Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

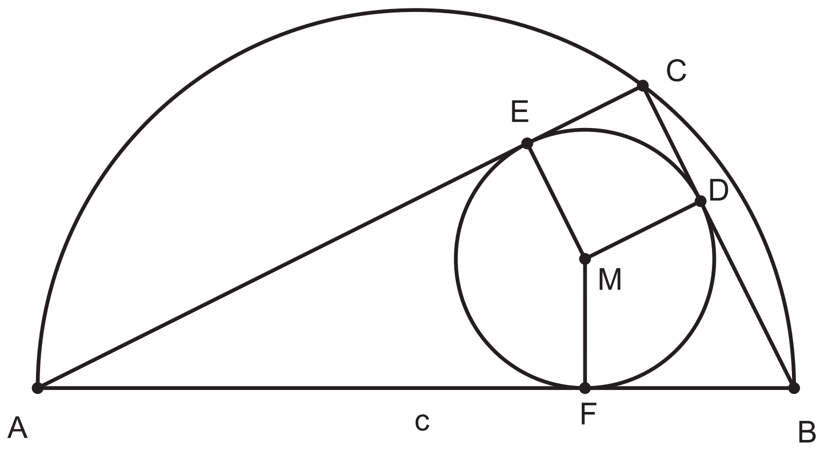
Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und der Hypotenusenlänge c. Weiterhin sei r der Inkreisradius, R der Umkreisradius und u der Umfang des Dreiecks ABC. Die Differenz

$$\frac{u}{c} - \frac{r}{R}$$

hat unter diesen Voraussetzungen erstaunlicherweise immer denselben festen Wert. Ermitteln Sie diesen Wert.

Begründen Sie jeden Ihrer Lösungschritte.



Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Beweisen Sie die folgende Ungleichung.

Für alle nicht negativen reellen Zahlen x und y gilt:

$$\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2} \qquad (1)$$ (2 Punkte)

b) Es seien A, B, C und D die Eckpunkte eines beliebigen Vierecks. Seine Seitenlängen seien mit a, b, c und d bezeichnet; sein Flächeninhalt sei F. Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung gilt:

$$F \leq \frac{1}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (2)$$ (8 Punkte)

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bei dem Zahlenschloss an Matthias’ Fahrrad muss man durch Drehen dreier Rädchen, auf denen jeweils die Ziffern 1, 2 und 3 stehen, einen dreiziffrigen Zahlencode einstellen, um das Schloss zu öffnen. Es dürfen auch Ziffern doppelt oder sogar dreifach auftauchen. Leider ist das Schloss defekt und öffnet sich schon, wenn beliebige zwei der drei Rädchen richtig eingestellt sind.

Wie viele Versuche braucht ein Dieb höchstens (wenn er schlau ist!), um das Schloss zu öffnen? (Tipp: Die richtige Antwort ist nicht 9.)

- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die von Ihnen angegebene Zahl bei geschickter Wahl der Codes ausreicht, um das Schloss mit Sicherheit zu öffnen.
- Begründen Sie, dass die von Ihnen gefundene Anzahl nicht unterboten werden kann.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es sind alle reellen Zahlen a zu ermitteln, zu denen es mindestens eine reelle Zahl x gibt, so dass

$$\sqrt{a+x} \quad \text{und} \quad \sqrt{a-x}$$

reelle Zahlen sind und außerdem die Ungleichung

$$\sqrt{a+x} \; + \; \sqrt{a-x} \; > \; a \tag{1}$$

erfüllt ist. (6 Punkte)

b) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen x der Ungleichung (1) in Abhängigkeit von a wenn im Vergleich zu den im Aufgabenteil a) ermittelten Werten von a zusätzlich $0 < a \leq 2$ vorausgesetzt wird. (4 Punkte)

Platz für die Lösung: