Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 1

1. Beweisen Sie:

   (a) Ein Unterraum eines Banachraums bildet genau dann selbst einen Banachraum, wenn er abgeschlossen ist.

   (b) Jeder Unterraum von endlicher Dimension ist abgeschlossen und bildet damit einen Banachraum.

2. Es sei U ein Unterraum des normierten Raums X. Zeigen Sie:

   (a) Der Abschluss $\bar{U}$ von U in X bildet ebenfalls einen Unterraum von X.

   (b) Ist $d = \{a \in \ell^\infty \,|\, a_n \neq 0$ für nur endlich viele $n\}$ der Raum der abbrechenden Folgen, so gilt $\bar{d} = c_0$ in ℓ^∞ mit $c_0 = \{a \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

   (c) Die Vervollständigung von $(d, \|\bullet\|_\infty)$ ist $(c_0, \|\bullet\|_\infty)$, bis auf isometrische Isomorphie. Was ist die Vervollständigung von $(d, \|\bullet\|_{\ell^p})$ für $1 \leqslant p < \infty$?

Abgabe der Lösungen (zu zweit, nach Aufgaben getrennt) **vor** der Vorlesung am Freitag 28.10.22.
Korrektor: Laurenz Upmeier zu Belzen
(`upmeibel` mit der Domain `mathematik.hu-berlin.de`)

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 2

1. Beweisen Sie das Rieszsche Lemma: Sei $U \subsetneq X$ ein abgeschlossener echter Unterraum eines normierten Raums X und $\delta \in (0,1)$. Dann existiert $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und $\inf_{u\in U}\|x_\delta - u\| \geqslant 1-\delta$. Anleitung:

   (a) Es gibt $x \in X$ mit $d := \inf_{u\in U}\|x-u\| > 0$.

   (b) Wähle $u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < d/(1-\delta)$. Dann leistet $x_\delta := \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|}$ das Gewünschte (formaler Beweis und Skizze!).

2. Zeigen Sie folgende wichtige Äquivalenz für einen normierten Raum X und seine Einheitskugel $B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$:

$$\dim X < \infty \iff B_X \text{ ist kompakt.}$$

   Anleitung:

   (a) Für '$\Rightarrow$' zeige, dass X isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$ ist.

   (b) Für '$\Leftarrow$' betrachte die Kontraposition und konstruiere für $\dim X = \infty$ mit dem Rieszschen Lemma induktiv eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geqslant 1/2$ für alle $m,n \geqslant 1$.

   Geben sie ein konkretes Beispiel einer Funktionenfolge in $B_{C([0,1])}$ an, die keine konvergente Teilfolge (bzgl. $\|\bullet\|_\infty$) besitzt.

3. Beweisen Sie für Hilberträume H:

   (a) Für jede Teilmenge $M \subseteq H$ gilt $M^\perp = \operatorname{span}(M)^\perp = \overline{\operatorname{span}(M)}^\perp$.

   (b) Ein Unterraum $U \subseteq H$ liegt genau dann dicht, wenn $U^\perp = \{0\}$ gilt.

   Entscheiden Sie, ob folgende Unterräume dicht in $L^2([0,1])$ liegen:

$$U_1 = \{f \in L^2([0,1]) \mid \textstyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0\}, \quad U_2 = L^\infty([0,1]).$$

4. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für ein Orthonormalsystem S im Hilbertraum H äquivalent sind:

   (a) S bildet eine Orthonormalbasis;

   (b) $x = \sum_{e\in S}\langle x,e\rangle e$ für alle $x \in H$;

   (c) $\|x\|^2 = \sum_{e\in S}|\langle x,e\rangle|^2$ für alle $x \in H$ (Parseval-Identität);

   (d) $S^\perp = \{0\}$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 4.11.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 3

1. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums (T, d) ist *total beschränkt*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein ε-*Netz* existiert, das heißt endlich viele Elemente $m_1, \dots, m_n \in M$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(m_i)$ (mit den offenen Kugeln $B_r(x) = \{t \in T \mid d(t, x) < r\}$). Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) M ist kompakt;

   (b) M ist vollständig und total beschränkt.

   Hinweis: Sie dürfen die Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit benutzen.

