



1. Übungsblatt

1. Beweisen Sie:

- (a) Für eine Zufallsvariable $\hat{\vartheta} \in L^2(\mathbb{P})$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt die *Bias-Varianz-Zerlegung*

$$\mathbb{E}[(\hat{\vartheta} - \vartheta)^2] = (\mathbb{E}[\hat{\vartheta}] - \vartheta)^2 + \text{Var}(\hat{\vartheta}).$$

- (b) Für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n und $\alpha > 0$ besitzt der Schätzer $\hat{\sigma}_\alpha^2 := \frac{\alpha}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ den mittleren quadratischen Fehler (MSE)

$$\mathbb{E}_{\mu, \sigma^2}[(\hat{\sigma}_\alpha^2 - \sigma^2)^2] = (\alpha - 1)^2 \sigma^4 + \alpha^2 \text{Var}_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_1^2).$$

- (c) Begründen Sie, weshalb $\text{Var}_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma^4 V_n$ mit einer Konstanten V_n unabhängig von μ und σ^2 gilt. Schließen Sie, dass der MSE minimal ist für $\alpha = (1 + V_n)^{-1}$. Bestimmen Sie V_n .

2. Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell sowie π eine a-priori-Verteilung auf $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$, so dass \mathbb{P}_ϑ die μ -Dichte $f^{X|T=\vartheta}$ für alle $\vartheta \in \Theta$ und π die ν -Dichte f^T besitzen bezüglich σ -endlichen Maßen μ und ν . Zeigen Sie für $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_\Theta)$ -messbare Dichten $(x, \vartheta) \mapsto f^{X|T=\vartheta}(x) \in [0, \infty)$:

- (a) Für $f^X(x) := \int_\Theta f^{X|T=\vartheta}(x) f^T(\vartheta) \nu(d\vartheta)$ in $(0, \infty)$ definiere $f^{T|X=x}(\vartheta)$ durch

$$f^{T|X=x}(\vartheta) := \frac{f^{X|T=\vartheta}(x) f^T(\vartheta)}{f^X(x)}, \quad \vartheta \in \Theta,$$

und sonst durch $f^{T|X=x}(\vartheta) := f^T(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$. Dann ist $f^{T|X=x}$ eine ν -Wahrscheinlichkeitsdichte für alle $x \in \mathcal{X}$.

- (b) Es seien X und T Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}(dx, d\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(dx) \pi(d\vartheta)$. Die Funktion $g : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_\Theta)$ -messbar. Ist g nichtnegativ oder ist $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[|g(X, T)|] < \infty$, so ist $\int_\Theta g(x, \vartheta) f^{T|X=x}(\vartheta) \nu(d\vartheta)$ eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[g(X, T)|X = x]$. Speziell ergibt sich für $A \in \mathcal{F}_\Theta$ die *a-posteriori*-Wahrscheinlichkeit:

$$\tilde{\mathbb{P}}(T \in A | X = x) := \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[\mathbf{1}(T \in A) | X = x] = \int_A f^{T|X=x}(\vartheta) \nu(d\vartheta).$$

3. Beweisen Sie für Entscheidungsregeln ρ basierend auf einem statistischen Experiment $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ mit Verlustfunktion l :
- (a) Ist ρ minimax und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Minimax-Regel die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.
 - (b) Ist ρ zulässig mit konstanter Risikofunktion, so ist ρ minimax.
 - (c) Ist ρ eine Bayesregel (bzgl. π) und eindeutig in dem Sinn, dass jede andere Bayesregel (bzgl. π) die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist ρ zulässig.
 - (d) Die Parametermenge Θ bilde einen metrischen Raum mit Borel- σ -Algebra \mathcal{F}_Θ . Ist ρ eine Bayesregel (bzgl. π), so ist ρ zulässig, falls (i) $R_\pi(\rho) < \infty$; (ii) für jede nichtleere offene Menge U in Θ gilt $\pi(U) > 0$; (iii) für jede Regel ρ' mit $R_\pi(\rho') \leq R_\pi(\rho)$ ist $\vartheta \mapsto R(\vartheta, \rho')$ stetig.
4. Es sei X_1, \dots, X_n eine mathematische $N(\vartheta, 1)$ -verteilte Stichprobe mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt. Mit $R(\vartheta, \hat{\vartheta}) = \mathbb{E}_\vartheta[(\hat{\vartheta} - \vartheta)^2]$ werde das quadratische Risiko bezeichnet.
- (a) Beweisen Sie mit dominierten Konvergenz, dass die Abbildung $\vartheta \mapsto R(\vartheta, \hat{\vartheta})$ für jeden Schätzer $\hat{\vartheta}$ mit $R(\vartheta, \hat{\vartheta}) < \infty$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ stetig ist.
 - (b) Folgern Sie mit Aufgabe 3(d), dass der Bayesschätzer

