



1. Übungsblatt

1. Schätzung im Poisson-Modell.

- (a) In einem Krankenhaus gab es in den vergangenen n Tagen N_1, \dots, N_n Geburten. Begründen Sie, weshalb N_1, \dots, N_n näherungsweise als unabhängig und $\text{Poiss}(\lambda)$ -verteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ angesehen werden können. Geben Sie das entsprechende statistische Modell formal an.
- (b) Belesen Sie sich zur Momentenmethode 1.14 im Buch und konstruieren Sie im Modell aus (a) Momentenschätzer $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ von λ basierend auf dem Erwartungswert $\mathbb{E}_\lambda[N_i] = \lambda$ sowie auf der Varianz $\text{Var}_\lambda(N_i) = \lambda$. Bestimmen Sie außerdem die Likelihoodfunktion im Modell und den MLE $\hat{\lambda}_3$.
- (c) Simulieren Sie in 1000 Monte-Carlo-Iterationen die Beobachtungen N_1, \dots, N_n für $n = 30$ und $\lambda = 1$ und stellen Sie die Ergebnisse für die Schätzer aus (b) jeweils in einem *Boxplot* dar. Können Sie die unterschiedliche Qualität der Schätzer mathematisch begründen?

2. Für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n betrachte den Schätzer $\hat{\sigma}_\alpha^2 := \frac{\alpha}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ von σ^2 , wobei $\alpha > 0$ frei gewählt wird.

- (a) Zeigen Sie für den mittleren quadratischen Fehler (MSE)

$$\mathbb{E}_{\mu, \sigma^2}[(\hat{\sigma}_\alpha^2 - \sigma^2)^2] = (\alpha - 1)^2 \sigma^4 + \alpha^2 \text{Var}_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_1^2).$$

- (b) Begründen Sie, weshalb $\text{Var}_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma^4 V_n$ mit einer Konstanten V_n unabhängig von μ und σ^2 gilt. Schließen Sie, dass der MSE minimal ist für $\alpha = (1 + V_n)^{-1}$.
- (c) Bestimmen Sie V_n . Sie dürfen $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2) - \bar{X}^2$ sowie $\text{Var}(X^2) = 2$ für $X \sim N(0, 1)$ verwenden.

3. ChatGPT behauptet manchmal, dass der MLE im Binomialmodell minimax ist (s. Rückseite) und manchmal nicht. Finden Sie heraus, was stimmt, und erklären Sie dies im Detail.

Is the MLE in the Binomial model minimax?

To determine whether the **Maximum Likelihood Estimator (MLE)** in the **Binomial model** is **minimax**, we need to analyze it in the context of **decision theory**, specifically **minimax estimation** under some loss function—typically **squared error loss**.

1. Setup

Let $X \sim \text{Binomial}(n, \theta)$, where $\theta \in [0, 1]$ is the unknown parameter.

- The MLE of θ is:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \frac{X}{n}$$

2. What Does "Minimax" Mean Here?

An estimator $\hat{\theta}(X)$ is **minimax** under a loss function $L(\theta, \hat{\theta})$ if it minimizes the **maximum risk** over all $\theta \in [0, 1]$:

$$\sup_{\theta \in [0, 1]} \mathbb{E}_{\theta}[L(\theta, \hat{\theta}(X))] \leq \sup_{\theta \in [0, 1]} \mathbb{E}_{\theta}[L(\theta, \tilde{\theta}(X))]$$

for any other estimator $\tilde{\theta}$.

For squared error loss:

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

3. Risk of the MLE

The risk of the MLE under squared error loss is:

$$R(\theta, \hat{\theta}_{\text{MLE}}) = \text{Var}_{\theta}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}(X) = \frac{1}{n^2} \cdot n\theta(1 - \theta) = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}$$

So the maximum risk over $\theta \in [0, 1]$ is:

$$\sup_{\theta \in [0, 1]} R(\theta, \hat{\theta}_{\text{MLE}}) = \frac{1}{4n}$$

(because $\theta(1 - \theta)$ is maximized at $\theta = 1/2$).

4. Is the MLE Minimax?

Yes — in this case, the MLE is **minimax** under squared error loss.

- It achieves the **constant risk bound** of $\frac{1}{4n}$, which is the **minimax risk** in the Binomial model.
- In fact, this risk is **uniformly bounded** above and matches the **Bayes risk** under the least favorable prior (Beta(1/2, 1/2) in some formulations).

