung</u> von f, Notation $f' = g$. $f \in C^{m-1}([a, b])$ heißt <u>m-mal schwach differenzierbar</u>, falls $f^{(m-1)} \in C([a, b])$ (stetig fortsetzbar am Rand) und $f^{(m-1)}$ schwach differenzierbar ist. Die schwache Ableitung von $f^{(m-1)}$ bezeichnen wir mit $f^{(m)}$, m-te schwache Ableitung von f.

1.17 Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ heißt $W^{m,p}([a, b]) = \{f \in C^{m-1}([a, b]) \mid f \ m\text{-mal schwach differenzierbar und } f^{(m)} \in L^p([a, b])\}$ mit Norm $\|f\|_{m,p} = (\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{L^p}^p)^{1/p}$ (bzw. $\|f\|_{m,\infty} = \max_{k=0,\dots,m} \|f^{(k)}\|_{L^\infty}$ für $p = \infty$) <u>L^p-Sobolevraum der Ordnung/Regularität m</u>. Für $p = 2$ schreibe $H^m([a, b]) = W^{m,2}([a, b])$.

1.18 Satz. *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ sind die Sobolevräume $(W^{m,p}([a, b]), \|\bullet\|_{m,p})$ Banachräume. $H^m([a, b])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_m = \sum_{k=0}^m \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2}$ bildet einen Hilbertraum.*

1.19 Beispiel. (Variationsproblem) Welche Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ minimiert $\kappa(f) := \int_{-1}^1 f'(x)^2 dx$ unter den Nebenbedingungen $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = 1$? In $H^1([-1, 1])$ ist $f_0(x) = 1 - |x|$ Minimierer von κ. Über $C^1([-1, 1])$ wird das Infimum von $\kappa(f)$ nicht angenommen.

1.2 Hilberträume

Im folgenden bezeichnet H immer einen Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet\rangle$.

1.20 Definition. Für $M \subseteq H$ setze $M^\perp = \{x \in H \mid \langle x, m\rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\}$.

1.21 Lemma. *$M^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von H.*

1.22 Satz (Approximationssatz, Projektion auf konvexe Mengen)**.** *Ist $M \subseteq H$ abgeschlossen und konvex, so existiert zu jedem $x \in H$ genau ein $u_x \in M$ mit $\|x - u_x\| = \inf_{u \in M} \|x - u\|$.*

1.23 Definition. Für einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq H$ heißt $P_U : H \to U$ mit $P_U(x) = u_x$ für u_x aus vorigem Satz Orthogonalprojektion auf U.

1.24 Satz. *Jede Orthogonalprojektion P_U ist linear mit $P_U(x) - x \in U^\perp$ für $x \in H$, $P_U P_U = P_U$ und $\ker(P_U) = U^\perp$.*

1.25 Korollar ($H = U \oplus U^\perp$)**.** *Ist $U \subseteq H$ abgeschlossener Unterraum, so gibt es für jedes $x \in H$ genau eine Zerlegung $x = u_x + u_x^\perp$ mit $u_x \in U$, $u_x^\perp \in U^\perp$.*

1.26 Definition. $E \subseteq H$ heißt Orthonormalsystem (ONS) in H, falls $\|e\| = 1$ für alle $e \in E$ und $\langle e, e' \rangle = 0$ für alle $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$. Ein Orthonormalsystem E heißt Orthonormalbasis (ONB) von H, falls $\operatorname{span}(E) = \{\sum_{e \in E} \lambda_e e \mid \lambda_e \in \mathbb{K}, \text{ nur endlich viele } \lambda_e \neq 0\}$ dicht in H liegt.

1.27 Beispiele.

(a) In $\ell^2(\mathbb{N})$ bilden die Folgen $e^{(k)}$ mit $e_i^{(k)} = \mathbf{1}(i = k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Orthonormalbasis.

(b) In $L^2([0,1];\mathbb{C})$ bilden $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis, die sogenannte Fourierbasis. Dass $\operatorname{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dicht liegt, wird in Analysis bewiesen oder folgt später aus dem Stone-Weierstraß-Theorem.

1.28 Satz (Besselsche Ungleichung)**.** *Für ein ONS E und alle $x \in H$ gilt*

$$\sum_{e \in E, \langle x, e \rangle \neq 0} \langle x, e \rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

1.29 Satz (ONB-Darstellung)**.** *Für eine ONB E und alle $x \in H$ gilt*

$$x = \sum_{e \in E, \langle x, e \rangle \neq 0} \langle x, e \rangle e \text{ (Konvergenz in } H\text{)}.$$

1.30 Korollar. *Ist E ONB von H, so gilt die Parseval-Identität*

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E, \langle x, e \rangle \neq 0} |\langle x, e \rangle|^2 \text{ für alle } x \in H.$$

1.31 Beispiel. Was ist $\sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{(2m+1)^2}$? Betrachte $f = \mathbf{1}_{[0,1/2]} \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ mit $\|f\|_{L^2}^2 = 1/2$. Für die Koeffizienten bezüglich der Fourierbasis erhalten wir

$$\langle f, e_k \rangle_{L^2} = \begin{cases} \frac{-1}{\pi i k}, & \text{für } k \text{ ungerade}, \\ 1/2, & \text{für } k = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Parsevalidentität liefert nach einfacher Umformung $\sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1.3 Kompakte und dichte Teilmengen

1.32 Definition. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums (T, d) heißt präkompakt, wenn der Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist.

1.33 Satz (Arzelà-Ascoli)**.** *Ist T kompakt metrisch, so ist eine Teilmenge $M \subseteq C(T)$ genau dann präkompakt (bzgl. $\|\bullet\|_\infty$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_\infty < \infty$;

(b) M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in M : \; d(s,t) \leqslant \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

1.34 Beispiel. Die Menge

$$\mathrm{Lip}_{1,b}([0,1]) = \{ f \in C([0,1]) \,|\, |f(0)| \leqslant 1, \, \forall t, s \in [0,1] : \; |f(t) - f(s)| \leqslant |t - s| \}$$

der 1-Lipschitzfunktionen f mit $|f(0)| \leqslant 1$ ist eine kompakte Teilmenge von $(C([0,1]), \|\bullet\|_\infty)$. Die gleichgradige Stetigkeit ist dabei durch die gleichmäßige Lipschitzbedingung gesichert. Die Beschränktheit und Abgeschlossenheit folgen durch direktes Nachrechnen.

1.35 Satz. *Eine Teilmenge $M \subseteq \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$, ist genau dann präkompakt (bzgl. $\|\bullet\|_{\ell^p}$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{a \in M} \|a\|_{\ell^p} < \infty$;

(b) $\lim_{N \to \infty} \sup_{a \in M} \sum_{n=N}^\infty |a_n|^p = 0$.

1.36 Beispiel. Für eine Folge $(a_n) \in \ell^2$ ist der *Hilbertwürfel* $\prod_{n=1}^\infty [-a_n, a_n] \subseteq \ell^2$ kompakt.

1.37 Satz (Riesz-Kolmogorov)**.** *Eine Teilmenge $M \subseteq L^p([a,b])$, $1 \leqslant p < \infty$, ist präkompakt (bzgl. $\|\bullet\|_{L^p}$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_{L^p} < \infty$;

(b) $\lim_{h \downarrow 0} \sup_{f \in M} \int_a^{b-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt = 0$.

1.38 Definition. Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

1.39 Satz. *$\mathbb{K}^d$ mit beliebiger Norm ist ein separabler Banachraum.*

1.40 Satz. *$\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$, sowie $(c_0, \|\bullet\|_{\ell^\infty})$ sind separable Banachräume.*

1.41 Definition. $A \subseteq C(T)$ heißt Algebra, wenn A einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet sowie $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$ gilt. Eine Algebra A heißt punktetrennend, falls für alle $s, t \in T$ mit $s \neq t$ eine Funktion $f \in A$ existiert mit $f(s) \neq f(t)$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt A selbstadjungiert, falls $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$ gilt.

1.42 Satz (Stone-Weierstraß). *Ist K kompakter metrischer Raum und $A \subseteq C(K)$ eine Algebra, die Punkte trennt, die konstanten Funktionen enthält sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selbstadjungiert ist, so liegt A dicht in $C(K)$.*

1.43 Korollar. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, so liegen die Polynome $p(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \lambda_\alpha x^\alpha$ mit $n \in \mathbb{N}$, Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ und $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ dicht in $C(K;\mathbb{R})$.*

1.44 Korollar. *Die trigonometrischen Polynome $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{2\pi i k x}$, $x \in [0,1]$, mit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$ liegen dicht in*

$$C_{per}([0,1];\mathbb{C}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0) = f(1)\}.$$

1.45 Korollar. *$(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ ist ein separabler Banachraum für jeden kompakten metrischen Raum K.*

1.46 Definition. Ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ eines metrischen Raums T heißt regulär, falls

$$\forall B \in \mathfrak{B}_T : \ \mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(O) \mid O \supseteq B \text{ offen}\}.$$

1.47 Satz. *Ist μ ein reguläres Maß auf $\mathfrak{B}_T$, so liegt $C_b(T) \cap L^p(T, \mathfrak{B}_T, \mu)$ dicht in $L^p(T, \mathfrak{B}_T, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

1.48 Definition. Ein separabler und vollständiger metrischer Raum heißt Polnisch.

1.49 Beispiel. $\mathbb{K}^n$ und $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ für K kompakt sind Polnische Räume.