$$\hat{\vartheta}_{a,\sigma} = \frac{n\sigma^2}{1+n\sigma^2} \bar{X} + \frac{1}{1+n\sigma^2} a$$

bezüglich der a priori-Verteilung $\pi = N(a, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, zulässig ist.

Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 28.4.26.**



2. Übungsblatt

1. Es sei X_1, \dots, X_n eine $N(\mu, E_d)$ -verteilte mathematische Stichprobe. Der James-Stein-Schätzer mit positivem Gewicht ist definiert als $\hat{\mu}_{JS+} = \left(1 - \frac{d-2}{n|\bar{X}|^2}\right)_+ \bar{X}$. Beweisen Sie für alle $d \geq 3$ und $\mu \in \mathbb{R}^d$ schrittweise folgenden Risikovergleich mit dem klassischen James-Stein-Schätzer:

$$\mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS+} - \mu|^2] < \mathbb{E}_\mu[|\hat{\mu}_{JS} - \mu|^2].$$

- (a) Die Abschätzung ist korrekt für $\mu = 0$.
 (b) Die Abschätzung folgt aus der Ungleichung $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \bar{X}_i | G \mathbf{1}_{\{G \leq 0\}}] > 0$ für $G = 1 - \frac{d-2}{n|\bar{X}|^2}$ und alle $i = 1, \dots, d$ mit $\mu_i \neq 0$.
 (c) Für $a > 0$ und $\mu_i \neq 0$ gilt $\mathbb{E}_\mu[\mu_i \bar{X}_i | (\bar{X}_i)^2 = a^2] = a\mu_i \tanh(na\mu_i) > 0$. Dies ergibt die Ungleichung in (b) durch Einfügen einer auf $((\bar{X}_1)^2, \dots, (\bar{X}_d)^2)$ bedingten Erwartung.
2. Gegeben sei $X \sim N(\mu, \sigma^2 E_d)$ mit $\sigma > 0$ bekannt und $\mu \in \mathbb{R}^d$ unbekannt.

- (a) Bestimmen Sie die Bias-Varianz-Zerlegung für $\hat{\mu}_\alpha = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und zeigen Sie, dass $\alpha_{\text{Orakel}} := 1 - \frac{\sigma^2 d}{|\mu|^2 + \sigma^2 d}$ das quadratische Risiko minimiert, falls μ der wahre Parameter ist. Erklären Sie das Verhalten für $d \rightarrow \infty$ bei konstantem $|\mu|$.
 (b) Weisen Sie nach, dass $|X|^2$ ein erwartungstreuer Schätzer von $|\mu|^2 + \sigma^2 d$ ist, und setzen Sie $\hat{\alpha} := 1 - \frac{\sigma^2 d}{|X|^2}$. Schließen Sie durch Berechnen von $\text{Var}(|X|^2)$, dass für alle $\varepsilon, R > 0$ ein $K > 0$ existiert mit

$$\mathbb{P}_\mu \left(\left| \frac{|X|^2}{\sigma^2 d} - \frac{|\mu|^2 + \sigma^2 d}{\sigma^2 d} \right| \geq \frac{K}{\sqrt{d}} \right) \leq \varepsilon, \quad \forall d \geq 1 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |\mu| \leq R.$$

Folgern Sie, dass $|\hat{\alpha} - \alpha_{\text{Orakel}}| = \mathcal{O}_P(d^{-1/2})$ für $d \rightarrow \infty$ und $|\mu| \leq R$ gilt, das heißt $\forall \varepsilon, R > 0 \exists K' > 0$:

$$\mathbb{P}_\mu(|\hat{\alpha} - \alpha_{\text{Orakel}}| > K' d^{-1/2}) \leq \varepsilon, \quad \forall d \geq 1 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |\mu| \leq R.$$