Furthermore, for the Binomial(n, θ) model, the minimax estimator under squared error loss is known to be the MLE (X/n). This has been proved in classical statistical decision theory literature (see references like Lehmann & Casella).

Conclusion

Yes, the MLE $\hat{\theta} = X/n$ in the Binomial(n, θ) model is **minimax** under squared error loss.

Let me know if you want to explore minimaxity under other loss functions (like absolute error or 0-1 loss), or in a Bayesian context.



Abgabe zu **Beginn** der Vorlesung am Montag, 27.10.25.
Klausurtermin: Freitag 13.2.26, 9-11 Uhr.



2. Übungsblatt

1. Unter N Wahlberechtigten gibt es N_{AfD} AfD-Wähler sowie jeweils $N/2$ Männer und Frauen.
 - (a) Für gerades $n \in \mathbb{N}$ ziehe jeweils zufällig (mit Zurücklegen) $n/2$ Männer und $n/2$ Frauen und bestimme jeweils die Anzahl X_m bzw. X_w von AfD-Wählern/innen in den Stichproben. Formalisieren Sie das statistische Modell und zeigen Sie, dass $\hat{p}_{m/w} := \frac{X_m + X_w}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer von $p = N_{AfD}/N$ ist, dessen MSE nicht größer ist als der von $\hat{p} = \frac{X}{n}$, wenn sich X AfD-Wähler unter n geschlechtsneutral gezogenen Wahlberechtigten befinden.
 - (b) Angenommen die Anzahl der AfD-Wähler unter den Männern ist etwa doppelt so groß wie der unter den Frauen. Wie können Sie durch geeignete Stichprobenzahlen einen erwartungstreuen Schätzer von p konstruieren, der noch kleineren MSE als $\hat{p}_{m/w}$ besitzt? (Stichwort: *stratified sampling*).
 2. Es sei Y eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f^Y bezüglich einem σ -endlichen Maß ν auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Zeigen Sie:
 - (a) $m := \inf\{q \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^q f^Y(y) \nu(dy) \geq 1/2\}$ minimiert $\mathbb{E}[|Y - r|]$ über $r \in \mathbb{R}$.
 - (b) $M := \operatorname{argmax}_{y \in \mathbb{R}} f^Y(y) \nu(\{y\})$ (dies möge existieren) minimiert $\mathbb{E}[\mathbf{1}(Y \neq r)]$ über $r \in \mathbb{R}$.
- Folgern Sie die Aussage zu Bayesschätzern unter absolutem und 0-1-Verlust aus der Vorlesung.

3. Bayesklassifizierer. Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \{0,1\}})$ ein binäres statistisches Modell sowie π eine a-priori-Verteilung auf $\mathcal{P}(\{0,1\})$. $L(\vartheta, x)$ bezeichne die Likelihoodfunktion bezüglich einem dominierenden Maß μ .
 - (a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von ϑ .
 - (b) Charakterisieren Sie die Bayes-optimalen Schätzer bezüglich 0-1-Verlust $\ell(\vartheta, r) = \mathbf{1}(\vartheta \neq r)$ und berechnen Sie das zugehörige Bayesrisiko. Welche einfachen Entscheidungsregeln (zwischen 0 und 1) ergeben sich für $\pi(\{0\}) = \pi(\{1\})$?
4. Es sei X_1, \dots, X_n eine $N(\mu, \Sigma)$ -verteilte mathematische Stichprobe mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ unbekannt und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ bekannt. Betrachte die a-priori-Verteilung $\pi = N(a, B)$ für μ mit $a \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$.
 - (a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von μ .
 - (b) Zeigen Sie, dass der Bayesschätzer $\hat{\mu}_{a,B}$ bezüglich quadratischem Risiko als Konvexkombination von \bar{X} und a dargestellt werden kann. Diskutieren Sie den Einfluss von n , Σ und B auf die Gewichtung.
 - (c) Wenn ein Maß π , das kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, formal in die Berechnung des Bayesschätzers eingesetzt wird, spricht man von einem *improper Bayes estimator*. Zu welchem Maß π ergibt sich der MLE \bar{X} als improper Bayes estimator?

Abgabe **zu Beginn** der Vorlesung am Montag, 3.11.25.



