Prof. Dr. Helga Baum
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität Berlin

Eichfeldtheorie

Eine Einführung in mathematische Konzepte

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Dieses Skript ist enthält einige ausgewählte Abschnitte aus meiner Vorlesung über Eichfeldtheorie, die ich seit Anfang der 90er Jahre mehrfach an der Humboldt-Universität unter dem Titel Hauptfaserbündel und Zusammenhänge bzw. Eichfeld- und Holonomietheorie als Teil meines Differentialgeometrie-Kurses für Studenten im Hauptstudium gehalten habe. Ich habe dieses Skript als begleitendes Studienmaterial für den Kompaktkurs "Einführung in die Eichfeldtheorie" zusammengestellt, den ich an der Humboldt-Universität vom 31.03.05 -02.04.05 durchgeführt habe. Dabei setze ich voraus, dass der Leser mit der Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten vertraut ist.

Dieser Kurs hat das Ziel, die wichtigsten Begriffe der Eichfeldtheorie einzuführen. Es wird erklärt, was Hauptfaserbündel und assoziierte Faserbündel sind, was man unter einem Zusammenhang in einem Hauptfaserbündel versteht, was seine Krümmung und seine Holonomiegruppe ist. An Ende des Kurses soll der Leser z.B. verstehen, was Krümmung und Holonomie mit der Existenz paralleler Schnitte zu tun haben.

Der Kompaktkurs war nicht lang genug, um konkrete Anwendungen dieser Konzepte zu behandeln. Solchen Anwendungen wird man sowohl in der Differentialgeometrie bei der Bearbeitung geometrischer Probleme als auch in der theoretischen Physik bei der mathematischen Modellierung physikalischer Wechselwirkungen noch oft begegnen.

Für diejenigen, die sich wundern werden, dass der Name Eichfeld außer im Titel im ganzen Skript nicht vorkommt, sei hier bemerkt, dass "Eichfeld" der von Physikern benutzte Name für die Zusammenhangsform in einem Hauptfaserbündel ist.

Ich habe vor vielen Jahren selbst an der Humboldt-Universität studiert und hier viele Vorlesungen über Differentialgeometrie, insbesondere auch über Liesche Gruppen und homogene Räume und über Differentialgeometrie auf Faserbündeln bei Prof. Dr. Rolf Sulanke gehört, von denen ich sehr profitiert habe. Vieles in meinen eigenen Vorlesungen basiert auf dem bei ihm Gelernten. Ich möchte mich deshalb auch an dieser Stelle nach langer Zeit nochmals bei ihm für diese Vorlesungen bedanken und die Gelegenheit nutzen, ihm zu seinem diesjährigen 75. Geburtstag alles Gute zu wünschen.

Kapitel 1

Liesche Gruppen und homogene Räume

1.1 Liesche Gruppen und ihre Algebren

Zu den grundlegenden Objekten, die in der Eichfeldtheorie auftreten, gehören Gruppen mit differenzierbarer Struktur. Im ersten Kapitel werden wir grundlegende Eigenschaften und Aussagen über solche Gruppen behandeln, die wir später benötigen werden.

Definition Eine *Liesche Gruppe G* ist eine Gruppe, die mit einer differenzierbaren Struktur[1] versehen ist, für die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,a) &\mapsto g \cdot a^{-1} \quad , \quad g,a \in G. \end{aligned}$$

glatt ist.

Beispiele:

1. Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$ mit der Addition von Vektoren als Gruppenoperation.
2. Die Mannigfaltigkeit $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der Multiplikation von komplexen Zahlen als Gruppenoperation.
3. Die Gruppen $GL(n,\mathbb{R})$ bzw. $GL(n,\mathbb{C})$ als offene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. des $\mathbb{R}^{(2n)^2}$.
4. Seien G und H Liesche Gruppen. Dann ist das Gruppenprodukt $G \times H$, versehen mit dem Produkt der differenzierbaren Strukturen, eine Liesche Gruppe.
5. In Kapitel 1.3 werden wir zeigen, daß jede abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe wieder eine Liesche Gruppe ist. Insbesondere sind also die Gruppen $O(n), SO(n), SL(n,\mathbb{R}), U(n), SU(n)$ und $Sp(n)$ Liesche Gruppen.

[1] Alle in diesem Skript betrachteten Mannigfaltigkeiten sind glatt (d.h. C^∞). Wir sagen oft kurz nur Mannigfaltigkeit. Mit differenzierbarer Struktur ist immer eine glatte Struktur gemeint.