3. Es sei X_1, \dots, X_n eine $N(\mu, 1)$ -verteilte mathematische Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt.
- (a) Geben Sie das zugehörige statistische Experiment auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ an und zeigen Sie, dass es vom Produktmaß $N(0, 1)^{\otimes n}$ dominiert wird.
 - (b) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion für das dominierende Maß in (a). Welcher Wert $\mu \in \mathbb{R}$ maximiert die Likelihoodfunktion zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ (dies ist der Maximum-Likelihood-Schätzer bei Beobachtung $X = x$)?
4. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, dass folgende Verteilungen Exponentialfamilien bilden. Bestimmen Sie gegebenenfalls den natürlichen Parameterraum.
- (a) Multinomialverteilung $(M(p_0, \dots, p_s; n))_{0 < p_i < 1, \sum p_i = 1}$;
 - (b) Poissonverteilung $(\text{Poiss}(\lambda))_{\lambda > 0}$;
 - (c) Gleichmäßige Verteilung $(U([0, \vartheta]))_{\vartheta > 0}$;
 - (d) Gammaverteilung $(\Gamma(a, b))_{a, b > 0}$.

Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 5.5.26.**

Vorlesung *Mathematische Statistik*
Sommersemester 2026
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Markus Reiß



3. Übungsblatt

1. Es sei X_1, \dots, X_n eine gleichmäßig auf den Rechtecken $R_{x,y} = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ verteilte mathematische Stichprobe mit $x, y \in \mathbb{R}^2$ unbekannt, die $x_1 < y_1, x_2 < y_2$ erfüllen. Bestimmen Sie eine suffiziente Statistik $T(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^4$ und beschreiben Sie diese auch geometrisch.
Zusatzaufgabe: Können Sie den Flächeninhalt von $R_{x,y}$ erwartungstreu schätzen?
2. Ein Physiker untersucht die Radioaktivität bei zwei verschiedenen Präparaten. Die unabhängig gemessene Zahl der Zerfälle in einer Zeiteinheit bei Präparat 1 sei X_1, \dots, X_{m_1} (m_1 Messungen), bei Präparat 2 Y_1, \dots, Y_{m_2} (m_2 Messungen). Geben Sie eine vernünftige Regel an, um zu entscheiden, welches Präparat stärker radioaktiv ist. Begründen Sie dazu, weshalb die Annahme einer Poissonverteilung gerechtfertigt ist, und geben Sie ein Suffizienzargument.

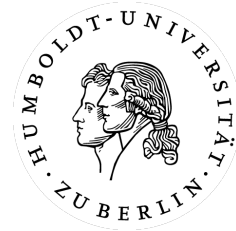
Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 12.5.26.**



4. Übungsblatt

1. Es sei (X_1, \dots, X_n) eine $\text{Poiss}(\lambda)$ -verteilte mathematische Stichprobe mit $\lambda > 0$ unbekannt.
 - (a) Zeigen Sie, dass das Stichprobenmittel \bar{X} eine suffiziente Statistik ist.
 - (b) Finden Sie mittels des Satzes von Rao-Blackwell einen erwartungstreuen Schätzer von λ , der kleinere Varianz als $\hat{\lambda}_1 = X_1$ besitzt.
 - (c) Finden Sie mittels des Satzes von Rao-Blackwell einen erwartungstreuen Schätzer von $\vartheta = e^{-\lambda}$, der kleinere Varianz als $\hat{\vartheta}_1 = \mathbf{1}(X_1 = 0)$ besitzt.
2. Eine suffiziente Statistik T^* heißt *minimalsuffizient*, wenn es zu jeder suffizienten Statistik T eine messbare Funktion h gibt, so dass $T^* = h(T)$ \mathbb{P}_ϑ -f.s. für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt. Beweisen Sie, dass jede \mathbb{R}^d -wertige, suffiziente und vollständige Statistik minimal suffizient ist, sofern eine minimal suffiziente Statistik überhaupt existiert. Gilt die Umkehrung für \mathbb{R}^d -wertige Statistiken?
Hinweis: Man kann zeigen, dass minimal suffiziente Statistiken für dominierte Experimente auf separablen Messräumen (wie $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$) stets existieren.

Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 19.5.26.**



5. Übungsblatt

1. Erklären Sie im Detail den Beweis der Cramér-Rao-Ungleichung unter „klassischen Bedingungen“ in Theorem 3.3 von J. Shao, *Mathematical Statistics*. Wieso muss dort eine Bedingung (3.3) an den Schätzer gestellt werden und bei uns nicht?
2. Zeigen Sie rigoros, dass die *score*-Funktion und die Fisher-Information bei Hellinger-differenzierbaren Modellen unabhängig vom dominierenden Maß μ sind.
3. Betrachten Sie für eine Lebesgue-dichte $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ das *Lokationsmodell* einer mathematischen Stichprobe X_1, \dots, X_n , die gemäß $f(\bullet - \vartheta)$ mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt verteilt ist. Zeigen Sie, dass diese Verteilungsfamilie $L^2(\mathbb{P}_{\vartheta_0})$ -differenzierbar ist mit Ableitung

$$\dot{L}_{\vartheta_0}(\vartheta, x) = \sum_{i=1}^n \frac{-f'(x_i - \vartheta)}{f(x_i - \vartheta)} L_{\vartheta_0}(\vartheta, x),$$

wenn $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f > 0$ und $\int \sup_{|h| \leq \varepsilon} \frac{f'(x+h)^2 + f(x+h)^2}{f(x)} dx < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Bestimmen Sie die Fisher-Information $I_n(\vartheta)$.

Können Sie die Bedingungen so abschwächen, dass auch die $L^2(\mathbb{P}_{\vartheta_0})$ -Differenzierbarkeit im Fall der Laplace-Verteilung $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ folgt?

4. Bestimmen Sie die Fisher-Informationsmatrix für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Finden Sie einen erwartungstreuen Schätzer für μ , der die Cramér-Rao-Schranke erreicht. Bestimmen Sie einen erwartungstreuen Schätzer für σ^2 bei $n \geq 2$ Beobachtungen, der zumindest asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ die Cramér-Rao-Schranke erreicht (bei Reskalierung in n).



6. Übungsblatt

1. Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, das die Voraussetzungen an die Cramér-Rao-Ungleichung erfüllt mit strikt positiv-definiter Fisher-Informationsmatrix $I(\vartheta)$.
 - (a) Zeigen Sie, dass stets $(I(\vartheta))_{11}(I(\vartheta)^{-1})_{11} \geq 1$ gilt.
Tipp: Schreiben Sie den ersten Einheitsvektor $e_1 = \sum_i \langle e_1, v_i \rangle v_i$ in einer Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_k) von Eigenvektoren von $I(\vartheta)$.
 - (b) Schließen Sie, dass die Cramér-Rao-Schranke für $g(\vartheta) = g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \vartheta_1$ stets mindestens $1/(I(\vartheta))_{11}$ beträgt. In welchen Fällen gilt Gleichheit?
 - (c) Interpretieren Sie dieses Ergebnis statistisch, indem Sie mit dem Modell vergleichen, wo nur ϑ_1 unbekannt ist, während $\vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ bekannt sind.
2. Es sei $(X, Y)^\top$ bivariat normalverteilt mit $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2$ und $\text{Cov}(X, Y) = \sigma^2 \rho$, wobei $\vartheta = (\sigma^2, \rho) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 1)$ der unbekannte Parameter ist.
 - (a) Weisen Sie nach, dass für $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ gilt $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$ und $\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = (1 + \rho^2)\sigma^4$.
 - (b) Nehmen Sie nun an, dass ρ bekannt ist, und konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\sigma}_\rho^2$ mit $\text{Var}(\tilde{\sigma}_\rho^2) = \sigma^4 < \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ im Fall $\rho \neq 0$.
Tipps: Diagonalisieren Sie die Kovarianzmatrix Σ von $(X, Y)^\top$ und betrachten Sie die Beobachtung in der Eigenbasis von Σ ('whitening', 'decorrelation'). Alternativ bestimmen Sie direkt einen Maximum-Likelihood-Schätzer.
 - (c) Weisen Sie nach, dass die Varianz von $\tilde{\sigma}_\rho^2$ die Cramér-Rao-Schranke bei bekanntem ρ erreicht.
 - (d*) Bestimmen Sie die Cramér-Rao-Schranke für σ^2 im Fall von unbekanntem ρ (Computer-Einsatz bei Angabe von Zwischenergebnissen gestattet).
3. Zeigen Sie, dass im Lokationsmodell mit Produktdichte $f(x) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i)$ der Pitman-Schätzer $\hat{\vartheta}$ für die angegebenen Dichten folgende Form besitzt:
 - (a) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\hat{\vartheta} = \bar{X}$;
 - (b) $f_1(x) = a^{-1} \mathbf{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)$ für $a > 0$, $\hat{\vartheta} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$;
 - (c) $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda(x+1)} \mathbf{1}_{[-1, \infty)}(x)$ für $\lambda > 0$, $\hat{\vartheta} = X_{(1)} + 1 - \frac{1}{n\lambda}$.

