Block 3: Simulation stochastischer Prozesse

Wintersemester 2018/19

Überblick

1. Stochastische Prozesse und wie man sie simuliert
2. Markovketten
3. Poisson-Prozess
4. Brownsche Bewegung
5. Geometrische Brownsche Bewegung
6. Anwendung: Option Pricing

Literatur:

- Robert Dobrow: *Robert P. Dobrow-Introduction to stochastic processes with R*, John Wiley & Sons, 2016

Stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $X = (X_t)_{t \in I}$ (für beliebige Indexmenge I).

Beispiele:

- $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, X_k iid
- random walk: $X_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$, Y_i iid
- Poisson-Prozess: $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_k \leq t)$
- (compound) Poisson-Prozess: $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, Y_i iid
- Gaussprozesse, Martingale, etc.
- Modellierung von (zeitlichen oder räumlichen) Abhängigkeiten

Anwendungen: Simulation von Partikelsystemen, Google page rank, Modellierung von Versicherungsfällen, Verkehrs- oder Wettersimulationen, Verteilung der Sterne am Himmel, etc.

Simulation von stochastischen Prozessen

Einzelne X_t eher uninteressant, wichtiger sind Pfade $t \mapsto X_t$.

interessante Fragen:

- Eintrittszeiten in bestimmte Mengen
- Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse
- stabile Zustände/Verteilungen

Computer kann nur endliche viele $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ bestimmen $\Rightarrow$ simuliere von endlichdimensionalen Verteilungen

Art der Simulation hängt stark von den Abhängigkeitsstrukturen der X_t ab.

Markovketten

Motivation: Modellierung von diskreten Prozessen bei denen der nächste Schritt nur vom letzten Schritt abhängt (z.B. Brettspiel).

Definition: $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt (zeitlich homogene) Markovkette mit diskretem Zustandsraum S, wenn für alle n und alle Zustände $x_1, \ldots, x_n \in S$ gilt:

$$P\left(X_n = x_n | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\right) = P\left(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\right).$$

Beispiel: random walk, Sprache (s. hier).

Verteilung von X ist eindeutig charakterisiert durch Anfangsverteilung $X_0 \sim \mu$ und Übergangsmatrix $P = (P_{ij})_{i,j\in S}$, wobei $P_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$, denn

$$P\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) = \left(\prod_{k=2}^{n} P_{x_{k-1},x_k}\right)\mu(x_0).$$

Markovketten

Markovketten sind oft gute erste Näherungen von komplizierten Systemen.

Interessante Größen:

- Eintrittszeiten: z.B. $\tau_x = \inf\{k \geq 0 : X_k = x\}$ für Zustand $x \in S$
- mittlere Eintrittszeit: $\mathbb{E}[\tau_x] = \sum_{k=0}^{\infty} kP\left(\tau_x = k\right)$
- Verteilung von X_k für große k (vgl. Stationarität)

Simulation:

- erzeuge $x_0 = X_0 \sim \mu$,
- erzeuge $x_1 = X_1$ gemäß der Verteilung $P(X_1 = \cdot | X_0 = x_0)$ mit Zähldichte $x \mapsto P_{x_0,x}$
- erzeuge $x_2 = X_2$ gemäß der Verteilung $P(X_2 = \cdot | X_1 = x_1)$ mit Zähldichte $x \mapsto P_{x_1,x}$
- usw.

Poisson-Prozess

- Modell für zufällige Zeitpunkte (Anrufe im Callcenter, Anzahl Geburten pro Tag, etc.)
- $(N_t)_{t \geq 0}$ = zählt Anzahl der eingetretenen Ereignisse bis t
  $\Rightarrow N_t \in \mathbb{N}$, $N_t \geq N_s$ für $t \geq s$
- **Formale Definition:**
  - seien $X_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ (=Wartezeiten, $0 < \lambda$=Intensität=mittlere Eintrittsrate)
  - $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ (= Eintrittszeiten)
  - $N_t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}\left(T_k \leq t\right)$
- **äquivalente Definition:**
  - $N_0 = 0$
  - für $0 \leq s < t$ ist $N_t - N_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ (stationäre Inkremente)
  - $N_t - N_s \perp N_s$ (unabhängige Inkremente)