3. Übungsblatt

1. Es werde eine \mathbb{P}_ϑ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n beobachtet mit $\vartheta \in \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$, $0 < \vartheta_0 < \vartheta_1$, unbekannt. Bestimmen Sie die Form der Neyman-Pearson-Tests für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ in folgenden Modellen:
 - (a) $\mathbb{P}_\vartheta = N(\vartheta, 1)$,
 - (b) $\mathbb{P}_\vartheta = \text{Exp}(\vartheta)$,
 - (c) $\mathbb{P}_\vartheta = U([0, \vartheta])$.
2. Einseitiger Gaußtest. Es sei X_1, \dots, X_n eine $N(\vartheta, 1)$ -verteilte mathematische Stichprobe und $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der einseitige Gaußtest $\varphi_\alpha = \mathbf{1}(\bar{X} \geq c_\alpha)$ mit geeignetem kritischen Wert $c_\alpha \in \mathbb{R}$ gleichmäßig bester Test (UMP-Test) vom Niveau α für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ ist. Verwenden Sie dazu Aufgabe 1(a), um zunächst die UMP-Eigenschaft für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ zu erhalten. Schließen Sie dann mit der Monotonie der Gütefunktion auf die UMP-Eigenschaft auch allgemeiner für $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$.
3. Recherchieren Sie den Begriff des *p-Wertes* eines Tests (z.B. im Buch). Bestimmen Sie für die folgenden Datensätze den *p*-Wert für einen zweiseitigen Test unter der Nullhypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für *männlich* und *weiblich* gleich groß ist. Die Binomialverteilung darf durch die Normalverteilung approximiert werden. Klären Sie jeweils, ob die Nullhypothese zu den Niveaus $\alpha = 0,05$ bzw. $\alpha = 0,01$ akzeptiert oder abgelehnt wird.
 - (a) 2015 wurden in Berlin 19614 Jungen und 18416 Mädchen geboren.
 - (b) In der 4. Coronawelle gab es in Berlin 51949 Neuinfektionen, darunter 50,2% weibliche und 48,4% männliche Personen (beim Rest ist das Geschlecht unbekannt oder divers).

4. Es werde eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n beobachtet mit $\sigma > 0$ bekannt und $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt. Für welche $a, b > 0$ ist $C = [\bar{X} - a, \bar{X} + b]$ mit Stichprobenmittel \bar{X} ein Konfidenzintervall für μ vom Niveau $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$? Für welche dieser Werte von a, b besitzt C minimale Länge?

Abgabe **zu Beginn** der Vorlesung am Montag, 10.11.25.



4. Übungsblatt

1. Lesen Sie Kapitel 1 *Grundlagen der Statistik* im Buch und finden Sie mindestens drei Fehler. Die Angabe von Fehlern kann auch gerne durch konkrete Verbesserungsvorschläge zur Darstellung oder Erklärung ersetzt werden.
2. Betrachten Sie das lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit normalverteilten Fehlern $\varepsilon \sim N(0, \Sigma)$ mit bekannter positiv-definiten Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weisen Sie nach, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer von β Maximum-Likelihood-Schätzer ist. Diskutieren Sie auch, wann die Schätzer existieren und wann sie eindeutig sind.
3. Betrachten Sie das gewöhnliche lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n)$. Bestimmen Sie den Likelihood-Quotiententest für die Nullhypothese $H_0 : \beta = \beta_0$ gegen $H_1 : \beta \neq \beta_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$. Hierbei seien $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\beta_0 \in \mathbb{R}^p$, $\sigma > 0$ bekannt.
Tipp: Stellen Sie den Test über die Teststatistik $|\Pi_X Y - X\beta_0|^2$ dar.
4. (*Polynomregression*) Wir beobachten

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \cdots + \beta_{p-1} x_i^{p-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ bekannte Designpunkte sind und $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d. gilt.

- (a) Schreiben Sie die Beobachtungen als ein lineares Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit einer geeigneten Designmatrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und weisen Sie nach, dass für $p \leq n$ und paarweise verschiedene x_i die Designmatrix vollen Rang p besitzt (Tipp: *Vandermonde-Determinante*).
- (b) Für $n = 100$, $x_i = (i - 1)/(n - 1)$, $\varepsilon_i \sim N(0; 0, 1)$ simuliere Beobachtungen $Y_i = \sin(\pi x_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$. Für Dimensionen $p = 1, 2, 3, 5, 10, 50$ bestimme jeweils das Regressionspolynom $\hat{f}_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \hat{\beta}_i x^i$ mit Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}$. Zeichnen Sie f , alle \hat{f}_p und die Beobachtungen Y_i in ein gemeinsames Koordinatensystem. Diskutieren Sie das Ergebnis.