4. Im *Skalenmodell* besitzt $X := (X_1, \dots, X_n)$ die Dichte $\sigma^{-n} f(\frac{x_1}{\sigma}, \dots, \frac{x_n}{\sigma})$ für eine bekannte Dichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ und $\sigma > 0$ unbekannt. $\hat{\sigma}^2$ ist ein (unter Multiplikation) äquivarianter Schätzer, wenn $\hat{\sigma}^2(rX) = r^2 \hat{\sigma}^2(X)$ für alle $r > 0$ gilt. Betrachte den Verlust $\ell(\sigma^2, \hat{\sigma}^2) = (\frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sigma^2})^2$, der $\ell(r^2 \sigma^2, r^2 \hat{\sigma}^2) = \ell(\sigma^2, \hat{\sigma}^2)$ (Invarianz) erfüllt. Beweisen Sie, dass bezüglich ℓ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\int_0^\infty r^{n+1} f(rX_1, \dots, rX_n) dr}{\int_0^\infty r^{n+3} f(rX_1, \dots, rX_n) dr}$$

bester äquivarianter Schätzer im Skalenmodell ist.

Hinweis: Folge dem Beweis im Lokationsmodell. Im Fall einer $N(0, \sigma^2)$ -verteilten Stichprobe ergibt sich übrigens $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n X_i^2$, im Gegensatz zum UMVU-Schätzer $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ (Example 4.14 in *Shao*).

Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 2.6.26.**



7. Übungsblatt

1. Betrachten Sie die Momentenschätzer $\hat{\lambda}_{k,n}$ im Exponentialmodell basierend auf der Momentenfunktion $\psi(x) = x^k$ aus der Vorlesung. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung des Schätzfehlers $\hat{\lambda}_{k,n} - \lambda$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Für welchen Wert von k ist die asymptotische Varianz minimal?
2. Belesen Sie sich zur *Anscombe-Transformation* für Poisson-Daten, z.B. bei Wikipedia. Beschreiben Sie kurz ihre Zielsetzung und erklären Sie, inwiefern es sich um eine Varianz-stabilisierende Transformation im Rahmen der Δ -Methode handelt.
3. Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell mit Likelihoodfunktion $L(\vartheta)$ und MLE $\hat{\vartheta}$ sowie $g: \Theta \rightarrow \Theta'$ eine injektive Funktion.
 - (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\vartheta}' := g(\hat{\vartheta})$ MLE ist für das reparametrisierte Modell mit Verteilungen $(\mathbb{P}_{g^{-1}(\vartheta')})_{\vartheta' \in g(\Theta)}$ (*Plug-in-Prinzip*)
 - (b) Betrachten Sie nun $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, (N(\mu, 1)^{\otimes n})_{\mu \in \mathbb{R}})$ mit MLE $\hat{\mu}_n = \bar{X}$. Zeigen Sie für $g(\mu) = \mu^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, dass $\widehat{\mu^{2k+1}} = (\hat{\mu}_n)^{2k+1}$ MLE, aber nicht erwartungstreu ist. Finden Sie durch Biaskorrektur von $\widehat{\mu^3}$ einen erwartungstreuen Schätzer $\widetilde{\mu^3}$ von μ^3 , der einen kleineren quadratischen Fehler als $\widehat{\mu^3}$ besitzt und UMVU ist. Vergleichen Sie asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ die quadratischen Fehler von $\widehat{\mu^3}$, $\widetilde{\mu^3}$ und die entsprechende Cramér-Rao-Schranke.
4. Ein Teich enthält eine unbekannte Anzahl ϑ von Karpfen. Zur Schätzung von ϑ werden zunächst w Fische gefangen, markiert und wieder freigelassen. Wenn sich die markierten Fische wieder gut verteilt haben, werden n Fische gefangen, von denen x markiert sind.
Modellieren Sie die Schätzung des Fischbestandes ϑ durch ein statistisches Experiment mit hypergeometrischen Verteilungen und bestimmen Sie einen MLE, diskutieren Sie dabei den Fall $x = 0$ separat.