2. Zeigen Sie für $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$:

   (a) $(C_0(\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist Banachraum. *Tipp:* $C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_b(\mathbb{R})$.

   (b) Es sei $M \subseteq C_0(\mathbb{R})$ beschränkt, $\{f|_{[-R,R]} \mid f \in M\}$ sei gleichgradig stetig auf $[-R, R]$ für jedes $R > 0$ und es gelte

   $$\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in M} \sup_{|x|>R} |f(x)| = 0.$$

   Dann ist M präkompakt in $(C_0(\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$.
   Tipp: Verallgemeinere den Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli, z.B. aus den Büchern von D. Werner oder T. Bühler und D. Salamon.

   (c) *Freiwillig:* Die Bedingungen in (b) sind auch notwendig für die Präkompaktheit von M.

3. Zeigen Sie für die Sobolevräume $W^{1,p}([a, b])$, dass die $W^{1,p}$-Einheitskugeln $\{f \in W^{1,p}([a, b]) \, \|f\|_{1,p} \leqslant 1\}$ präkompakt in $L^p([a, b])$ sind für $1 \leqslant p < \infty$.

4. Weisen Sie nach, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ nicht separabel ist, indem Sie die überabzählbare Teilmenge $\{(\mathbf{1}_M(n))_{n\geqslant 1} \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$ betrachten mit Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_M$. Beweisen Sie mit einer ähnlichen Idee, dass auch $L^\infty([0, 1])$ nicht separabel ist.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 11.11.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 4

1. Es seien (K_1, d_1), (K_2, d_2) kompakte metrische Räume. Betrachten Sie den Produktraum $K_1 \times K_2$ mit Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \quad x_1, y_1 \in K_1,\ x_2, y_2 \in K_2,$$

und das Tensorprodukt $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$ von Funktionen f_1, f_2. Zeigen Sie, dass der Unterraum

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i,1} \otimes f_{i,2} \,\Big|\, n \in \mathbb{N},\ f_{i,1} \in C(K_1), f_{i,2} \in C(K_2) \Big\}$$

dicht in $(C(K_1 \times K_2), \|\bullet\|_\infty)$ liegt.
Hinweis: Man schreibt kurz $C(K_1) \otimes C(K_2) = C(K_1 \times K_2)$ (bis auf Isometrie), wobei $C(K_1) \otimes C(K_2)$ als Vervollständigung der endlichen Summen von Tensorprodukten verstanden wird.

2. Betrachten Sie $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ sowie eine Funktion $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} K(x) dx = 1$. Setze $K_h(x) = h^{-d} K(x/h)$ für $h > 0$.

   (a) Beweisen Sie, dass für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ die *Faltung*

$$f * K_h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

   wohldefiniert ist und $f * K_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt.

   (b) Weisen Sie $\lim_{h\to 0} f * K_h = f$ für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ nach und zwar sowohl punktweise für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ als auch in $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. Schließen Sie, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ liegt.

   (c) Gilt auch $K_h * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{h\to 0} K_h * f = f$ in L^p-Konvergenz für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$?

3. Beweisen Sie, dass jede lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to X$ in einen beliebigen normierten Raum X stetig ist (bezüglich beliebiger Norm auf $\mathbb{K}^n$ bzw. X).

4. Beweisen Sie Ulams Lemma: Jedes endliche Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ eines vollständigen und separablen metrischen Raums T ist *regulär* in dem Sinne, dass für alle $B \in \mathfrak{B}_T$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt, } K \subseteq B\} = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ offen, } B \subseteq O\}.$$

Anleitung: Sei $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}_T$ die Familie aller B, die die beiden Gleichungen erfüllen.

(a) $T \in \mathfrak{D}$: sei $B_r(x) = \{y \in T \mid d(y,x) \leqslant r\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $K = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_j)$ mit einer in T dichten Folge $(x_j)_{j\geqslant 1}$ und k_n so groß, dass $\mu(T \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_j)) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$, kompakt mit $\mu(T \setminus K) \leqslant \varepsilon$.

(b) $F \in \mathfrak{D}$ für alle F abgeschlossen: betrachte einerseits die kompakten Mengen $F \cap K$ mit K aus (a), finde andererseits offene Mengen $O_n \supseteq F$ mit $\bigcap_n O_n = F$ und benutze σ-Stetigkeit von μ.