5. Übungsblatt

1. Betrachten Sie das lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$, wobei die ε_i unabhängig und gemäß der Laplaceverteilungsdichte $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, für ein $\lambda > 0$ verteilt seien.

- (a) Weisen Sie nach, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für β Lösung des folgenden Minimierungsproblems ist:

$$\hat{\beta}^{ML} = \min_{b \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n |Y_i - (Xb)_i|.$$

- (b) Schließen Sie, dass im Fall $p = 1$ und $X = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{n \times p}$ jeder Stichprobenmedian von Y_1, \dots, Y_n Maximum-Likelihood-Schätzer ist.
 - (c) Betrachten Sie den Fall in (b). Zeigen Sie $\text{Var}(\hat{\beta}_{KQ}) = \frac{2}{\lambda^2 n}$ für den Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}_{KQ}$. Vergleichen Sie den MSE von $\hat{\beta}_{KQ}$ und $\hat{\beta}_{ML}$ in Simulationen für $n = 99$ und $\beta = 0$, $\lambda = 1$.
 - (d**) Beweisen Sie $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{ML} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \lambda^{-2})$ für $n \rightarrow \infty$ in der Situation von (b).
2. Zeigen Sie für die stochastische Ordnung: $X_n = \mathcal{O}_P(a_n)$, $Y_n = \mathcal{O}_P(b_n)$ impliziert $X_n + Y_n = \mathcal{O}_P(a_n + b_n)$, $X_n Y_n = \mathcal{O}_P(a_n b_n)$.
 3. Zeigen Sie für den MSE des Ridge-Schätzers $\hat{\beta}_\lambda = (X^\top X + \lambda E_p)^{-1} X^\top Y$ im gewöhnlichen linearen Modell:

$$\mathbb{E}[|\hat{\beta}_\lambda - \beta|^2] = |(\frac{n}{\lambda} \Sigma_n + E_p)^{-1} \beta|^2 + \frac{\sigma^2}{n} \text{trace}((\Sigma_n + \frac{\lambda}{n} E_p)^{-2} \Sigma_n)$$

mit $\Sigma_n = \frac{1}{n} X X^\top$. Diskutieren Sie das Verhalten für $\lambda \downarrow 0$ und $\lambda \uparrow \infty$.

Betrachten Sie das sogenannte *spiked covariance model* $\Sigma_n = \text{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ mit k Eigenwerten 1 und $p - k$ Eigenwerten $\varepsilon \in [0, 1]$. Von welcher Größenordnung sollte man $\lambda = \lambda(\varepsilon, n)$ mindestens wählen für $n \rightarrow \infty$ und $\varepsilon \downarrow 0$, damit der Fehler beschränkt bleibt?

4. Betrachten Sie das statistische Modell

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

mit n verschiedenen Punkten $x_i \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig und unbekannt sowie $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$, $\text{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 E_n$. Unter der polynomiellen Regressionsannahme $f = q_a^d$ mit

$$q_a^d(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

sei $\hat{a} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_d)$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer sowie $q_{\hat{a}}^d(x)$ die Vorhersage des Funktionswerts an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie unter der Verwendung der empirischen Norm $\|g\|_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)^2$:

- (a) Unter der Annahme $f = q_a^d$ gilt $\mathbb{E}_{q_a^d}[\|q_{\hat{a}}^d - q_a^d\|_n^2] = \frac{\sigma^2}{n}(d+1)$.
Tipp: Betrachten Sie $\|X\hat{\beta} - X\beta\|^2$ allgemein im linearen Modell.
- (b) Für f beliebig im Modell ergibt sich die Bias-Varianz-Zerlegung

$$\mathbb{E}_f[\|q_{\hat{a}}^d - f\|_n^2] = \min_{q_a^d} \|f - q_a^d\|_n^2 + \frac{\sigma^2}{n}(d+1),$$

wobei sich der Bias durch den kleinsten Abstand von f zum Raum der Polynome vom maximalen Grad d in empirischer Norm ergibt.