8. Übungsblatt

1. Beweise: die Bedingungen (A1), (A2) zur Konsistenz des M-Schätzers $\hat{\gamma}_n$ unter $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ können ersetzt werden durch die eine Bedingung (d sei Metrik von Γ)

$$(A1') : \forall \varepsilon > 0 \quad \inf_{d(\gamma, g(\vartheta_0)) \geq \varepsilon} K(\vartheta_0, \gamma) > K(\vartheta_0, g(\vartheta_0)).$$

Anleitung: Weise $|K(\vartheta_0, \hat{\gamma}_n) - K(\vartheta_0, g(\vartheta_0))| \leq 2 \sup_{\gamma \in \Gamma} |K_n(\gamma) - K(\vartheta_0, \gamma)|$ nach, betrachte $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(d(\hat{\gamma}_n, g(\vartheta_0)) > \varepsilon)$ und verwende (A3).

2. Es sei X_1, \dots, X_n eine $N(\vartheta, 1)$ -verteilte Stichprobe mit $\vartheta \in [0, 1]$ unbekannt.
- Bestimmen Sie den MLE $\hat{\vartheta}_n$.
 - Weisen Sie für $\vartheta_0 \in (0, 1)$ die Bedingungen des Satzes zur MLE-Asymptotik nach und folgern Sie $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \xrightarrow{d} N(0, 1)$ für $n \rightarrow \infty$ unter $N(\vartheta_0, 1)^{\otimes n}$.
 - Untersuchen Sie die Asymptotik von $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)$ im Fall $\vartheta_0 \in \{0, 1\}$.

3. *Supereffizienz*. Für eine $N(\vartheta, 1)$ -verteilte Stichprobe X_1, \dots, X_n sei

$$\hat{\vartheta}_n := \begin{cases} \bar{X}, & \text{falls } |\bar{X}| > n^{-1/4} \\ a\bar{X}, & \text{falls } |\bar{X}| \leq n^{-1/4} \end{cases}$$

der sogenannte *Hodges-Schätzer* mit $|a| < 1$ deterministisch. Zeigen Sie

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{d} N(0, v(\vartheta))$$

unter \mathbb{P}_{ϑ} mit $v(\vartheta) = 1$ für $\vartheta \neq 0$ und $v(0) = a^2 < 1$, während die Fisher-Information bei einer Beobachtung $I(\vartheta) = 1$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ beträgt.

4. Sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe bezüglich der Lebesgue-dichte

$$f_{\vartheta}(x) = \frac{1 - \vartheta}{\varphi(\vartheta)} \left(1 - \frac{|x - \vartheta|}{\varphi(\vartheta)}\right)_+ + \frac{\vartheta}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\vartheta \in [0, 1]$ und $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, fallende Funktion mit $\varphi(0) = 1$ und $0 < \varphi(\vartheta) \leq 1 - \vartheta$ für $\vartheta \in (0, 1)$ ist. Setze weiterhin $f_1(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Ziel ist es, für geeignetes φ zu sehen, dass für alle $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$ jeder MLE fast sicher gegen Eins konvergiert und insbesondere inkonsistent ist. Zeigen Sie:

- (a) Es existiert ein Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$.
- (b) Für $\vartheta < 1$ ist $f_{\vartheta}(x) < 1/\varphi(\vartheta) + 1/2$ und daraus folgt, dass für die Loglikelihoodfunktion ℓ_n bei n Beobachtungen und für jedes $\alpha < 1$

$$\max_{0 \leq \vartheta \leq \alpha} \frac{\ell_n(\vartheta)}{n} \leq \log \left(\frac{1}{\varphi(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) < \infty$$

gilt. Um zu beweisen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_n = 1$ f.s. für alle $\vartheta \in [0, 1]$, reicht es $\max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \ell_n(\vartheta)/n \rightarrow \infty$ f.s. zu zeigen.

- (c) Mit $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ gilt f.s.

$$\max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \frac{\ell_n(\vartheta)}{n} \geq \frac{n-1}{n} \log \left(\frac{X_{(n)}}{2} \right) + \frac{1}{n} \log \left(\frac{1 - X_{(n)}}{\varphi(X_{(n)})} \right).$$

- (d) Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt $n^{1/4}(1 - X_{(n)}) \rightarrow 0$ f.s. für $\vartheta = 0$ und auch für alle $\vartheta \in [0, 1]$. Mit $\varphi(\vartheta) := (1 - \vartheta) \exp(-(1 - \vartheta)^{-4} + 1)$ folgt $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log((1 - X_{(n)})/\varphi(X_{(n)})) = \infty$ f.s. und damit die gewünschte Aussage.

Abgabe vor der Vorlesung am **Dienstag, dem 16.6.26.**