Inhomogener Poisson-Prozess

- Intensität ist häufig zeitabhängig (z.B. Menschen in der Mensa)
- **Definition:**
  - $N_0 = 0$
  - für $0 \leq s < t$ ist $N_t - N_s \sim \text{Poi}(\int_s^t \lambda(r)dr)$ ($\lambda =$ Intensitätsfunktion)
  - N_t hat unabhängige Inkremente
- es gilt immer noch $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}(T_k \leq t)$ für Eintrittszeiten T_k, aber Wartezeiten $T_k - T_{k-1}$ nicht mehr unbedingt exponentialverteilt
- **Simulation:**
  - wähle festen Zeithorizont T
  - simuliere $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ Poisson-Prozess der Intensität 1 mit Eintrittszeiten $\tilde{T}_k$ bis $\Lambda(T)$ für $\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(r)dr$
  - $T_k = \Lambda^{-1}(\tilde{T}_k)$, wobei $\Lambda^{-1}(t) = \inf\{x \geq 0 : \Lambda(x) \geq t\}$, $N_t := \tilde{N}_{\Lambda(t)}$ $\Rightarrow N_0 = \tilde{N}_{\Lambda(0)} = 0$, $N_t - N_s = \tilde{N}_{\Lambda(t)} - \tilde{N}_{\Lambda(s)} \sim \text{Poi}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$, Unabhängigkeit klar

Brownsche Bewegung

- **Motivation:**
  - X_k iid, $\mathbb{E}[X_k] = 0$, $\operatorname{Var} X_k = 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
  - $Y_t = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$+ lineare Interpolation für $0 \leq t \leq 1$
  - $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{d} (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$
- Modell für zufällige Bewegungen von Partikeln (ursprüngliche Motivation des Botanikers Robert Brown waren Pollen, die auf Wasseroberfläche schwimmen)
- **Definition:**
  - $B_0 = 0$
  - für $0 \leq s < t$ ist $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$
  - $B_t - B_s \perp B_s$
  - Pfade $t \mapsto B_t$ sind fast sicher stetig

Brownsche Bewegung

- **Eigenschaften:**
  - fast jeder Pfad ist *nirgendwo* differenzierbar
  - Selbstähnlichkeit: $\frac{1}{a} B_{a^2 t} \sim B_t$, $a > 0$
  - Gesetz des iterierten Logarithmus: $\limsup_{t \to \infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1$ f.s.
- **Simulation über Approximation durch random walk:**
  - wähle maximale Länge T, *Schrittweite* $\frac{T}{N}$
  - erzeuge $X_k \overset{iid}{\sim} N(0, \frac{T}{N})$, $k = 1, \ldots, N$
  - $\tilde{B}_t = \sum_{k=1}^{\lfloor tN/T \rfloor} X_k \sim N(0, \frac{\lfloor tN/T \rfloor T}{N}) \approx N(0, t)$

Stochastische Differenzialgleichungen (SDEs)

Idee: Beschreibe zufällige Bewegungen mittels eines Musters, z.B. Wachstum mit zufälligen Störungen.

Ansatz:

$$\begin{aligned} dX_t =& \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ \Leftrightarrow X_t =& X_0 + \int_0^t \mu(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dB_r \end{aligned}$$

- X_0 heißt Startwert,
- μ beschreibt den Trend,
- σ beschreibt Störungen.

Anwendung: Komplizierte Partikelbewegungen, Finanzmathematik

Simulation von SDEs

- Euler-Schema:
  - wähle maximal Länge T, Schrittweite $\frac{T}{N}$
  - erzeuge $Z_k \overset{iid}{\sim} N(0,1)$
  - erzeuge $\tilde{X}_0 := X_0$ (wenn bekannt, oft deterministisch)
  - setze

$$\tilde{X}_{\frac{kT}{N}} = \tilde{X}_{\frac{(k-1)T}{N}} + \mu\left(\frac{(k-1)T}{N}, \tilde{X}_{\frac{(k-1)T}{N}}\right) \cdot \frac{T}{N} + \sigma\left(\frac{(k-1)T}{N}, \tilde{X}_{\frac{(k-1)T}{N}}\right)\sqrt{\frac{T}{N}} Z_k$$

- Euler-Schema konvergiert gegen X " unter schwachen Voraussetzungen"