(c) $B \in \mathfrak{D} \Rightarrow T \setminus B \in \mathfrak{D}$: argumentiere mittels Komplementen unter Zuhilfenahme der kompakten Mengen K aus (a).

(d) $B_n \in \mathfrak{D}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathfrak{D}$: benutze $\mu(\bigcup_{n\geqslant 1} B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{N} B_n)$.

(e) $\mathfrak{D}$ ist $\cap$-stabil und somit eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, so dass $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_T$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 18.11.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 5

1. Für $k \in L^2([0,1]^2)$ setze $I_k f(t) := \int_0^1 k(t,s)f(s)ds,\ f \in L^2([0,1]),\ t \in [0,1]$. Zeigen Sie:
   (a) $I_k \in \mathcal{L}(L^2([0,1]), L^2([0,1]))$ mit $\|I_k\| \leqslant \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$.
   (b) Finden sie einen Kern k, wo $\|I_k\| < \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$ gilt.
   (c) I_k ist ein kompakter Operator: $I_k(B_1(0))$ ist präkompakt in $L^2([0,1])$ mit $B_1(0) := \{f \in L^2([0,1]) \mid \|f\|_{L^2} \leqslant 1\}$.

2. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definiere die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$, $u \in \mathbb{R}^d$.
   (a) Zeigen sie, dass $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt mit $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.
   (b) Schließen Sie, dass $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ ein stetiger linearer Operator ist mit Norm $\|\mathcal{F}\| := \sup_{\|f\|_{L^1}=1} \|\mathcal{F}f\|_\infty = 1$.
   (c) Zeigen Sie für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit partieller Integration, dass $\mathcal{F}(f')(u) = -iu\mathcal{F}f(u)$ gilt. Schließen Sie zunächst für diese f, dass sogar $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$ gilt, und folgern Sie dies dann für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Es seien $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben und für $g \in L^q(\mu)$ setze
$$\ell_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K} \text{ mit } \ell_g(f) := \int f(x)g(x)\mu(dx).$$
   Weisen Sie nach:
   (a) ℓ_g ist wohldefiniert, linear und stetig mit $\|\ell_g\|_{L^p(\mu)\to\mathbb{K}} \leqslant \|g\|_{L^q(\mu)}$.
   (b) Für $1 < p \leqslant \infty$ (also $1 \leqslant q < \infty$) gilt sogar $\|\ell_g\|_{L^p(\mu)\to\mathbb{K}} = \|g\|_{L^q(\mu)}$.
   (c) $\|\ell_g\|_{L^p(\mu)\to\mathbb{K}} = \|g\|_{L^q(\mu)}$ gilt auch im Fall $p = 1$, $q = \infty$ für σ-endliche Maße μ.
   Tipp: Für $g \in L^\infty(\mu)$, $g \neq 0$, und $\alpha \in (0, \|g\|_\infty)$ gibt es ein Ereignis $A \subseteq \{|g| \geqslant \alpha\}$ mit $\mu(A) \in (0,\infty)$.

4. Betrachten Sie für einen Messraum $(X, \mathcal{F})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$M(\mathcal{F}) := \{\mu_+ - \mu_- \mid \mu_+, \mu_- \text{ endliche Maße auf } \mathcal{F}\}$$

der *endlichen signierten Maße*. Beweisen Sie:

(a) Für $\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(\mathcal{F})$ gilt $\mu_+, \mu_- \ll (\mu_+ + \mu_-)$ und es gibt $f \in L^1(\mu_+ + \mu_-)$ mit $\mu(A) = \int_A f d(\mu_+ + \mu_-)$, $A \in \mathcal{F}$.

(b) Setzt man $\bar{\mu}_\pm(A) := \int_A \max(\pm f(x), 0)(\mu_+ + \mu_-)(dx)$ für $A \in \mathcal{F}$ in (i), so gilt $\mu = \bar{\mu}_+ - \bar{\mu}_-$ und $\bar{\mu}_+ \perp \bar{\mu}_-$ (*Hahn-Jordan-Zerlegung*). Die Maße $\bar{\mu}_+, \bar{\mu}_-$ sind dadurch eindeutig festgelegt.