1.50 Lemma (Ulam). *Jedes endliche Maß auf der Borel-σ-Algebra eines Polnischen Raums ist regulär.*

1.51 Definition. Ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ heißt Borelmaß, falls es lokal endlich ist, d.h. für jedes $t \in T$ gibt es eine offene Menge O mit $t \in O$ und $\mu(O) < \infty$.

1.52 Satz (Ulam). *Jedes Borelmaß auf der Borel-σ-Algebra eines Polnischen Raums ist regulär.*

1.53 Beispiel. Das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^d$ und jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Polnischen Raum sind regulär.

1.54 Definition. Ein metrischer Raum T heißt σ-kompakt, falls $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ gilt mit kompakten Mengen K_n.

1.55 Korollar. *Für jedes Borel-Maß μ auf einem σ-kompakten metrischen Raum T ist $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, separabel. Insbesondere liegt $C_c(T) = \{f \in C(T) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ dicht in $L^p(\mu)$.*

1.56 Beispiel. $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist separabel für $1 \leqslant p < \infty$. Ebenso ist $L^p(\mathbb{P})$, $1 \leqslant p < \infty$, für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}^d$ separabel.

1.57 Beispiel. Die Translationsgruppe $\tau_t : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $\tau_t f(x) := f(x - t)$, $t, x \in \mathbb{R}$, ist *stark stetig* bei $t = 0$, das heißt $\lim_{t \to 0} \|\tau_t f - f\|_{L^p} = 0$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. Dies sieht man zunächst für $f \in C_c(\mathbb{R})$ mittels gleichmäßiger Stetigkeit und wird dann mit einem Approximationsargument auf beliebige $f \in L^p(\mathbb{R})$ erweitert.

2 Operatoren und Dualräume

2.1 Beschränkte Operatoren

2.1 Satz. *Für eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Vektorräumen X, Y sind äquivalent:*

(a) *L ist stetig;*

(b) *L ist stetig bei 0;*

(c) $\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}\|Lx\| < \infty$;

(d) *L ist Lipschitz-stetig.*

2.2 Definition. Eine stetige lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Räumen X, Y heißt auch stetiger (linearer) Operator oder beschränkter (linearer) Operator. Mit $\mathcal{L}(X, Y)$ wird die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $L : X \to Y$ bezeichnet und

$$\|L\| := \|L\|_{X\to Y} := \sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}\|Lx\|$$

heißt Operatornorm von $L : X \to Y$. Schreibe kurz $\mathcal{L}(X)$ für $\mathcal{L}(X, X)$.

2.3 Beispiele.

(a) Jede lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stetig.

(b) Für $k \in C([0, 1]^2)$ setze

$$I_k f(t) := \int_0^1 k(t, s)f(s)\,ds, \quad t \in [0, 1],\ f \in C([0, 1]).$$

Dann gilt $I_k \in \mathcal{L}(C([0, 1]))$. I_k ist sogar ein *kompakter Operator* in dem Sinn, dass $I_k(B_1(0))$ präkompakt ist für die Einheitskugel $B_1(0) = \{f \in C([0, 1]) \mid \|f\|_\infty \leqslant 1\}$. I_k heißt Fredholm-Integraloperator mit *Kern* k. Ein konkretes Beispiel ist gegeben durch den Kern $k(t, s) = t \wedge s - ts$, für den $u := I_k g$ das *Randwertproblem* $u''(x) = g(x)$, $x \in (0, 1)$, und $u(0) = u(1) = 0$ löst für $u \in C^2((0, 1)) \cap C([0, 1])$.

2.4 Lemma. $(\mathcal{L}(X, Y), \|\bullet\|_{X\to Y})$ *ist ein normierter Vektorraum.*

2.5 Lemma. *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(\mathcal{L}(X, Y), \|\bullet\|_{X\to Y})$ ein Banachraum.*

2.6 Satz. *Sind D ein dichter Unterraum des normierten Raums X, Y ein Banachraum und $L \in \mathcal{L}(D, Y)$, so existiert genau eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{L}$ von L, d.h. $\tilde{L}|_D = L$ und $\tilde{L} \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

2.7 Lemma. *Ist $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so gilt für die Inverse $L^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ genau dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit $\|Lx\| \geqslant c\|x\|$ für alle $x \in X$.*

2.8 Satz.

(a) *Ist $L \in \mathcal{L}(X)$ für einen normierten Raum X und konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$ (mit k-facher Komposition $L^k = L \circ \cdots \circ L$, $L^0 = \mathrm{Id}$ Identität), so ist $\mathrm{Id} - L$ invertierbar mit*

$$(\mathrm{Id} - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \text{ (Neumann-Reihe).}$$

(b) *Ist X Banachraum und gilt $\|L\| < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$, und es gilt $\|(\mathrm{Id} - L)^{-1}\| \leqslant (1 - \|L\|)^{-1}$. Darüberhinaus bilden die invertierbaren $L \in \mathcal{L}(X)$ mit $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ eine offene Menge in $\mathcal{L}(X)$.*

2.2 Dualräume

2.9 Definition. $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt Dualraum eines normierten Raums X. Jedes $\ell \in X'$ heißt stetiges lineares Funktional auf X.

2.10 Korollar. *Der Dualraum $(X', \|\bullet\|_{X'})$ mit $\|\ell\|_{X'} := \|\ell\|_{X \to \mathbb{K}}$ bildet einen Banachraum.*

2.11 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume)**.** *Ist H ein Hilbertraum, so ist $\varphi : H \to H'$ mit $\varphi(x)y = \langle y, x \rangle$, $x, y \in H$, ein isometrischer Isomorphismus (konjugiert linear im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$); insbesondere ist H' isometrisch isomorph zu H.*

2.12 Satz (von Neumann)**.** *Es seien μ, ν endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$. Dann existieren $f : X \to [0, \infty)$ messbar und $B \in \mathscr{F}$ mit $\mu(B) = 0$, so dass*

$$\forall A \in \mathscr{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu + \nu(A \cap B).$$

2.13 Definition. Sind μ, ν Maße auf $(X, \mathscr{F})$, so heißt

(a) ν absolut stetig bezüglich μ (Notation $\nu \ll \mu$), wenn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathscr{F}$ gilt;

(b) ν singulär zu μ (Notation $\nu \perp \mu$), wenn es eine Menge $A \in \mathscr{F}$ gibt mit $\nu(A^c) = \mu(A) = 0$.

2.14 Korollar (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sind μ, ν σ-endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$ mit $\nu \ll \mu$, so existiert $f : X \to [0, \infty)$ messbar mit*

$$\forall A \in \mathscr{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

2.15 Korollar (Lebesgue-Zerlegung)**.** *Sind μ, ν endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$, so existieren endliche Maße ν_0, ν_1 mit $\nu = \nu_0 + \nu_1$ und $\nu_0 \ll \mu$ sowie $\nu_1 \perp \mu$.*

2.16 Satz. *Für $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und ein σ-endliches Maß μ ist $\varphi : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ mit $\varphi(g)(f) = \int fg d\mu$, $g \in L^q(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$, ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ist $(L^p(\mu))'$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mu)$.*

Beweis. (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) φ ist eine Isometrie (Übung!). Es bleibt, zu jedem $\ell \in L^p(\mu)'$ ein $g \in L^q(\mu)$ zu finden mit $\ell(f) = \int fg\,d\mu$. Zunächst nehmen wir an, dass μ ein endliches Maß und ℓ ein positives Funktional (d.h. $f \geqslant 0 \Rightarrow \ell(f) \geqslant 0$) ist.

Definiere $\nu(A) := \ell(\mathbf{1}_A)$, $A \in \mathscr{F}$. Dann ist ν ein endliches Maß ($\nu \geqslant 0$ wegen ℓ positiv). Zeige σ-Additivität: für $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, $A = \bigcup_n A_n$ gilt $\mathbf{1}_A = \sum_n \mathbf{1}_{A_n}$ und mit dominierter Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty} \int \Big|\mathbf{1}_A(x) - \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n}(x)\Big|^p \mu(dx) = 0$$

(Majorante ist $\mathbf{1}_X \in L^1(\mu)$, da μ endlich). Also folgt aus der Stetigkeit von ℓ:

$$\nu(A) = \ell(\mathbf{1}_A) = \lim_{N\to\infty} \ell\Big(\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \ell(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

Aus $\mu(A) = 0$ folgt $\mathbf{1}_A = 0$ μ-f.ü. und $\nu(A) = \ell(\mathbf{1}_A) = 0$. Also gilt $\nu \ll \mu$ und nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert $g \in L^1(\mu)$ mit $\nu(A) = \int_A g\,d\mu$, $A \in \mathscr{F}$.