- (c) Gilt für jedes quadratische Polynom f , dass der MSE $\mathbb{E}_f[\|q_{\hat{a}}^d - f\|_n^2]$ für $d = 1$ größer als für $d = 2$ ist?

Abgabe **zu Beginn** der Vorlesung am Montag, 24.11.25.



6. Übungsblatt

1. Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige $N(0, \Sigma_X)$ -verteilte Zufallsvektoren im \mathbb{R}^p und $\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i^\top$.

(a) Zeigen Sie für jeden deterministischen Vektor $v \in \mathbb{R}^p$, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|(\Sigma_n - \Sigma_X)v|^2] &= \frac{1}{n} \mathbb{E}[|(\Sigma_1 - \Sigma_X)v|^2] \\ &= \frac{1}{n} (\langle \Sigma_X v, v \rangle \text{trace}(\Sigma_X) + |\Sigma_X v|^2) \end{aligned}$$

gilt. Schließen Sie $|(\Sigma_n - \Sigma_X)v| = \mathcal{O}_P(\sqrt{p/n})$, sofern $\|\Sigma_X\|$ und $|v|$ beschränkt bleiben.

Hinweis: Sind Z_1, Z_2 gemeinsam normalverteilt mit Erwartungswert Null, so gilt $\text{Var}(Z_1 Z_2) = \mathbb{E}[Z_1^2] \mathbb{E}[Z_2^2] + \mathbb{E}[Z_1 Z_2]^2$.

- (b) Die *Frobeniusnorm* (auch *Hilbert-Schmidt-Norm*) $\|M\|_2$ einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist gegeben durch

$$\|M\|_2^2 = \sum_{k,l=1}^p M_{kl}^2 = \sum_{k=1}^p |M e_k|^2$$

mit kanonischen Einheitsvektoren e_k . Weisen Sie mit Teil (a)

$$\mathbb{E}[\|\Sigma_n - \Sigma_X\|_2^2] = \frac{1}{n} (\text{trace}(\Sigma_X)^2 + \|\Sigma_X\|_2^2)$$

nach. Welche stochastische Ordnung hat also $\|\Sigma_n - \Sigma_X\|_2$ in n und p für $\|\Sigma_X\|$ beschränkt?

2. Es gelte $\|\Sigma_X^{-1/2} \Sigma_n \Sigma_X^{-1/2} - E_p\| = \mathcal{O}_P(\sqrt{p/n})$. Beweisen Sie im Detail, dass dann für $p/n \rightarrow 0$ die Wahrscheinlichkeit, dass Σ_n invertierbar ist, gegen eins konvergiert und $\|\Sigma_n^{-1/2} \Sigma_X \Sigma_n^{-1/2} - E_p\| = \mathcal{O}_P(\sqrt{p/n})$ gilt.

Hinweis: Arbeiten Sie dazu die Begründungen nach Satz 2.31 in der neuen Buchfassung aus.

3. Stellen Sie die Quantile $q_{t(k), 1-\alpha/2}$ für $k = 1, \dots, 100$ und $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,10\}$ graphisch dar (vergleiche Aufgabe 4). Gegen die Quantile welcher Verteilung konvergiert $q_{t(k), 1-\alpha/2}$ für $k \rightarrow \infty$?

4. Im linearen Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n)$ sei $\rho = \langle v, \beta \rangle$ für ein $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ ein abgeleiteter Parameter. Zeigen Sie für das Testproblem $H_0 : \rho = \rho_0, \sigma > 0$ gegen $H_1 : \rho \neq \rho_0, \sigma > 0$, dass

$$\varphi_\alpha := \mathbf{1}\left(|\hat{\rho} - \rho_0| > \hat{\sigma} \sqrt{\langle (X^\top X)^{-1} v, v \rangle q_{t(n-p), 1-\alpha/2}}\right)$$

mit $\hat{\rho} = \langle v, \hat{\beta} \rangle$ Likelihood-Quotienten-Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist.

Abgabe **zu Beginn** der Vorlesung am Montag, 1.12.25.