(c) $\|\mu\|_{TV} := \bar{\mu}_+(X) + \bar{\mu}_-(X)$, $\mu \in M(\mathcal{F})$, definiert eine Norm auf $M(\mathcal{F})$.

Hinweis: $(M(\mathcal{F}), \|\bullet\|_{TV})$ ist sogar ein Banachraum.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 25.11.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 6

1. Weisen Sie nach, dass $\varphi : \ell^1 \to (c_0)'$ mit $\varphi(a)(b) = \sum_n a_n b_n$, $a \in \ell^1$, $b \in c_0$, ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ein *Banach-Limes* ist ein lineares Funktional $\ell : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

   (i) für jedes $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ gilt $\ell(x) = \ell(Tx)$ für den Shift-Operator $T(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$.

   (ii) $\ell(x) \geqslant 0$ falls $x_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

   (iii) $\ell(\mathbf{1}) = 1$ für die konstante Folge $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$.

   (a) Folgern Sie aus diesen Eigenschaften:

   (iv) $\ell \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ und $\|\ell\| = 1$;

   (v) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \ell(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, insbesondere setzt ℓ den Grenzwert konvergenter Folgen auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ fort;

   (vi) ℓ ist *nicht multiplikativ*: $\exists\, x, y \in \ell^\infty(\mathbb{N}) :\ \ell(x \bullet y) \neq \ell(x)\ell(y)$.

   (b) Beweisen Sie die Existenz eines Banach-Limes mit dem Satz von Hahn-Banach.
   Mögliche Konstruktion: Zeigen Sie, dass $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ sublinear auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist und für konvergente Folgen x mit dem linearen Funktional $\lim_{n\to\infty} x_n$ übereinstimmt.

   Tipp: Lesen Sie Terence Taos Blog `terrytao.wordpress.com/tag/banach-limit` zum Banach-Limes.

3. Schließen Sie aus der Fortsetzungsversion des Satzes von Hahn-Banach, dass für jedes $x \neq 0$ in einem normierten Raum X ein Funktional $\ell \in X'$ existiert mit $\|\ell\| = 1$ und $\ell(x) = \|x\|$. Zeigen Sie damit

$$\forall x \in X :\ \|x\| = \sup_{\ell \in X', \|\ell\|=1} |\ell(x)|.$$

4. Beweisen Sie, dass ein normierter Raum X separabel ist, wenn sein Dualraum X' separabel ist. Anleitung:

   (a) Wähle eine dichte Folge $(\ell_i)_{i\geqslant 1}$ in $\{\ell \in X' \mid \|\ell\| = 1\}$. Dann existieren $x_i \in X$ mit $\|x_i\| = 1$ und $|\ell_i(x_i)| \geqslant 1/2$.

   (b) Setze $U = \operatorname{span}\{x_i \mid i \geqslant 1\}$. Aus $\ell|_U = 0$ für ein $\ell \in X'$ folgt bereits $\ell = 0$.

   (c) Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass U dicht in X liegen muss. Damit gibt es auch eine abzählbare dichte Teilmenge von X.

   Gilt auch die Umkehrung X separabel $\Rightarrow$ X' separabel?

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 2.12.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 7

1. Mit $X'' = (X')'$ wird der Bidualraum eines normierten Raums X bezeichnet.
   (a) Zeigen Sie, dass $\iota : X \to X''$ mit $\iota(x)(\ell) := \ell(x)$, $x \in X$, $\ell \in X'$, eine wohldefinierte lineare und stetige Abbildung ist mit $\|\iota(x)\|_{X''} \leqslant \|x\|_X$.
   (b) Schließen Sie, dass ι sogar eine Isometrie ist. X'' enthält also eine isometrische Kopie von X und $(\overline{\iota(X)}, \|\bullet\|_{X''})$ ist eine Vervollständigung des normierten Raums X.

2. Für eine Teilmenge U eines normierten Raums X definiere den *Annihilator* $U^\perp := \{\ell \in X' \mid \ell|_U = 0\} \subseteq X'$.
   (a) Weisen Sie nach, dass $U^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X' ist.
   (b) Zeigen Sie $U' \cong X'/U^\perp$ (isometrisch isomorph) für jeden Unterraum U von X, wobei der Quotientenraum $X'/U^\perp$ mit der Norm $\|\ell + U^\perp\|_{X'/U^\perp} := \inf\{\|\ell + u^\perp\| \mid u^\perp \in U^\perp\}$ versehen sei.

3. Für $L \in L(X, Y)$ bezeichnet $L' \in L(Y', X')$ mit $(L'y')(x) := y'(Lx)$, $y' \in Y', x \in X$, den *adjungierten Operator*. Setze $\operatorname{ran} L = \{Lx \mid x \in X\}$, $(\ker L')_\perp = \{y \in Y \mid y'(y) = 0 \text{ für alle } y' \in \ker L'\}$.
   (a) Überprüfen Sie, dass in der Tat $L' \in L(Y', X')$ gilt.
   (b) Beweisen Sie $\overline{\operatorname{ran} L} = (\ker L')_\perp$ (Tipp: für $'\supseteq'$ verwende Hahn-Banach).

4. Beweisen Sie, dass in $C([0, 1])$ die stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen dicht liegen. Anleitung:
   (a) Die Mengen $O_n := \{f \in C([0, 1]) \mid \forall\, t \in [0, 1] : \sup_{0<|h|\leqslant 1/n} |\frac{f(t+h)-f(t)}{h}| > n\}$ (setze f außerhalb von $[0, 1]$ konstant fort) sind offen.
   (b) Jede Menge O_n liegt dicht in $C([0, 1])$ (Tipp: betrachte Summen von Polynomen und geeigneten *Sägezahnfunktionen*)
   (c) Nach dem Baireschen Kategoriensatz liegt $D := \bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ dicht in $C([0, 1])$ und jedes $f \in D$ ist nirgendwo differenzierbar.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 9.12.22.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 8

1. Es seien X und Y Banachräume sowie $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear und partiell stetig ($y \mapsto B(x,y)$, $x \mapsto B(x,y)$ stets stetig). Beweisen Sie mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass dann bereits B stetig ist.

2. Die lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen Banachräumen X, Y sei *abgeschlossen*, das heißt aus $x_n \to x$ in X und $Lx_n \to y$ in Y folgt bereits $y = Lx$. Beweisen Sie:

   (a) X versehen mit der Norm $\|x\|_L := \|x\|_X + \|Lx\|_Y$ ist ein Banachraum.
   (b) Die Normen $\|\bullet\|_X$ und $\|\bullet\|_L$ sind äquivalent auf X.
   (c) L ist stetig.

3. Betrachten Sie die Folgen $e^{(m)} \in \ell^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit $e_n^{(m)} = \mathbf{1}(n = m)$. Zeigen Sie:

   (a) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ ist beschränkt, aber nicht norm-konvergent in ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
   (b) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ ist schwach*-konvergent in ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, und schwach-konvergent in ℓ^p, $1 < p \leqslant \infty$.
   (c) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ besitzt keine schwach-konvergente Teilfolge in ℓ^1.
   Ausblick (Lemma von Schur): In ℓ^1 sind schwach-konvergente Folgen bereits norm-konvergent.

4. Es sei $(X, \|\bullet\|)$ ein *lokal gleichmäßig konvexer* normierter Raum, das heißt aus $\|x_n\| = 1$, $\|x\| = 1$ und $\|\frac{x_n+x}{2}\| \to 1$ folgt $x_n \to x$.

   (a) Zeigen Sie, dass ein Hilbertraum lokal gleichmäßig konvex ist. Recherchieren Sie die Clarkson-Ungleichung und folgern Sie, dass auch $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, lokal gleichmäßig konvex ist. Geben Sie ein Beispiel eines nicht lokal gleichmäßig konvexen normierten Raums an.
   (b) Schließen Sie aus der schwachen Konvergenz $x_n \xrightarrow{w} x$ für eine Folge (x_n) in X mit $\|x_n\| = \|x\| = 1$ für alle n, dass Normkonvergenz $x_n \to x$ folgt.
   Anleitung: Sonst gilt $\liminf_{n\to\infty} \|\frac{x_n+x}{2}\| < 1$ und ein geeignetes $\ell \in X'$ mit $\|\ell\| = \ell(x) = 1$ liefert den Widerspruch.
   (c) Beweisen Sie nun für eine beliebige Folge (y_n) in X die Äquivalenz:
   $y_n \xrightarrow{w} y$ und $\|y_n\| \to \|y\| \iff y_n \to y$.
   Tipp: Für $y \neq 0$ betrachte $x_n = y_n/\|y_n\|$, $x = y/\|y\|$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 16.12.22.
Frohe Weihnachten und ein ebenso gesundes wie erfolgreiches neues Jahr 2023!