Wir zeigen $\ell(f) = \int fg\,d\mu$ für alle $f \in L^\infty(\mu)$ über maßtheoretische Induktion. Für $f = \mathbf{1}_A$ ist es gezeigt, für einfache Funktionen $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{F}$ folgt es aus der Linearität. Zu $f \in L^\infty(\mu)$ existieren einfache Funktionen f_n mit $f_n(x) \to f(x)$ punktweise und $|f_n| \leqslant |f|$. Dominierte Konvergenz zeigt daher (benutze $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ für endliche Maße μ) $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ und $\int f_n g\,d\mu \to \int fg\,d\mu$. Aus der Stetigkeit von ℓ folgt daher $\ell(f) = \lim_{n\to\infty} \ell(f_n) = \int fg\,d\mu$.

Wir zeigen $g \in L^q(\mu)$ zunächst für $q < \infty$. Betrachte dazu $f_n(x) = g^{q-1}(x)\mathbf{1}(g(x) \leqslant n) \in L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und schließe mit $(q-1)p = q$

$$\int_{\{g\leqslant n\}} g^q d\mu = \int f_n g\,d\mu = \ell(f_n) \leqslant \|\ell\| \|f_n\|_{L^p} = \|\ell\| \Big(\int_{\{g\leqslant n\}} g^q d\mu\Big)^{1/p}.$$

Also gilt $(\int_{\{g\leqslant n\}} g^q d\mu)^{1/q} \leqslant \|\ell\|$. Mit monotoner Konvergenz für $n \to \infty$ impliziert dies $\|g\|_{L^q} \leqslant \|\ell\| < \infty$. Im Fall $q = \infty$ betrachte $f(x) = \mathbf{1}(g(x) > \|\ell\|) \in L^\infty(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ und schließe $f(x)g(x) > f(x)\|\ell\|$, während $\int fg\,d\mu \leqslant \|f\|_{L^1}\|\ell\|$. Daher muss $fg = 0$ μ-f.ü. gelten und somit $\|g\|_{L^\infty} \leqslant \|\ell\|$.

Wegen $g \in L^q(\mu)$ ist $\int fg\,d\mu$ wohldefiniert für $f \in L^p(\mu)$ und es gibt einfache Funktionen $f_n \in L^\infty(\mu)$ mit $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ (mittels dominierter Konvergenz wie oben). Daher folgt sowohl $\ell(f_n) \to \ell(f)$ als auch $\int f_n g\,d\mu \to \int fg\,d\mu$. Wir erhalten daher $\ell = \varphi(g)$.

Im nächsten Schritt zerlegen wir ein allgemeines Funktional $\ell \in L^p(\mu)'$ in die Differenz zweier positiver Funktionale. Für $f \in L^p(\mu)$ mit $f \geqslant 0$ setze

$$\ell_+(f) = \sup\{\ell(g) \,|\, 0 \leqslant g \leqslant f \ \mu\text{-f.ü.}\}.$$

Dann gilt $\ell_+ \geqslant 0$ (wähle $g = 0$) und $\ell_+(\lambda f) = \lambda \ell_+(f)$ für $\lambda \geqslant 0$ (verwende $0 \leqslant \lambda g \leqslant \lambda f$). Außerdem ist $\ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2)$ für $f_1, f_2 \geqslant 0$:

wegen $g_1 \leqslant f_1, g_2 \leqslant f_2 \Rightarrow g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2$ ist '$\geqslant$' klar; für $g \leqslant f_1 + f_2$ wähle $g_1 = g \wedge f_1 \leqslant f_1$, $g_2 = g - g_1 \leqslant f_2$ und '$\leqslant$' folgt aus

$$\ell(g) = \ell(g_1) + \ell(g_2) \leqslant \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \Rightarrow \ell_+(f_1 + f_2) \leqslant \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2).$$

Für beliebige $f \in L^p(\mu)$ setze $\ell_+(f) = \ell_+(f^+) - \ell_+(f^-)$ mit Positiv- und Negativteil $f^+, f^- \geqslant 0$. Gilt $f = f_1 - f_2$ mit beliebigen $f_1, f_2 \geqslant 0$, so ist $f_1 = f^+ + h$, $f_2 = f^- + h$ für ein $h \geqslant 0$ und Linearität von ℓ_+ für $f^+, f^-, h \geqslant 0$ zeigt $\ell_+(f) = \ell_+(f^+ + h) - \ell_+(f^- + h) = \ell_+(f_1) - \ell_+(f_2)$. Damit folgt für beliebige $f_1, f_2 \in L^p(\mu)$ die Additivität $\ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1^+ + f_2^+) - \ell_+(f_1^- + f_2^-) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2)$. Auch $\ell_+(\lambda f) = \lambda \ell_+(f)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^p(\mu)$ folgt direkt aus den Definitionen.

Also ist ℓ_+ ein positives lineares Funktional auf $L^p(\mu)$ mit $\|\ell_+\| \leqslant \|\ell\| < \infty$ wegen $\ell_+(f^+) \leqslant \|f^+\|_\infty \ell_+(\mathbf{1}) \leqslant \|f\|_\infty \|\ell\|$ für die konstante Funktion $\mathbf{1}$ (Definition von $\ell_+(f^+)$) und der gleichen Abschätzung für $\ell^+(f^-)$. Schließlich ist $\ell_- := \ell_+ - \ell$ ebenfalls ein stetiges positives Funktional, wobei die Positivität aus $\ell_+(f) \geqslant \ell(f)$ für $f \geqslant 0$ folgt. Nun gilt $\ell_+ = \varphi(g_+)$, $\ell_- = \varphi(g_-)$ für $g_+, g_- \in L^p(\mu)$, so dass $\ell = \varphi(g)$ für $g = g_+ - g_- \in L^q(\mu)$ gezeigt ist.

Im letzten Schritt betrachten wir σ-endliche Maße μ. Zerlege dazu $X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n$ in paarweise disjunkte $X_n \in \mathscr{F}$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und setze $w(x) = (1 + \mu(X_n))^{-1} 2^{-n}$ für $x \in X_n$. Dann gilt $w > 0$, $\int w \, d\mu \leqslant 1$ und $\mu_w(A) := \int_A w \, d\mu$ ist ein endliches Maß. Insbesondere ist $\Phi : L^p(\mu) \to L^p(\mu_w)$ mit $\Phi(f) = w^{-1/p} f$ ein isometrischer Isomorphismus. Jedes Funktional $\ell \in L^p(\mu)'$ erzeugt daher das Funktional $\ell_w = \ell \circ \Phi^{-1} \in L^p(\mu_w)'$. Dann gibt es $g \in L^q(\mu_w)$ mit

$$\ell(f) = \ell_w(\Phi(f)) = \int \Phi(f) g \, d\mu_w = \int f w^{1/q} g \, d\mu, \quad f \in L^p(\mu).$$

Die Behauptung folgt aus $w^{1/q} g \in L^q(\mu)$ für $g \in L^q(\mu_w)$. □

2.17 Definition. Für einen Messraum $(X, \mathscr{F})$ bezeichnet

$$M(\mathscr{F}) := \{\mu_+ - \mu_- \mid \mu_+, \mu_- \text{ endliche Maße auf } \mathscr{F}\}$$

den $\mathbb{R}$-Vektorraum der endlichen signierten Maße. Durch

$$\|\mu\|_{TV} := \mu_+(X) + \mu_-(X)$$

für $\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(\mathscr{F})$ mit Maßen μ_+, μ_- und $\mu_+ \perp \mu_-$ (*Hahn-Jordan-Zerlegung*) wird die Totalvariationsnorm definiert.

2.18 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für $C(K)'$)**.** *Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und K ein kompakter metrischer Raum. Dann definiert $\varphi : M(\mathfrak{B}_K) \to C(K)'$ mit $\varphi(\mu)(f) = \int_K f d\mu$ einen isometrischen Isomorphismus zwischen $(M(\mathfrak{B}_K), \|\bullet\|_{TV})$ und dem Dualraum von $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$.*

2.19 Korollar. *$(M(\mathfrak{B}_K), \|\bullet\|_{TV})$ bildet einen Banachraum.*

2.20 Korollar. *Der Dualraum von $(C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist isometrisch isomorph zu $(M(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}), \|\bullet\|_{TV})$.*

2.3 Die Sätze von Hahn-Banach

2.21 Definition. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X heißt sublinear, falls

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geqslant 0$ (und reell), $x \in X$;

(b) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

2.22 Beispiele.

(a) Jede (Halb-)Norm ist sublinear.

(b) Jedes lineare Funktional ist sublinear.

(c) Das Minkowski-Funktional $p_A : X \to \mathbb{R}$, $p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in A\}$ ist sublinear für $A \subseteq X$ konvex mit $0 \in \operatorname{int}(A)$.