7. Übungsblatt

1. Lesen Sie Kapitel 2 *Das lineare Modell* im Buch und finden Sie mindestens drei Fehler. Die Angabe von Fehlern kann auch gerne durch konkrete Verbesserungsvorschläge zur Darstellung oder Erklärung ersetzt werden.
2. Gegeben sei das lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n)$. Wir testen auf signifikanten Einfluss der ersten Kovariablen auf die Responsevariable: $H_0 : \beta_1 = 0, \sigma > 0$ gegen $H_1 : \beta_1 \neq 0, \sigma > 0$ für $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ und $1 < p < n$.
 - (a) Stellen Sie diese Hypothese in der Form $H_0 : K\beta = c$ mit geeigneter Kontrastmatrix K und mit einem Vektor c dar.
 - (b) Arbeiten Sie den Beweis von Satz 2.42 durch und vereinfachen Sie ihn im vorliegenden Fall (z.B. durch Verwendung konkreter Einträge von Vektoren und Matrizen).
 - (c) Konstruieren Sie die zugehörige F-Statistik und bestimmen Sie ihre Verteilung.
3. Betrachten Sie die lineare Hypothese $H_0 : K\beta = 0$ und den auf H_0 eingeschränkten Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}_{H_0}$. Zeigen Sie im Fall von orthogonalem Design $X^\top X = nE_p$ mit der expliziten Formel für $\hat{\beta}_{H_0}$:
 - (a) $\hat{\beta}_{H_0} = (E_p - \Pi_{K^\top})\hat{\beta}$;
 - (b) $\hat{\beta}_{H_0}$ ist die Orthogonalprojektion von $\hat{\beta}$ auf den Kern $\ker(K) = \{\beta \in \mathbb{R}^p \mid K\beta = 0\}$ von K .
 - (c) Interpretieren Sie im Fall orthogonalen Designs $RSS_{H_0} - RSS = |X(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{H_0})|^2$ geometrisch.
4. Analysieren Sie die Klimadaten im Januar analog zu den Julitemperaturen von Beispiel 2.45 im Buch, indem Sie auch dort Polynomregression bis zum Grad 4 durchführen und geeignete Hypothesen testen.



8. Übungsblatt

1. Ein Smartphone wurde in drei europäischen Ländern zu folgenden Euro-Preisen verkauft:

Land A: 200, 210, 220, 230, 250

Land B: 180, 190, 200, 210, 220

Land C: 210, 220, 230, 240, 250

Überprüfen Sie die Hypothese, dass die vom Hersteller kalkulierten Preise nicht vom Land abhängen, indem Sie eine Varianzanalyse durchführen. Geben Sie die zugehörige ANOVA-Tabelle an.

2. Was ist der Unterschied zwischen t -Test und F -Test in der Varianzanalyse? Fragen Sie eine *künstliche Intelligenz* Ihrer Wahl und überprüfen Sie die Antwort auf Korrektheit.
3. Bestimmen Sie für $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ die Kullback-Leibler-Divergenz $\text{KL}(\text{Pois}(\lambda_1) \mid \text{Pois}(\lambda_0))$. Wie schnell muss die Konvergenz $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ für $n \rightarrow \infty$ sein, damit $\text{KL}(\text{Pois}(\lambda_n)^{\otimes n} \mid \text{Pois}(\lambda_0)^{\otimes n})$ beschränkt bleibt?
4. Der Totalvariationsabstand zweier Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{P}, \mathbb{Q} auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ ist gegeben durch

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} := \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\|\mathbb{P}_n - \mathbb{P}\|_{TV} \rightarrow 0$ die schwache Konvergenz $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ impliziert.
- (b) Besitzen \mathbb{P} und \mathbb{Q} Dichten p und q bezüglich einem Maß μ (z.B. $\mu = \mathbb{P} + \mathbb{Q}$), so gilt

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} = \frac{1}{2} \int |p - q| d\mu.$$

Beweisen Sie dies, indem Sie $A_0 = \{x \in \mathcal{X} \mid q(x) \geq p(x)\}$ betrachten und $\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} = \mathbb{Q}(A_0) - \mathbb{P}(A_0)$ nachweisen.

(c) Beweisen Sie die Pinsker-Ungleichung

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} \leq \sqrt{\text{KL}(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q})/2}.$$

Anleitung: für $\psi(y) = y \log(y) - y + 1$, $y > 0$, gilt $|y - 1|^2 \leq (\frac{4}{3} + \frac{2}{3}y)\psi(y)$ und schätze damit $\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{TV} = \frac{1}{2} \int_{q>0} |p/q - 1| q \, d\mu$ gegen die Wurzel von $\text{KL}(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) = \int_{q>0} \psi(p/q) q \, d\mu$ ab.