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 9

1. Beweisen Sie: Ist $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so ist der Faltungsoperator $K : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ mit
$$Kf(x) = (f * k)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)k(y)dy$$
für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ wohldefiniert und stetig mit $\|K\| \leqslant \|k\|_{L^1}$.

2. Zeigen Sie für den Faltungsoperator K aus Aufgabe 2:
   (a) Es gilt $K = \mathcal{F}^{-1} M_{\mathcal{F}k} \mathcal{F}$ mit der L^2-Fouriertransformation $\mathcal{F}$ und dem Multiplikationsoperator $M_{\mathcal{F}k} g := (\mathcal{F}k)g$ für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
   (b) Es gilt $\sigma(K) = \sigma(M_{\mathcal{F}k})$ und $\sigma_p(K) = \sigma_p(M_{\mathcal{F}k})$.
   (c) Bestimmen Sie für $d = 1$ und den Faltungskern $k = \mathbf{1}_{[0,1]}$ das Spektrum und das Punktspektrum von K und zeichnen Sie es (Computereinsatz gestattet).

3. Betrachten Sie für die *Diffusivität* $\nu > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung*
$$\partial_t f(x,t) = \nu \Delta f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0$$
mit Anfangsbedingung $f(x,0) = f_0(x)$ für vorgegebenes $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dabei ist $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$ der Laplace-Operator.
   (a) Nehmen Sie an, dass eine Lösung f existiert und geben Sie Regularitätsbedingungen an, so dass für die Fouriertransformierte in x gilt
$$\partial_t \mathcal{F}f(u,t) = -\nu |u|^2 \mathcal{F}f(u,t), \quad u \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$
   (b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\mathcal{F}f$ in t mit Parameter u aus (a) und schließen Sie, dass
$$f(x,t) = (f_0 * p(\bullet,t))(x) \text{ mit } p(x,t) = (4\nu t\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/(4\nu t)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
gilt. p heißt *Fundamentallösung* oder *Greenfunktion* und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung formal mit Anfangsbedingung $f(\bullet,0) = \delta_0$.
   (c) Zeigen Sie nun im Umkehrschluss, dass f in (b) für jedes $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ in $C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ liegt, für $t > 0$ die Wärmeleitungsgleichung löst sowie die funktionswertige Abbildung $t \mapsto f(\bullet,t)$ in $C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^d))$ liegt, wenn man $f(x,0) = f_0(x)$ setzt.

4. Erarbeiten Sie sich die Literatur (z.B. Buch von *D. Werner*) zum Spektralradius $r(L)$ für $L \in \mathcal{L}(X)$ und beweisen Sie im Detail:

   (a) $r(L) := \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$ ist wohldefiniert mit $r(L) \leqslant \|L\|$, und es gibt sowohl $L \in \mathcal{L}(X)$ mit $r(L) < \|L\|$ als auch mit $r(L) = \|L\|$;

   (b) $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant r(L)\}$;

   (c) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = r(L)$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 13.1.23.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 10

1. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachten Sie den Multiplikationsoperator $M_g : L^2(X, \mathscr{F}, \mu) \to L^2(X, \mathscr{F}, \mu)$ mit $M_g f(x) = g(x)f(x)$, $x \in X$, für eine beschränkte messbare Funktion g. Geben Sie die den Operator $h(M_g)$ für $h \in C(\sigma(M_g))$ aus dem stetigen Funktionalkalkül explizit an. Überprüfen Sie dann alle Eigenschaften des Funktionalkalküls an diesem Beispiel.

2. Zeigen Sie für den Hilbertraum-adjungierten Operator L^* von $L \in L(H)$ die Darstellung $L^* = \Phi^{-1} L' \Phi$, wobei $\Phi : H \to H'$ den (konjugiert linearen) Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz und L' den adjungierten Operator von L beschreibt.