2.23 Satz (Hahn-Banach, Version der linearen Algebra, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Seien U ein Unterraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums X, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell : U \to \mathbb{R}$ linear mit $\ell(u) \leqslant p(u)$, $u \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$L|_U = \ell \text{ und } L(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

2.24 Satz (Hahn-Banach, Fortsetzungsversion)**.** *Es sei U ein Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Zu jedem $\ell \in U'$ existiert ein $L \in X'$ mit*

$$L|_U = \ell \text{ und } \|L\|_{X'} = \|\ell\|_{U'}.$$

2.25 Korollar. *Für jedes x in einem normierten Raum X gilt*

$$\|x\| = \max_{\ell \in X', \|\ell\| \leqslant 1} |\ell(x)|.$$

2.26 Satz. *Es sei U ein Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Dann gilt*

$$\operatorname{dist}_U(x) = \sup\{|\ell(x)| : \ell \in X', \|\ell\| \leqslant 1, \ell|_U = 0\}, \quad x \in X.$$

Insbesondere liegt U dicht in X genau dann, wenn für jedes $\ell \in X'$ mit $\ell|_U = 0$ bereits $\ell = 0$ gilt.

2.27 Satz (Hahn-Banach, Trennungsversion)**.** *Es sei X normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(a) Ist $C \subseteq X$ konvex, offen mit $0 \in C$ und ist $x_0 \notin C$, so existiert $\ell \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} \ell(x_0) \geqslant 1, \quad \operatorname{Re} \ell|_C < 1.$$

(b) Sind $C_1, C_2 \subseteq X$ konvex, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ und C_1 offen, so existiert $\ell \in X'$ mit $\operatorname{Re} \ell(x_1) < \operatorname{Re} \ell(x_2)$ für alle $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

2.4 Grundprinzipien für Operatoren auf Banachräumen

2.28 Satz (Baire)**.** *Für eine Folge $(O_n)_{n\geqslant 1}$ offener, dichter Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums T liegt $\bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ dicht in T.*

2.29 Beispiel. Betrachte $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $O_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Dann sind O_n offen und dicht in $\mathbb{Q}$, aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing$. Vollständigkeit ist also notwendige Voraussetzung im Satz von Baire.

2.30 Definition. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums heißt

(a) nirgends dicht, falls das Innere von $\overline{M}$ leer ist;

(b) von 1. Kategorie, falls M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist;

(c) von 2. Kategorie, falls M nicht von 1. Kategorie ist.

2.31 Korollar (Bairescher Kategoriensatz)**.** *In einem vollständigen metrischen Raum liegt das Komplement einer Menge erster Kategorie stets dicht.*

2.32 Korollar. *Ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum ist von 2. Kategorie (in sich).*

2.33 Korollar. *In einem Banachraum besitzt jede Basis im Sinn der linearen Algebra entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente.*

2.34 Korollar. *Der Vektorraum der Polynome mit beliebiger Norm ist nie ein Banachraum.*

2.35 Satz (Satz von Banach-Steinhaus, von der gleichmäßigen Beschränktheit; uniform boundedness principle)**.** *Ist $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie beschränkter Operatoren von einem Banachraum X in einen normierten Raum Y mit*

$$\forall\, x \in X : \sup_{T\in\mathscr{T}} \|Tx\| < \infty,$$

so gilt sogar $\sup_{T\in\mathscr{T}} \|T\| < \infty$.

2.36 Korollar. *Ist X ein Banachraum und $M' \subseteq X'$, so sind äquivalent:*

(a) M' ist beschränkt, d.h. $\sup_{\ell\in M'} \|\ell\| < \infty$;

(b) M' ist schwach-beschränkt, d.h. $\forall x \in X : \sup_{\ell\in M'} |\ell(x)| < \infty$.*

2.37 Korollar. *Ist X ein normierter Raum und $M \subseteq X$, so sind äquivalent:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{x\in M} \|x\| < \infty$;

(b) M ist schwach-beschränkt, d.h. $\forall \ell \in X' : \sup_{x\in M} |\ell(x)| < \infty$.

2.38 Korollar. *Für $L_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \geqslant 1$, X Banachraum, Y normierter Raum existiere $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ für alle $x \in X$. Dann gilt $L \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

2.39 Satz. *Es sei* $s_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e^{2\pi i k \bullet} \rangle e^{2\pi i k x}$, $x \in [0,1]$, *die* n*-te Fourierapproximation an eine Funktion* $f \in L^2([0,1];\mathbb{C})$*. Dann existieren* $x \in [0,1]$ *und* $f \in C_{per}([0,1];\mathbb{C})$*, so dass* $(s_n(f)(x))_{n\geqslant 1}$ *unbeschränkt ist. Insbesondere konvergiert die Fourierapproximation einer stetigen, periodischen Funktion* f *nicht immer punktweise.*

2.40 Definition. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt <u>offen</u>, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

2.41 Lemma. *Ist* $f : S \to T$ *offen und injektiv, so ist die Inverse* $f^{-1} : f(S) \to S$ *stetig.*

2.42 Lemma. *Für eine lineare Abbildung* $L : X \to Y$ *zwischen normierten Räumen* X, Y *sind äquivalent:*

(a) L *ist offen;*

(b) $\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon^Y \subseteq L(U_1^X)$ *mit den offenen Kugeln* $U_\varepsilon^Y := \{y \in Y \,|\, \|y\| < \varepsilon\}$, $U_1^X := \{x \in X \,|\, \|x\| < 1\}$.

2.43 Satz (von der offenen Abbildung)**.** *Sind* X, Y *Banachräume und ist* $L \in L(X,Y)$ *surjektiv, so ist* L *offen.*

2.44 Korollar. *Ist* $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ *eine Bijektion zwischen Banachräumen* X *und* Y*, so gilt* $L^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

2.45 Korollar. *Sind* $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ *zwei Normen auf* X*, die beide* X *zum Banachraum machen, und gilt*

$$\exists C > 0 \, \forall x \in X : \; \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1,$$

so sind beide Normen bereits äquivalent, d.h.

$$\exists C \geqslant c > 0 \, \forall x \in X : \; c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

2.46 Korollar. *Es sei* $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ *ein injektiver Operator zwischen Banachräumen* X, Y*. Dann ist* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{ran} L, X)$ *äquivalent zu* $\operatorname{ran} L \subseteq Y$ *abgeschlossen, wobei* $\operatorname{ran} L = \{Lx \,|\, x \in X\}$.

2.5 Reflexivität und schwache/schwach*-Konvergenz

2.47 Definition. Ein normierter Raum X heißt <u>reflexiv</u>, falls $\iota : X \to X''$, $\iota(x)(\ell) := \ell(x)$, surjektiv ist.

2.48 Beispiele.

(a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv (Darstellungssatz von Riesz).

(b) $L^p(\mu)$ ist für $1 < p < \infty$ und σ-endliches Maß μ reflexiv. Insbesondere sind die Folgenräume ℓ^p, $1 < p < \infty$, reflexiv.

(c) c_0 und ℓ^∞ sind nicht reflexiv.

2.49 Lemma. *Ein reflexiver Raum X ist genau dann separabel, wenn X' separabel ist.*

2.50 Beispiel. $C([0,1])$ ist nicht reflexiv, weil $C([0,1])$ separabel, aber $M(\mathfrak{B}_{[0,1]})$ nicht separabel ist. Analog folgt, dass ℓ^1 und $L^1([0,1])$ nicht reflexiv sind.

2.51 Satz. *Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Raums $(X, \|\bullet\|)$, so ist auch $(U, \|\bullet\|)$ reflexiv.*

2.52 Definition. Es sei X ein normierter Raum.

(a) Eine Folge (x_n) in X konvergiert schwach gegen $x \in X$, falls $\forall \ell \in X' : \ell(x_n) \to \ell(x)$ gilt. Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Eine Folge (ℓ_n) in X' konvergiert schwach* gegen $\ell \in X'$, falls $\forall x \in X : \ell_n(x) \to \ell(x)$ gilt. Notation: $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$.

2.53 Satz. *In jedem normierten Raum X gilt:*

(a) Aus $x_n \xrightarrow{w} x$ in X folgt, dass die Folge (x_n) beschränkt ist und $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(b) Aus $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$ in X' folgt, dass die Folge (ℓ_n) beschränkt ist und $\|\ell\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n\|$, sofern X vollständig ist.

2.54 Beispiele.

(a) In $C(K)$, K kompakt, gilt $f_n \xrightarrow{w} f$ genau dann, wenn $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in K$.

(b) In $M(\mathfrak{B}_K)$, K kompakt, gilt $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$ genau dann, wenn $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$ für alle $f \in C(K)$, was für Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n, μ der 'schwachen Konvergenz' der Stochastik entspricht. In $M(\mathfrak{B}_\mathbb{R})$ bedeutet $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$ gerade $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$ für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$, so dass beispielsweise $\delta_n \xrightarrow{w*} 0$ folgt.

2.55 Satz. *Sei X ein normierter Raum sowie $D \subseteq X$, $D' \subseteq X'$ mit $\overline{\operatorname{span}(D)} = X$ und $\overline{\operatorname{span}(D')} = X'$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(a) Es gilt $x_n \xrightarrow{w} x$ in X genau dann, wenn $\sup_n \|x_n\| < \infty$ und $\ell(x_n) \to \ell(x)$ für alle $\ell \in D'$ gilt.