Anfertigung für die **Übung** am Montag, 15.12.25.



9. Übungsblatt

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

1. Für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n ist $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ erwartungstreuer Schätzer von σ^2 .
2. Für eine $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n ist $\hat{\lambda} = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^{-1}$ Momentenschätzer für $\lambda > 0$.
3. Der Schätzer $\hat{\lambda}$ in 2 ist auch MLE.
4. Der Schätzer $\hat{\lambda}$ in 2 ist erwartungstreu.
5. Die Eigenschaft des MLE hängt von der Wahl des dominierenden Maßes ab.
6. Jeder Bayesschätzer ist erwartungstreu.
7. Die Menge der (randomisierten) Tests vom Niveau α ist konvex.
8. Es gibt stets einen randomisierten Test vom Niveau α , dessen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art $1 - \alpha$ beträgt; nämlich den trivialen Test $\varphi(x) = \alpha$.
9. Der zweiseitige Binomialtest ist stets UMP.
10. Der Beweis des Neyman-Pearson-Lemmas zeigt, dass ein Test $\tilde{\varphi}$ mit $\mathbb{E}_0[\tilde{\varphi}] \leq \mathbb{E}_0[\varphi]$ und $\mathbb{E}_1[\tilde{\varphi}] = \mathbb{E}_1[\varphi]$ für einen Neyman-Pearson-Test φ sogar $\tilde{\varphi} = \varphi$ fast sicher unter \mathbb{P}_0 und \mathbb{P}_1 erfüllt.
11. Eine Konfidenzmenge C vom Niveau $1 - \alpha$ gibt an, dass der wahre Parameter mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ in C liegt.
12. Für $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. und $\alpha \in (0, 1)$ ist $C = [\bar{X} + q_\alpha \sigma n^{-1/2}, \infty)$ ein einseitiges Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$ (mit α -Quantil q_α von $N(0, 1)$).
13. Im linearen Modell existiert stets ein Kleinste-Quadrate-Schätzer.
14. Im linearen Modell ist der Kleinste-Quadrate-Schätzer stets eindeutig.

15. Im gewöhnlichen linearen Modell ist der Kleinste-Quadrate-Schätzer unabhängig von der Kenntnis von σ^2 .
16. Die Spur einer Orthogonalprojektion auf einen p -dimensionalen Unterraum beträgt p , so dass $\text{tr}(\Pi_{X_\Sigma}) = p$ gilt.
17. Im gewöhnlichen linearen Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit $p = n = 1$ ist $\hat{\sigma}^2 = Y^2$ stets erwartungstreuer Schätzer von σ^2 .
18. Die Ridge-Regression verringert durch die Einführung des l_2 -Strafterms den Bias des Schätzers, erhöht aber seine Varianz.
19. Für $X \sim t(n)$ gilt $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, $p > 0$, genau dann, wenn $p < n$.
20. Im gewöhnlichen linearen Modell unter Normalverteilungsannahme der Fehler und unbekanntem σ^2 folgt die t-Statistik zur Prüfung des linearen Parameters $\rho = \langle v, \beta \rangle$ unter der Nullhypothese einer Standardnormalverteilung.
21. Für $X, Y \sim N(0, 1)$ unabhängig ist X/Y $t(1)$ -verteilt, also Cauchy-verteilt.
22. Die Beobachtungen $Y_i = \mu_1 + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n_1$, und $Y_i = \mu_2 + \varepsilon_i$, $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n)$, $n = n_1 + n_2$, lassen sich als lineares Modell mit $p = 2$, $\beta = (\mu_1, \mu_2)^\top$ und Designmatrixeinträgen $X_{ij} = \mathbf{1}(i \leq n_1, j = 1) + \mathbf{1}(i > n_1, j = 2)$ schreiben. Das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzellipsoid für β ist stets ein Kreis.
23. Das Quadrat einer $t(n)$ -verteilten Zufallsvariable ist $F(1, n)$ -verteilt.
24. Die Differenz zweier unabhängiger $F(m, n)$ -verteilten Zufallsvariablen ist $F(2m, n)$ -verteilt.
25. Aus $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ für ein $p > 0$ folgt $X_n = O_P(1)$.

Abgabe **zu Beginn** der Vorlesung am Montag, 05.01.2026.