   Bestimmen Sie I^* und I' für den Integraloperator $I : L^2([0,1];\mathbb{C}) \to L^2([0,1];\mathbb{C})$ mit $If(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds$ und $k \in L^2([0,1]^2;\mathbb{C})$.

3. Zeigen Sie für die adjungierten Operatoren:

   (a) $(L_1 L_2)' = L_2' L_1'$ für $L_1 \in L(Y,Z)$, $L_2 \in L(X,Y)$;

   (b) $L'' \circ \iota_X = \iota_Y \circ L$ für $L \in L(X,Y)$, wobei $L'' = (L')'$ und $\iota_X : X \to X''$, $\iota_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Einbettungen sind.

   Schließen Sie mittels Aufgabe 7.3(b) die Implikationen L surjektiv $\Rightarrow L'$ injektiv sowie L' surjektiv $\Rightarrow L'', L$ injektiv.
   Zusatzaufgabe: Gilt auch die Implikation L injektiv $\Rightarrow L'$ hat dichtes Bild?

4. Zeigen Sie für einen normalen Operator $L \in \mathcal{L}(H)$, dass $\sigma(L) = \sigma_{ap}(L)$ gilt, das heißt zu jedem $\lambda \in \sigma(L)$ existieren $x_n \in H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $(\lambda - L)x_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 20.1.23.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 11

1. Es sei $\mathcal{K}(X,Y) = \{K \in \mathcal{L}(X,Y) \,|\, K \text{ kompakter Operator}\}$ für Banachräume X, Y. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(X,Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$ und damit selbst wieder ein Banachraum ist (zur Abgeschlossenheit benutze einen Diagonalfolgentrick). Begründen Sie ferner, dass $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$ ein *Ideal* in $\mathcal{L}(X)$ in folgendem Sinne ist:

$$\forall K \in \mathcal{K}(X),\ L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X):\ L_1 K L_2 \in \mathcal{K}(X).$$

2. Es sei $(e_n)_{n\geqslant 1}$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum H und $(\lambda_n) \in \ell^\infty$. Beweisen Sie, dass $L \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$Lx = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H,$$

genau dann ein kompakter Operator ist, wenn $(\lambda_n) \in c_0$.

3. Es seien X und Y Banachräume. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt *vollstetig*, falls für jede schwach konvergente Folge $(x_n) \subseteq X$ die Bildfolge (Kx_n) normkonvergent in Y ist. Zeigen Sie:

   (a) Jeder kompakte Operator $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ ist vollstetig.

   (b) Ist X reflexiv, so ist jeder vollstetige Operator $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompakt.

Mündliche Präsentation der Lösungen in der Übung am 30.1.23.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Übungsblatt 12

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{K}(H)$ kompakter Operatoren im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist in der starken Operatortopologie: es gibt einen Hilbertraum H und $K_n \in \mathcal{K}(H)$ mit $K_n x \to Lx$ für alle $x \in H$ mit einem Operator $L \in \mathcal{L}(H)$, der nicht kompakt ist.

2. Überprüfen Sie für beide Richtungen im Satz von Schauder für $K \in \mathcal{L}(X, Y)$, ob es jeweils ausreicht, dass X oder Y nur ein normierter Raum und kein Banachraum ist.

3. Zeigen Sie für $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ mit $Kf(t) = \int_0^t f(s)ds$:

   (a) K ist ein kompakter Operator;

   (b) das Punktspektrum ist leer: $\sigma_p(K) = \varnothing$;

   (c) das Spektrum besteht nur aus der Null: $\sigma(K) = \{0\}$.

4. Es sei $L \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator mit abzählbarem Spektrum $\sigma(L) = \{\lambda_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie mit dem Spektralmaß $E_{\{\lambda\}}$ von L:

   (a) Es gilt $Lx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k E_{\{\lambda_k\}} x$ für alle $x \in H$.

   (b) Folgern Sie den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren L in $\mathcal{L}(H)$: Es existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem (e_k) in H sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\mu_k) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $Lx = \sum_k \mu_k \langle x, e_k \rangle e_k$ für alle $x \in H$ gilt.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 3.2.23.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2022/23
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß

Probeklausur

1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Jede richtige Antwort wird mit +0.5 Punkten bewertet, jede falsche mit −0.5. Insgesamt sind für diese Aufgabe nicht mehr als fünf und nicht weniger als null Punkte zu erreichen. (5P)

Frage	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
wahr												
falsch												
weiß nicht												

(a) Jede Orthogonalprojektion in einem Hilbertraum ist selbstadjungiert.

(b) c_0 ist reflexiv.

(c) Die Funktion $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, liegt in $H^1([-1, 1])$, aber nicht in $H^2([-1, 1])$.

(d) Ein selbstadjungierter kompakter Operator besitzt nur nicht-negative Eigenwerte.

(e) Sei U ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums X und $U \neq X$. Dann existiert ein Funktional $\ell \in X'$ mit $\ell|_U = 0$ und $\ell \neq 0$.

(f) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ stetig differenzierbar, so folgt für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^d)$.

(g) Für einen normalen Operator L gilt $\operatorname{ran}(L)^\perp = \ker(L)$.

(h) Für jeden kompakten Operator K auf einem Banachraum gilt $0 \notin \sigma(K)$.

(i) Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten liegt dicht in $(C(D; \mathbb{C}), \|\bullet\|)$ mit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

(j) Für ein festes x in einem Hilbertraum H gilt $x = 0 \Leftrightarrow \forall y \in H : \langle x, y\rangle = 0$.

(k) Schwach*-konvergente Folgen sind beschränkt.

(l) Das Spektralmaß $A \mapsto E_A$ eines selbstadjungierten Operators L liegt im Raum $M_{\mathbb{C}}(\sigma(L))$ der komplexwertigen Maße auf dem Spektrum von L.

2. Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(x) := \sin(nx)$, $x \in [0,1]$.

   (a) Begründen Sie, dass $f_n \not\to 0$ in $L^p([0,1])$ für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$. (1P)

   (b) Zeigen Sie $f_n \xrightarrow{w} 0$ in $L^p([0,1])$ für $1 < p < \infty$ und auch für $p = 1$. (2P)

   (c) Sei $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ ein Integraloperator mit $Kf(t) := \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds$ und $k \in C([0,1]^2)$. Begründen Sie, weshalb K ein kompakter Operator ist, und beweisen Sie im Detail, dass dann $Kf_n \to 0$ in $L^2([0,1])$ gilt. (2P)

3. Sei H ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum und $\beta : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H, wobei $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|x\|^2 \leqslant \beta(x,x) \qquad \text{und} \qquad |\beta(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$$

   für alle $x, y \in H$.

   (a) Begründen Sie, dass $x \mapsto \beta(x,y)$ für jedes $y \in H$ ein stetiges lineares Funktional ist. Folgern Sie, dass ein eindeutiger Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ existiert mit $\beta(x,y) = \langle x, Ay\rangle$, $x, y \in H$. (1P)

   (b) Zeigen Sie, dass A injektiv ist (1P)

   (c) Beweisen Sie, dass $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ existiert.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{ran}(A)$ abgeschlossen ist, und betrachten Sie dann $\operatorname{ran}(A)^\perp$. (2P)

   (d) Folgern Sie, dass zu jedem Funktional $\ell \in H'$ ein eindeutiges $y \in H$ existiert mit $\ell = \beta(\bullet, y)$. (1P)

4. Sei $k \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ und 1-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Betrachten Sie den Integraloperator K:

$$(Kf)(t) := \int_0^1 k(t-s)f(s)\,ds, \qquad f \in L^2([0,1];\mathbb{C}).$$

   (a) Warum ist $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1];\mathbb{C}))$ ein kompakter Operator? Unter welcher Bedingung an k ist K selbstadjungiert? (1P)

   (b) Sei $k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}(j)e^{2\pi i j\bullet}$ die Darstellung von k als Fourierreihe mit Koeffizienten $\hat{k}(j) = \langle k, e^{2\pi i j\bullet}\rangle$. Beweisen Sie für die Fourierkoeffizienten von Kf, dass $\widehat{Kf}(j) = \widehat{k}(j)\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, gilt. (2P)

   (c) Bestimmen Sie $\sigma_p(K)$, die Eigenfunktionen von K sowie $\sigma(K)$. (2P)

Abgabe der Lösungen von Aufgaben 2-4 **vor** der Vorlesung am 10.2.23.