(b) X sei ein Banachraum. Dann gilt $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$ in X' genau dann, wenn $\sup_n \|\ell_n\| < \infty$ und $\ell_n(x) \to \ell(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

2.56 Beispiele.

(a) In ℓ^p, $1 < p < \infty$, gilt $a^{(m)} \xrightarrow{w} a$ genau dann, wenn $\sup_m \|a^{(m)}\|_{\ell^p} < \infty$ und $a_n^{(m)} \to a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. In ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, gilt $a^{(m)} \xrightarrow{w*} a$ genau dann, wenn $\sup_m \|a^{(m)}\|_{\ell^p} < \infty$ und $a_n^{(m)} \to a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Betrachte $L^p(\mu)$ für ein endliches Maß μ. Dann liegen die Funktionen $g = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $A_k \in \mathscr{F}$, dicht in $L^q(\mu)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Daher gilt

$$\forall 1 \leqslant p < \infty: \; f_n \xrightarrow{w} f \iff \sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty, \forall A \in \mathscr{F}: \int_A f_n d\mu \to \int_A f\, d\mu,$$
$$\forall 1 < p = \infty: \; f_n \xrightarrow{w*} f \iff \sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty, \forall A \in \mathscr{F}: \int_A f_n d\mu \to \int_A f\, d\mu.$$

Ist $\mathscr{F}$ die Borel-σ-Algebra eines Polnischen Raums, so kann man sich für $p > 1$ auf offene (bzw. kompakte) Mengen $A \in \mathscr{F}$ beschränken (für Wahrscheinlichkeitsmaße reicht dann stochastische Konvergenz $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$). In $L^1(\mu)$ ist (f_n) schwach folgenkompakt genau dann, wenn (f_n) beschränkt und *gleichgradig integrierbar* (Satz von Dunford-Pettis).

2.57 Satz (Satz von Helly)**.** *Für einen separablen normierten Raum X besitzt jede beschränkte Folge (ℓ_n) in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

2.58 Satz. *In einem reflexiven Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach-konvergente Teilfolge.*

2.59 Satz. *Ist $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum in einem reflexiven Raum X, so existiert zu jedem $x \in X$ ein $u_x \in U$ mit $\|x - u_x\| = \operatorname{dist}_U(x)$.*

2.6 Die Fouriertransformation

In diesem Abschnitt sind alle Funktionen komplexwertig.

2.60 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformierte gegeben durch

$$\mathscr{F} f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle u,x\rangle} dx, \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

2.61 Satz. *Die Fouriertransformation $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ ist ein stetiger linearer Operator mit $\|\mathscr{F}\| = 1$.*

2.62 Definition. Der Schwartzraum auf $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\Big|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : \lim_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \Big\}.$$

2.63 Satz. *Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $x_0, u_0 \in \mathbb{R}^d$, $c > 0$ gilt:*

(a) $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;

(b) $\mathscr{F}(x^\alpha f)(u) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha (\mathscr{F} f)(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

(c) $\mathscr{F}(D^\alpha f)(u) = (-i)^{|\alpha|} u^\alpha \mathscr{F} f(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

(d) $\langle \mathscr{F} f, g\rangle_{L^2} = \langle f, \mathscr{F} g\rangle_{L^2}$;

(e) $\mathscr{F}(f(\bullet + x_0))(u) = e^{-i\langle x_0,u\rangle} \mathscr{F} f(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

(f) $\mathscr{F}(e^{i\langle \bullet,u_0\rangle} f)(u) = \mathscr{F}(u + u_0)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

(g) $\mathscr{F}(f(c\bullet))(u) = c^{-d}\mathscr{F}f(u/c)$, $u \in \mathbb{R}^d$.

2.64 Lemma. *Für* $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2}e^{-|x|^2/2}$ *gilt* $\mathscr{F}\varphi(u) = e^{-|u|^2/2}$, $u \in \mathbb{R}^d$.

2.65 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x) = (2\pi)^d f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

2.66 Satz. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $\mathscr{F}(\mathscr{F}f)(x) = (2\pi)^d f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

2.67 Korollar. *$\mathscr{F}$ ist eine Bijektion von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ mit Inverser*

$$\mathscr{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle u,x\rangle}du, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Ferner gilt $\langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle = (2\pi)^d\langle f, g\rangle$ *für alle* $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

2.68 Korollar. *$\mathscr{F}$ lässt sich eindeutig von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ zu einem stetigen Operator $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen, und es gilt die Plancherelgleichung*

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d):\ \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle = (2\pi)^d\langle f, g\rangle.$$

Insbesondere ist $(2\pi)^{-d/2}\mathscr{F}$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R}^d)$ in sich.

2.69 Lemma. *Die Fortsetzung $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ erfüllt:*

(a) *Für $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathscr{F}f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$ für Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$.*

(b) *Für allgemeine $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathscr{F}f(u) = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leqslant R} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$ mit Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

2.70 Definition. Für $m \geqslant 1$ ist der Sobolevraum der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$H^m(\mathbb{R}^d) := \Big\{f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,\Big|\,\forall|\alpha| \leqslant m:\ D^{(\alpha)}f \in L^2(\mathbb{R}^d)\Big\}.$$

Dabei existieren für Multiindizes α die schwachen Ableitungen $D^{(\alpha)}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, falls

$$\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d):\ \langle f, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle D^{(\alpha)}f, \varphi\rangle.$$

2.71 Lemma. *Für $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ und $|\alpha| \leqslant m$ gilt $\mathscr{F}(D^{(\alpha)}f)(u) = (-i)^{|\alpha|}u^\alpha\mathscr{F}f(u)$ für Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$.*

2.72 Satz. *Es gilt* $H^m(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,|\,(1+|u|^2)^{m/2}\mathscr{F}f(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

2.73 Satz (Soboleveinbettungssatz)**.** *Zu $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ und $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k+d/2$ existiert $\tilde f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ mit $\tilde f = f$ fast überall. Nach Auswahl eines stetigen Repräsentanten gilt also die Einbettung $H^m(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$ für $m - k > d/2$.*

3 Spektraltheorie

3.1 Spektrum und Resolvente

3.1 Definition. Sei $L \in \mathcal{L}(X)$ ein beschränkter Operator.

(a) Die Resolventenmenge von L ist

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - L)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ existiert}\}.$$

(b) Die Resolventenabbildung ist

$$R : \rho(L) \to \mathcal{L}(X), \quad R_\lambda := R_\lambda(L) := (\lambda - L)^{-1}.$$

(c) Das Spektrum von L ist

$$\sigma(L) = \mathbb{K} \setminus \rho(L).$$

(d) Das Punktspektrum von L ist

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \sigma(L) \mid \lambda - L \text{ ist nicht injektiv}\}.$$

$\lambda \in \sigma_p(L)$ heißt Eigenwert von L und jedes $x \in \ker(\lambda - L) \setminus \{0\}$ Eigenvektor oder Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ.

3.2 Beispiele.

(a) Für den *Linksshift* $A : \ell^2 \to \ell^2$, $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ gilt $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\}$ sowie $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Genauer ist $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A)$ mit dem approximativen Punktspektrum $\sigma_{ap}(L) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists (x_n) \subseteq X, \|x_n\| = 1 : (\lambda - L)x_n \to 0\}$.

(b) Für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ betrachte den Multiplikationsoperator $M_g : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $M_g f = gf$. Dann gilt $\sigma(M_g) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \|(\lambda - g)^{-1}\|_{L^\infty} = \infty\}$ sowie $\sigma_p(M_g) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \mathrm{Leb}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = \lambda\}) > 0\}$ mit dem Lebesguemaß Leb.

(c) Für die Translation $\tau_{x_0} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $\tau_{x_0} f(x) = f(x - x_0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt $\sigma(\tau_{x_0}) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$ sowie $\sigma_p(\tau_{x_0}) = \varnothing$. Dies folgt durch die Darstellung als Multiplikationsoperator $M_{\exp(i\langle \bullet, x_0 \rangle)}$ im Fourierbereich.

3.3 Satz. *Für $L \in \mathcal{L}(X)$ gilt:*

(a) $\rho(L)$ ist offen. Für $\lambda_0 \in \rho(L)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ gilt $\lambda \in \rho(L)$ und

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1}.$$

(b) Das Spektrum $\sigma(L)$ ist kompakt mit $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant \|L\|\}$.

(c) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\sigma(L) \neq \varnothing$.

3.4 Definition. $r(L) := \lim_{n \to \infty} \|L^n\|^{1/n}$ heißt Spektralradius von L.

3.5 Satz. *Es gilt $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant r(L)\}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = r(L)$.*

3.2 Spektralkalkül für selbstadjungierte Operatoren

3.6 Definition. Es sei H ein Hilbertraum.

(a) $L^* \in \mathcal{L}(H)$ heißt <u>(Hilbertraum-)Adjungierte</u> von $L \in \mathcal{L}(H)$, falls gilt

$$\forall x, y \in H : \ \langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle.$$

(b) $L \in \mathcal{L}(H)$ heißt <u>normaler Operator</u>, falls $LL^* = L^*L$ gilt.

(c) $L \in \mathcal{L}(H)$ heißt <u>selbstadjungierter Operator</u>, falls $L^* = L$ gilt.

(d) $U \in \mathcal{L}(H)$ heißt <u>unitärer Operator</u>, falls $U^*U = UU^* = I$ gilt.

3.7 Beispiel. Für einen normalen Operator L und einen unitären Operator U ist U^*LU wieder normal. Ebenso ist für einen selbstadjungierten Operator L und einen unitären Operator U der Operator U^*LU wieder selbstadjungiert. Ist $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^{d \times d}$ eine Diagonalmatrix, so ist L stets normal und im Fall $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ selbstadjungiert. Eine notwendige (und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hinreichende) Bedingung für eine Diagonalisierung von L mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist im Endlichdimensionalen also, dass L normal ist. Die Eigenwerte sind genau dann alle reell, wenn L selbstadjungiert ist.

3.8 Lemma.

(a) Für $L \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\|LL^*\| = \|L^*L\| = \|L\|^2 = \|L^*\|^2$.

(b) Für normale Operatoren $L \in \mathcal{L}(H)$ erfüllt der Spektralradius $r(L) = \|L\|$.

3.9 Satz. *Für $L \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\sigma(L) \subseteq \overline{\{\langle Lx, x \rangle \mid \|x\| = 1\}}$. Insbesondere ist $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$ für selbstadjungierte L.*

3.10 Satz. *Ist $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär, so gilt $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$.*

3.11 Beispiel. Der Shift τ_{x_0} aus Beispiel 3.2(c) ist unitär mit Spektrum $\sigma(\tau_{x_0}) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$.

3.12 Definition. Ist A ein $\mathbb{C}$-Banachraum und ist $(x, y) \mapsto xy$ von $A \times A$ nach A bilinear, assoziativ und erfüllt $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in A$, so heißt A <u>Banachalgebra</u>. Eine Abbildung $x \mapsto x^*$ von A nach A heißt <u>Involution</u>, falls $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, $(x^*)^* = x$, $(xy)^* = y^* x^*$ für alle $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Besitzt die Banach-Algebra A eine Involution mit $\|x^*x\| = \|x\|^2$ für alle $x \in A$, so heißt A <u>C^*-Algebra</u>. Eine Abbildung $\Phi : A \to B$ zwischen C^*-Algebren A, B heißt *-Homomorphismus, falls Φ linear, multiplikativ (d.h. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$) und involutiv (d.h. $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$) ist.

3.13 Beispiele.

(a) $(C(K; \mathbb{C}), \|\bullet\|_\infty)$ mit einem Kompaktum K bildet mit punktweiser Multiplikation und komplexer Konjugation (d.h. $f^*(x) := \overline{f(x)}$) eine C^*-Algebra, die (bezüglich Multiplikation) kommutativ ist.

(b) $(\mathcal{L}(H), \|\bullet\|)$ für einen $\mathbb{C}$-Hilbertraum H bildet mit Komposition von Operatoren als Algebramultiplikation und Hilbertraumadjungierter L^* als Involution eine C^*-Algebra, die im Allgemeinen (bezüglich Multiplikation) nicht-kommutativ ist.

3.14 Satz. *Für $L \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, erfüllt $p(L) := \sum_{k=0}^m a_k L^k$ (mit $L^0 := \mathrm{Id}$):*

(a) $\sigma(p(L)) = p(\sigma(L)) := \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(L)\}$;

(b) $\|p(L)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(L)} |p(\lambda)|$.

3.15 Satz (Stetiger Funktionalkalkül)**.** *Ist $L \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so existiert genau ein *-Homomorphismus $\Phi : C(\sigma(L)) \to \mathcal{L}(H)$ mit*

(a) $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}$, $\Phi(\mathrm{id}) = L$;

(b) *Φ ist stetig.*

Für Polynome p gilt $\Phi(p) = p(L)$ und wir schreiben allgemein $f(L) := \Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(L))$.

3.16 Korollar (Eigenschaften des Funktionalkalküls)**.** *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selbstadjungiertes $L \in \mathcal{L}(H)$ und $f \in C(\sigma(L))$ gilt:*

(a) $\|f(L)\| = \|f\|_\infty := \sup_{x \in \sigma(L)} |f(x)|$;

(b) $f \geqslant 0 \Rightarrow f(L) \geqslant 0$ *, das heißt $f(L)$ ist positiver Operator, also: $\forall x \in H : \langle f(L)x, x\rangle \geqslant 0$;*

(c) $Lx = \lambda x \Rightarrow f(L)x = f(\lambda)x$;

(d) *$\sigma(f(L)) = f(\sigma(L))$ („spektraler Abbildungssatz“);*

(e) *$\{f(L) \mid f \in C(\sigma(L))\}$ ist eine kommutative C^*-Algebra von normalen Operatoren in $\mathcal{L}(H)$. $f(L)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn f reellwertig ist;*

(f) *Kommutiert $A \in L(H)$ mit L ($AL = LA$), so auch mit $f(L)$ ($Af(L) = f(L)A$).*

3.17 Korollar. *Ist $L \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter positiver Operator und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so existiert genau ein selbstadjungierter Operator $L^{1/2} \in \mathcal{L}(H)$, der positiv ist und $L^{1/2}L^{1/2} = L$ erfüllt.*

3.18 Satz. *Es sei $L \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zerfällt $\sigma(L) = A \cup A^C$ in zwei topologisch getrennte Mengen (d.h. $\inf_{\lambda \in A, \mu \in A^C} |\lambda - \mu| > 0$), so sind $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A^C} \in C(\sigma(L))$ und $\mathbf{1}_A(L)$, $\mathbf{1}_{A^C}(L)$ Orthogonalprojektionen auf Unterräume $U, U^C \subseteq H$ mit $H = U \oplus U^C$, $U^C = U^\perp$ und $L(U) \subseteq U$, $L(U^C) \subseteq U^C$.*

3.19 Korollar. *Ist λ isolierter Punkt in $\sigma(L)$, $L \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\lambda \in \sigma_p(L)$ und $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(L)$ ist die Orthogonaprojektion auf den Eigenraum $\ker(\lambda - L)$ von L zu λ.*

3.20 Lemma. *Betrachte* $B(K) := \{f : K \to \mathbb{C}$ *messbar* $|\ \|f\|_\infty < \infty\}$ *für* $K \subseteq \mathbb{C}$ *kompakt. Dann gilt:*

(a) $(B(K), \|\bullet\|_\infty)$ *ist ein Banachraum und bildet bezüglich punktweiser Multiplikation und komplexer Konjugation eine* C^**-Algebra.*

(b) Für $U \subseteq B(K)$ *mit* $C(K) \subseteq U$ *und der Eigenschaft*

$$f_n \in U, \sup_n \|f_n\|_\infty < \infty, \forall x \in K : f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f \in U$$

gilt bereits $U = B(K)$.

3.21 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für $C(K;\mathbb{C})'$)**.** *Es sei* K *ein kompakter metrischer Raum. Betrachte die endlichen komplexen Maße* $M_{\mathbb{C}}(\mathfrak{B}_K) = \{\mu_1 + i\mu_2 \,|\, \mu_1, \mu_2$ *endliche signierte Maße auf* $\mathfrak{B}_K\}$ *mit Norm* $\|\mu_1 + i\mu_2\|_{TV^{\mathbb{C}}} = (\|\mu_1\|_{TV}^2 + \|\mu_2\|_{TV}^2)^{1/2}$. *Dann definiert* $\varphi : M_{\mathbb{C}}(\mathfrak{B}_K) \to C(K;\mathbb{C})'$ *mit* $\varphi(\mu)(f) = \int_K f d\mu$ *einen isometrischen Isomorphismus.*

3.22 Satz (Lax-Milgram)**.** *Es sei* H *ein* $\mathbb{C}$*-Hilbertraum und* $a : H \times H \to \mathbb{C}$ *eine Sesquilinearform* $(a(\lambda x + y, z) = \lambda a(x,z) + a(y,z),\ a(y,x) = \overline{a(x,y)})$. *Gilt* $|a(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$ *für alle* $x, y \in H$ *(Stetigkeit), so existiert ein Operator* $A \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $\|A\| \leqslant C$, *so dass*

$$\forall x, y \in H :\ a(x,y) = \langle Ax, y\rangle.$$

3.23 Satz (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Für* $L \in \mathcal{L}(H)$ *selbstadjungiert,* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *existiert genau ein *-Homomorphismus* $\Phi : B(\sigma(L)) \to \mathcal{L}(H)$ *mit*

(a) $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}$, $\Phi(\mathrm{id}) = L$;

(b) Φ *ist normstetig;*

(c) Aus $f_n \in B(\sigma(L))$, $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ *und* $\forall t \in \sigma(L) :\ f_n(t) \to f(t)$ *folgt*

$$\forall x, y \in H :\ \langle \Phi(f_n)x, y\rangle \to \langle \Phi(f)x, y\rangle.$$

Für $f \in C(\sigma(L))$ *ist* $\Phi(f)$ *durch den stetigen Funktionalkalkül gegeben und wir schreiben allgemein* $f(L) := \Phi(f)$ *für* $f \in B(\sigma(L))$.

3.24 Lemma. *Es gilt folgende Verschärfung von Teil (c) des Satzes: Aus* $f_n \in B(\sigma(L))$, $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ *und* $\forall t \in \sigma(L) :\ f_n(t) \to f(t)$ *folgt*

$$\forall x \in H :\ f_n(L)x \to f(L)x.$$

3.25 Definition. Für $L \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, heißt die Abbildung $A \mapsto E_A := \mathbf{1}_A(L)$ von $\mathfrak{B}_{\sigma(L)}$ nach $\mathcal{L}(H)$ Spektralmaß von L.

3.26 Lemma. *Für das Spektralmaß gilt:*

(a) E_A *ist Orthogonalprojektion;*

(b) $E_\varnothing = \mathbf{0}$, $E_{\sigma(L)} = \mathrm{Id}$ *und für paarweise disjunkte* $A_n \in \mathfrak{B}_{\sigma(L)}$ *gilt* $\sum_{n=1}^\infty E_{A_n}x = E_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}x$, $x \in H$;

(c) $E_A E_B = E_{A\cap B}$ *für* $A, B \in \mathfrak{B}_{\sigma(L)}$.

3.27 Lemma. *Es gilt* $\mathrm{ran}(E_{\{\lambda\}}) = \ker(\lambda - L)$ *für* $\lambda \in \sigma(L)$. *Insbesondere ist* λ *Eigenwert von* L *genau dann, wenn* $E_{\{\lambda\}} \neq 0$.

3.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

3.28 Definition. $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt kompakter Operator, falls $\overline{K(B_X)} \subseteq Y$ kompakt ist mit der Einheitskugel B_X in X. Äquivalent ist K kompakt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ eine Teilfolge (n_k) existiert, so dass (Kx_{n_k}) in Y konvergiert.

3.29 Beispiele.

(a) Die Integraloperatoren $Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ für $k \in C([0,1]^2)$ (bzw. $k \in L^2([0,1]^2)$) sind kompakte Operatoren in $\mathcal{L}(C([0,1]))$ (bzw. $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$).

(b) Jeder Operator L von endlichem Rang, also mit $\dim(\operatorname{ran} L) < \infty$ ist kompakt.

3.30 Definition. Zu $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist der adjungierte Operator $L' \in \mathcal{L}(Y',X')$ definiert als $L'(\ell_Y)(x) := \ell_Y(Lx)$ für $\ell_Y \in Y'$, $x \in X$.

3.31 Satz (Schauder). *Seien $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ und X normierter, Y Banachraum. Dann ist L genau dann kompakt, wenn L' kompakt ist.*

3.32 Satz (Riesz-Schauder). *Es sei $K \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator auf einem Banachraum X sowie $S = \mathrm{Id} - K$ eine kompakte Störung der Identität. Dann gilt:*

(a) $\dim(\ker S) < \infty$;

(b) $\operatorname{ran}(S)$ *ist abgeschlossen und* $\operatorname{codim}(\operatorname{ran} S) := \dim(X/\operatorname{ran} S) < \infty$;

(c) S ist genau dann injektiv, wenn S surjektiv ist.

3.33 Korollar (Fredholmsche Alternative). *Sei $K \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator auf einem Banachraum X sowie $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Dann hat*

- *entweder die homogene Gleichung $\lambda x - Kx = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ und in diesem Fall ist die inhomogene Gleichung $\lambda x - Kx = y$ für alle $y \in X$ eindeutig lösbar,*

- *oder aber es existieren endlich viele linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung und die inhomogene Gleichung besitzt nur für y in einem echten Unterraum $U \subsetneq X$ mit* $\dim(X/U) < \infty$ *eine Lösung.*

3.34 Beispiel. Der Volterra-Integraloperator $K : C([0,1]) \to C([0,1])$, $Kf(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)ds$, mit $k \in C([0,1]^2)$ ist kompakt und die homogene Gleichung $f - Kf = 0$ besitzt nur die Lösung $f = 0$. Daher gilt die erste Fredholmsche Alternative und für jedes $g \in C([0,1])$ existiert ein $f \in C([0,1])$ mit $f - Kf = g$.

3.35 Satz (Spektrum kompakter Operatoren). *Für einen kompakten Operator $K \in \mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X gilt:*

(a) Im Fall $\dim(X) = \infty$ *gilt* $0 \in \sigma(K)$.

(b) *Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert von K und der Eigenraum $\ker(\lambda - K)$ ist endlich-dimensional.*

(c) *$\sigma(K)$ ist höchstens abzählbar und besitzt keinen von Null verschiedenen Häufungspunkt.*

3.36 Beispiel. Der Operator $K : C([0,1]) \to C([0,1])$, $Kf(t) = \int_0^t f(s)ds$, ist kompakt und Spektrum $\sigma(K) = \{0\}$. Dies unterscheidet ihn nicht vom Null-Operator. Auf Hilberträumen beschreibt das Spektrum den Operator sehr viel genauer.

3.37 Lemma. *Für einen normalen Operator $L \in \mathcal{L}(H)$ auf einem Hilbertraum H gilt:*

(a) *$Lx = \lambda x \Rightarrow L^* x = \bar{\lambda} x$;*

(b) *$Lx = \lambda x$, $Ly = \mu y$ und $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$;*

(c) *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = \|L\|$;*

(d) *im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt (c), falls L selbstadjungiert und kompakt ist.*

3.38 Satz (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren)**.** *Sei $K \in \mathcal{L}(H)$ kompakt sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ normal bzw. im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ selbstadjungiert. Dann existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem $(e_k)_{k \geqslant 1}$ in H sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\mu_k)_{k \geqslant 1} \subseteq \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit*

$$H = \ker(K) \oplus \overline{\operatorname{span}\{e_k \mid k \geqslant 1\}}, \quad \ker(K) \perp \overline{\operatorname{span}\{e_k \mid k \geqslant 1\}}$$

sowie

$$\forall x \in H: \; Kx = \sum_{k \geqslant 1} \mu_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Die μ_k sind die gemäß Vielfachheit gezählten Eigenwerte ungleich Null von K und e_k sind zugehörige Eigenvektoren. Es gilt $\|K\| = \max_k |\mu_k|$.

3.39 Korollar. *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$K = \sum_{\lambda_k \in \sigma(K) \setminus \{0\}} \lambda_k P_k$$

mit Konvergenz in Operatornorm, wobei $P_k : H \to \ker(\lambda_k - K)$ die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume bezeichnet.

3.40 Satz (Singulärwertzerlegung)**.** *Zu einem kompakten Operator $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ zwischen Hilberträumen H_1, H_2 existieren Orthonormalsysteme (e_k) in H_1 und (f_k) in H_2 sowie eine (eventuell abbrechende) Folge $s_k \downarrow 0$ mit*

$$Kx = \sum_{k \geqslant 1} s_k \langle x, e_k \rangle f_k, \quad x \in H_1.$$

Die Singulärwerte s_k haben die Eigenschaft, dass s_k^2 die gemäß Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $K^* K$ sind, und die (e_k) sind die zugehörigen Eigenvektoren von $K^* K$. Es gilt $\|K\| = \max_k s_k$.

3.41 Beispiel. Betrachte $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ mit $Kf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Dann ist K kompakt, und es gilt $K^*Kf(t) = \int_0^1 (1 - t \vee u) f(u)\,du$, so dass $(K^*Kf)''(t) = -f(t)$, $K^*Kf(1) = 0$, $(K^*Kf)'(0) = 0$ folgt. Wir erhalten die Eigenwerte $\lambda_k = \frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2}$ und Eigenfunktionen $e_k(t) = \sqrt{2}\cos((k+\frac{1}{2})\pi t)$, $k \in \mathbb{N}_0$, von K^*K. Es folgt die Singulärwertzerlegung von K:

$$Kf(t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi} \Big\langle f, \sqrt{2}\cos((k+\tfrac{1}{2})\pi \bullet)\Big\rangle \sqrt{2}\sin\big((k+\tfrac{1}{2})\pi t\big).$$

Es gilt $\|K\| = 2/\pi$.

3.42 Definition. Es sei $K \in \mathcal{L}(H)$ ein kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H mit Singulärwertzerlegung $K = \sum_{k \geqslant 1} s_k \langle \bullet, e_k\rangle f_k$.

(a) K heißt <u>nuklearer</u> oder <u>Spurklassen-Operator</u>, falls $(s_k) \in \ell^1$. Man setzt $\|K\|_{nuk} := \|(s_k)\|_{\ell^1}$.

(b) K heißt <u>Hilbert-Schmidt-Operator</u>, falls $(s_k) \in \ell^2$. Man setzt $\|K\|_{HS} := \|(s_k)\|_{\ell^2}$.

