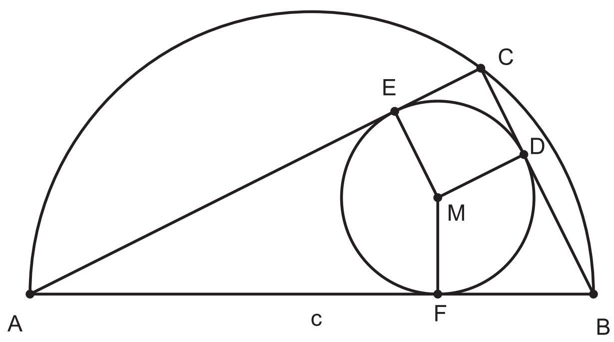


Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Mittelpunkt des Inkreises sei M, die Fußpunkte der Lote von M auf BC, AC und AB seien D, E und F.

Wegen der rechten Winkel bei C, D und E
sowie wegen $|MD| = |ME| = r$
ist das Viereck $MDCE$ ein Quadrat.

Daher gilt:

$$|CD| = |CE| = r \tag{1}$$

Außerdem gilt:

$$|BD| = |BF| \qquad \text{und} \qquad |AE| = |AF| \tag{2}$$

(Tangentenabschnitte an den Inkreis).

Aus (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned} & u = 2r + 2\,|BF| + 2\,|AF| = 2r + 2c \\ \Rightarrow \quad & u - 2r = 2c \\ \Rightarrow \quad & \frac{u}{c} - \frac{2r}{c} = 2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des Thalessatzes gilt, dass $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABC ist, also

$$c = 2R. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt schließlich:

$$\frac{u}{c} - \frac{r}{R} = 2$$

a) Für alle nicht negativen reellen Zahlen x und y gilt:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2} && (1)\\
\Leftrightarrow\quad & 4\;xy \leq (x+y)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\;xy \leq x^2+2xy+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0\;\leq (x-y)^2
\end{aligned}
$$

Dies ist offensichtlich eine wahre Aussage.

b) Die Fläche des Vierecks $ABCD$ werde o.B.d.A. durch die Diagonale AC in die Flächen der Dreiecke ABC und ACD zerlegt.

Ist β die Größe des Winkels $\measuredangle CBA$, so gilt für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABC:

$$F_1 \;=\; \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\beta \;\leq\; \frac{1}{2}\,a\,b \tag{3}$$

Substituiert man in (1) x durch a^2 und y durch b^2, so erhält man:

$$a\,b \;\leq\; \frac{a^2+b^2}{2} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$F_1 \;\leq\; \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right) \tag{5}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks ACD:

$$F_2 \;\leq\; \frac{1}{4}\left(c^2+d^2\right) \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt schließlich die Behauptung (2).

- Es gibt insgesamt $3^3 = 27$ mögliche Codes.
- Wenn ein Code (a, b, c) eingestellt wird und das Schloss sich nicht öffnet, werden automatisch auch alle Codes $(*, b, c), (a, *, c), (a, b, *)$ ausgeschlossen. D.h., es werden 7 Codes ausgeschlossen.
- Mit drei verschiedenen eingestellten Codes, bei denen sich das Schloss nicht öffnet, kann man also im günstigstens Fall 21 Codes ausschließen.

Wenn wir nun *vier verschiedene Codes* einstellen, wird *unter den ersten Ziffern* der vier Codes *mindestens eine Doppelung* auftreten.

- Nehmen wir also an, wir hätten als vierten Code (a, b, c) eingestellt. Dann wurde vorher bereits ein Code der Form (a, d, e) eingestellt.
- Beide Codes schließen (a, b, e) und (a, d, c) aus. D.h., der vierte eingestellte Code kann höchstens noch 5 weitere Codes ausschließen (die nicht schon vorher ausgeschlossen wurden).
- *Mit vier Codes* können wir *insgesamt* also *höchstens 26 Codes* ausschließen. Wir brauchen also im ungünstigsten Fall mehr als 4 Versuche.

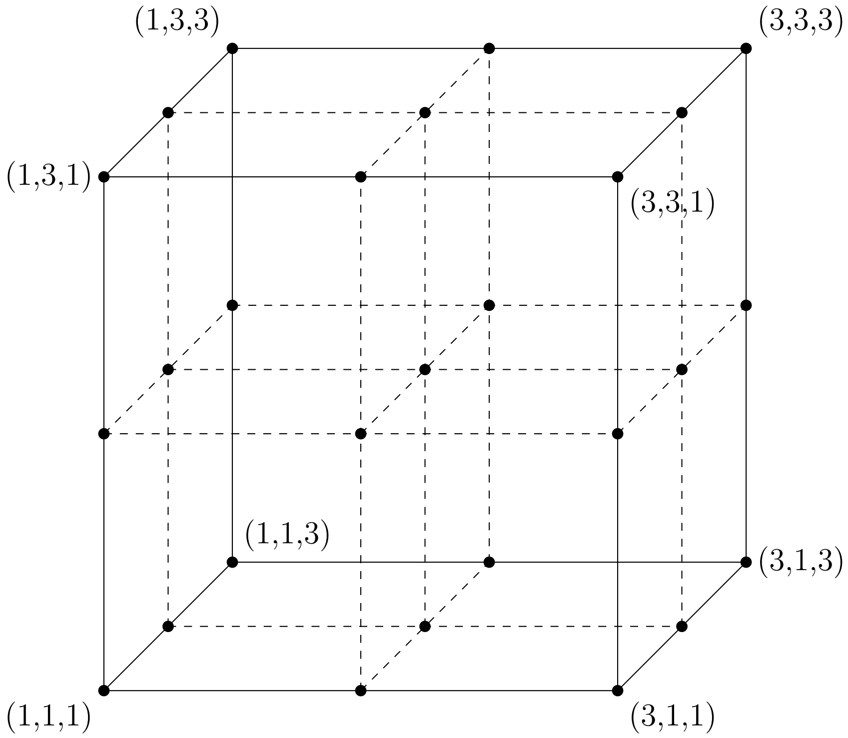
Dass bei geschicktem Vorgehen fünf Versuche reichen, kann durch ein Beispiel bewiesen werden.

- Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine ist

  (1,1,2) | (2,2,1) | (3,3,2) | (1,3,3) | (3,1,3).

Überprüfung, ob eine Kombination von Codes gewählt wurde, die das Schloss sicher „knackt“:

- Wir tragen alle Codes in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein (siehe den Würfel unten).
- Wir zeichnen durch alle so eingezeichneten Punkte jeweils drei Geraden (in Richtung jeder Koordinatenachse eine).
- Wird jeder Code, d.h. jeder der in dem unten dargestellten Würfel eingezeichnete Punkt von einer der eingezeichneten Geraden erfasst? Dann wurde jeder jeder Code „geknackt“.



a) Notwendige Bedingungen:

Nach Aufgabenstellung muss gelten:

$$\mathrm{a}+\mathrm{x} \geq 0 \ \text{ und } \ \mathrm{a}-\mathrm{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a} \tag{2}$$

Daraus folgt sofort

$$a \geq 0 \tag{3}$$

Aus der Ungleichung (1) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} > a$ folgt außerdem, dass $a \neq 0$ sein muss. Wäre nämlich $a = 0$, so müssten nach Aufgabenstellung $\sqrt{x}$ und $\sqrt{-x}$ reell sein, also $x = 0$. Mit (1) wäre dann $\sqrt{0}+\sqrt{-0} > 0$, also bestünde ein Widerspruch. Somit ist also $a \neq 0$.

Quadrieren der Ungleichung (1) liefert:

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}\right)^2 & > & a^2 \\ \Rightarrow & a+x+2\sqrt{a+x}\,\sqrt{a-x}\,+a-x & > & a^2 \\ \Rightarrow & 2a+2\sqrt{a^2-x^2} & > & a^2 \\ \Rightarrow & 2a+2\sqrt{a^2} & > & a^2 \\ \Rightarrow & 2a+2a & > & a^2 \quad \text{(wegen (3))} \\ \Rightarrow & 4a & > & a^2 \\ \Rightarrow & \multicolumn{3}{c}{a \neq 0 \ \text{(siehe bereits oben)} \quad \text{und} \quad a < 4} \end{array}$$

Zusammen mit (3) muss also gelten:

$$0 < a < 4 \tag{4}$$

Hinreichende Bedingung:

Für jedes a mit der Eigenschaft (4) existiert tatsächlich eine Lösung x von (1), nämlich $x = 0$.

Begründung:

$$\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0} > a \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a} > a \quad \Leftrightarrow \quad 2 > \sqrt{a}$$

Dies ist wahr für alle a mit $0 < a < 4$.

Deshalb und wegen (4) besitzt (1) *genau* für die reellen Zahlen a mit $0 < a < 4$ mindestens eine Lösung x im Sinne der Aufgabe.

b) Es wird vorausgesetzt: $0 < a \leq 2$.

Quadrieren der Ungleichung (1) liefert folgende äquivalente Umformungen:

$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} & > & a \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}\right)^2 & > & a^2 \\ \Leftrightarrow & a+x+2\sqrt{a+x}\,\sqrt{a-x}\,+a-x & > & a^2 \\ \Leftrightarrow & 2a+2\sqrt{a^2-x^2} & > & a^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a^2-x^2} & > & \frac{1}{2}\,a\,(a-2) \quad (5) \end{array}$$

1. Fall: $0 < a < 2$. Da die rechte Seite der Ungleichung (5) negativ ist, ist sie für alle x mit (2) erfüllt. Also gilt in diesem Fall $-a \leq x \leq a$.

2. Fall: $a = 2$. In diesem Fall nimmt (5) folgende Form an:

$\sqrt{4-x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2.$