3.43 Satz. *$K \in \mathcal{L}(H)$ sei kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H.*

(a) Es gilt $\|K\| \leqslant \|K\|_{HS} \leqslant \|K\|_{nuk}$.

(b) Für jede Darstellung $K = \sum_{k \geqslant 1} a_k \langle \bullet, v_k\rangle w_k$ mit $a_k \geqslant 0$, $\|v_k\| = \|w_k\| = 1$ gilt $\|K\|_{nuk} \leqslant \sum_{k \geqslant 1} a_k$.

(c) Die nuklearen Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ bilden einen Unterraum $\mathcal{N}(H)$ und $\|\bullet\|_{nuk}$ ist eine Norm auf $\mathcal{N}(H)$.

3.44 Satz. *Der nukleare Operator $K \in \mathcal{N}(H)$ besitze die Darstellung $K = \sum_{k \geqslant 1} a_k \langle \bullet, v_k\rangle w_k$ mit $\|v_k\| = \|w_k\| = 1$ und $(a_k) \in \ell^1$. Dann gilt für jede Orthonormalbasis (b_m) von H (mit absoluter Reihenkonvergenz)*

$$\sum_{k \geqslant 1} a_k \langle w_k, v_k\rangle = \sum_{m \geqslant 1} \langle K b_m, b_m\rangle.$$

3.45 Definition. Die <u>Spur</u> von $K \in \mathcal{N}(H)$ ist gegeben durch

$$\operatorname{tr}(K) := \sum_{m \geqslant 1} \langle K b_m, b_m\rangle$$

für eine beliebige Orthonormalbasis $(b_m)_{m \geqslant 1}$ von H.

3.46 Korollar. *Ist $K \in \mathcal{N}(H)$ selbstadjungiert und ist $(\mu_k)_{k \geqslant 1}$ die Folge der Eigenwerte entsprechend ihrer Multiplizität, so gilt*

$$\|K\|_{nuc} = \sum_{k \geqslant 1} |\mu_k|, \quad \operatorname{tr}(K) = \sum_{k \geqslant 1} \mu_k.$$

3.47 Lemma. *Für $K \in \mathcal{N}(H)$ gilt:*

(a) $K^* \in \mathcal{N}(H)$ *und* $\operatorname{tr}(K^*) = \overline{\operatorname{tr}(K)}$*;*

(b) *für jedes* $L \in \mathcal{L}(H)$ *sind* $KL, LK \in \mathcal{N}(H)$ *mit* $\|KL\|_{nuk} \leqslant \|K\|_{nuk}\|L\|$, $\|LK\|_{nuk} \leqslant \|L\|\|K\|_{nuk}$ *und* $\operatorname{tr}(KL) = \operatorname{tr}(LK)$.

3.48 Satz. *$K \in \mathcal{L}(H)$ sei kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H.*

(a) *Für jede Orthonormalbasis $(b_m)_{m\geqslant 1}$ von H gilt*

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{m\geqslant 1} \|Kb_m\|^2 = \sum_{m,n\geqslant 1} |\langle Kb_m, b_n\rangle|^2.$$

(b) *Die Hilbert-Schmidt-Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ bilden einen Unterraum $\mathcal{HS}(H)$ und $\|\bullet\|_{HS}$ ist eine Norm auf $\mathcal{HS}(H)$.*

(c) *Für $K_1, K_2 \in \mathcal{HS}(H)$ ist $K_2^* K_1 \in \mathcal{N}(H)$, und $\langle K_1, K_2\rangle_{HS} := \operatorname{tr}(K_2^* K_1)$ ist ein Skalarprodukt mit $\|K\|_{HS}^2 = \langle K, K\rangle_{HS}$. Für jede Orthonormalbasis $(b_m)_{m\geqslant 1}$ von H gilt $\langle K_1, K_2\rangle_{HS} = \sum_{m\geqslant 1}\langle K_1 b_m, K_2 b_m\rangle$.*

(d) *$(\mathcal{HS}(H), \langle \bullet, \bullet\rangle_{HS})$ ist ein Hilbertraum.*

3.49 Beispiel. Betrachte $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ mit $Kf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ und Singulärwerten $s_k = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}$, $k \geqslant 0$. Wegen $(s_k)_{k\geqslant 0} \in \ell^2 \setminus \ell^1$ ist K nicht nuklear, aber ein Hilbert-Schmidt-Operator mit Norm $\|K\|_{HS}^2 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2} < \infty$. Dann ist K^*K ein nuklearer Operator mit $\|K^*K\|_{nuc} = \operatorname{tr}(K^*K) = \|K\|_{HS}^2$.

3.50 Satz. *Sei $L^2(\mu) = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ separabel mit σ-endlichem Maß μ. Dann ist $L \in \mathcal{L}(L^2(\mu))$ genau dann Hilbert-Schmidt-Operator, wenn ein $k \in L^2(X \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mu)$ existiert mit*

$$Lf(t) = \int_X k(t,s) f(s) \mu(ds) \text{ für } \mu\text{-fast alle } t \in X.$$

Es gilt $\|L\|_{HS} = \|k\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}$.

3.51 Beispiel. $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ mit $Kf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ hat Hilbert-Schmidt-Norm $\|K\|_{HS}^2 = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{1}(s \leqslant t)^2 ds dt = \frac{1}{2}$. Wir schließen $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2} = \frac{1}{2}$.

3.4 Unbeschränkte Operatoren

3.52 Definition. Ein Operator A auf einem Hilbertraum H ist eine lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \to H$, wobei der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subseteq H$ ein Unterraum ist. Liegt $\mathcal{D}(A)$ dicht in H, so heißt A dicht definiert. Der Operator A ist abgeschlossen, falls für $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to x \in H$ und $Ax_n \to y \in H$ gilt $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y = Ax$.

3.53 Lemma. *Es sei A ein abgeschlossener Operator. Wird $\mathcal{D}(A)$ mit der Graphnorm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ versehen, so ist $A : \mathcal{D}(A) \to H$ ein beschränkter linearer Operator.*

3.54 Definition. Sei $\mathcal{D}(A^*) := \{y \in H \mid x \mapsto \langle Ax, y\rangle \text{ ist } \|\bullet\|\text{-stetig auf } \mathcal{D}(A)\}$. Dann ist der adjungierte Operator $A^* : \mathcal{D}(A^*) \to H$ eindeutig definiert über die Eigenschaft $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$.

3.55 Lemma. *Ist A ein dicht definierter Operator, so ist A^* abgeschlossen.*

3.56 Definition. A und B sind als Operatoren gleich (Notation $A = B$), falls $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt. Ein Operator B ist eine Erweiterung des Operators A (Notation $A \subseteq B$), falls $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt.

Ein Operator A heißt symmetrisch, falls $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(A)$ gilt. Gilt sogar $A = A^*$, so heißt A selbstadjungiert.

3.57 Lemma. *Es sei A ein dicht definierter Operator. Dann gilt:*

(a) A ist genau dann symmetrisch, wenn $A \subseteq A^*$.

(b) Ist A symmetrisch und surjektiv, so ist A selbstadjungiert und bijektiv.

3.58 Beispiele.

(a) Betrachte $H = L^2([-1,1];\mathbb{C})$ und $Ax(t) = i\bullet x'(t)$ auf $\mathcal{D}(A) = \{x \in C^1([-1,1];\mathbb{C}) \mid x(-1) = x(1) = 0\}$. Dann ist A dicht definiert und symmetrisch, aber nicht abgeschlossen. Also kann A nicht selbstadjungiert sein.

(b) Betrachte auf $H = L^2(\mathbb{R})$ den Multiplikationsoperator $M_f x(t) = f(t)x(t)$ für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(M_f) = \{x \in H \mid \int_{\mathbb{R}} f(t)^2 x(t)^2 dt < \infty\}$. M_f ist symmetrisch und im Fall $f(t) = 1 + t^2$ surjektiv, also selbstadjungiert und bijektiv. Dieser Fall entspricht im Fourierbereich dem Operator $I - \Delta$ mit $\mathcal{D}(I - \Delta) = H^2(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$.

3.59 Satz. *Es sei A ein selbstadjungierter bijektiver Operator, so dass $A^{-1} : H \to \mathcal{D}(A) \subseteq H$ kompakt ist. Dann ist A^{-1} auch selbstadjungiert und besitzt eine Spektraldarstellung*

$$A^{-1}x = \sum_k \lambda_k^{-1}\langle x, e_k\rangle e_k, \quad x \in H,$$

wobei $\lambda_k^{-1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ im Fall $\dim H = \infty$ eine Nullfolge bilden und (e_k) eine Orthonormalbasis von H bildet. Wir erhalten die Spektraldarstellung von A

$$Ax = \sum_k \lambda_k\langle x, e_k\rangle e_k, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

mit $\lambda_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die $\lim_{k\to\infty}|\lambda_k| = \infty$ im Fall $\dim(H) = \infty$ erfüllen, und mit derselben Orthonormalbasis (e_k). Der Definitionsbereich ist gegeben durch $\mathcal{D}(A) = \{x \in H \mid \sum_k \lambda_k^2\langle x, e_k\rangle^2 < \infty\}$.