6. Die Gruppe aller Isometrien und die Gruppe aller konformen Abbildungen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit sind Liesche Gruppen. (Dies ist ein tiefer liegender Satz der Differentialgeometrie, den wir hier nicht beweisen werden).

Definition: Sei V ein Vektorraum[2] und $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung, die die Jacobi-Identität:

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0 \quad \text{für alle } u,v,w \in V$$

erfüllt. Dann heißt $(V,[\cdot,\cdot])$ *Lie-Algebra* und $[\cdot,\cdot]$ *Kommutator* oder *Lie-Klammer*.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ mit $[\cdot,\cdot] := 0$.
2. $\mathbb{R}^3$ mit dem durch das Vektorprodukt gegebenen Kommutator: $[v,w] := v \times w$.
3. Jede assoziative Algebra $(A,\cdot)$ mit dem Kommutator $[a,b] := a \cdot b - b \cdot a$. Insbesondere ist die Algebra $End(V)$ aller Endomorphismen eines Vektorraumes eine Lie-Algebra.
4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Der Vektorraum $\mathcal{X}(M)$ der glatten Vektorfelder auf M mit dem Vektorfeld-Kommutator ist eine Lie-Algebra.
5. Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist der Vektorraum aller Killingfelder mit dem Vektorfeld-Kommutator eine Lie-Algebra.

Wir wollen nun jeder Lieschen Gruppe G eine endlich-dimensionale reelle Lie-Algebra zuordnen. Dazu führen wir zunächst folgende Bezeichnungen ein. Für ein festes Element $g \in G$ heißen die Diffeomorphismen

$$\begin{aligned}
L_g &: x \in G \longrightarrow g \cdot x \in G && \textit{Linkstranslation},\\
R_g &: x \in G \longrightarrow x \cdot g \in G && \textit{Rechtstranslation},\\
\alpha_g &= L_g \circ R_g^{-1} : G \longrightarrow G && \textit{innerer Automorphismus}.
\end{aligned}$$

Ist $F : M \to M$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M, so sei $dF(X)$ das durch

$$dF(X)(x) := dF_{F^{-1}(x)} X(F^{-1}(x)) \quad , \quad x \in M$$

definierte Vektorfeld. Bekanntlich gilt

$$dF[X,Y] = [dFX, dFY] \quad \text{für alle } X,Y \in \mathcal{X}(M). \qquad (*)$$

[2] Wir werden in diesem Skript nur reelle und komplexe Vektorräume betrachten.

Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ auf einer Lieschen Gruppe G heißt *linksinvariant (rechtsinvariant)*, falls $dL_g X = X$ (bzw. $dR_g X = X$) für alle $g \in G$ gilt. Wegen (*) ist der Vektorraum

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{X}(G) \mid \quad X \text{ ist linksinvariant}\}$$

mit dem Vektorfeld-Kommutator $[\cdot,\cdot]$ eine Lie-Algebra.

Definition: Die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ heißt *Lie-Algebra der Lie-Gruppe G*.

Offensichtlich ist jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ durch den Vektor $X(e) \in T_eG$ im Tangentialraum an das 1-Element $e \in G$ eindeutig bestimmt. Deshalb werden wir im folgenden oft $\mathfrak{g}$ und T_eG identifizieren.

Beispiel 1: Sei $G = GL(n, \mathbb{R})$ die Lie-Gruppe aller invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen. Die zugehörige Lie-Algebra ist der Vektorraum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen mit dem Kommutator

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \quad , \quad X, Y \in \mathfrak{g} :$$

Da $G = GL(n, \mathbb{R})$ eine offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, ist der Tangentialraum T_EG an die Einheitsmatrix mit dem $\mathbb{R}^{n^2} = \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ zu identifizieren. Sei $X \in T_EG$ und $\gamma_X : I \to G$ eine glatte Kurve in $G = GL(n, \mathbb{R})$ mit $\gamma_X(0) = E$ und $\gamma_X'(0) = X$. Für das durch X erzeugte linksinvariante Vektorfeld $\tilde{X}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{X}(A) &= dL_A(X) = \frac{d}{dt}(L_A(\gamma_X(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(A \circ \gamma_X(t))_{t=0} = A \circ X. \end{aligned}$$

Der Kommutator von Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten kann durch die Richtungsableitung berechnet werden:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [\tilde{X}, \tilde{Y}](E) = \tilde{X}(\tilde{Y})(E) - \tilde{Y}(\tilde{X})(E) \\ &= \frac{d}{dt}(\tilde{Y}(\gamma_X(t)))_{t=0} - \frac{d}{dt}(\tilde{X}(\gamma_Y(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_X(t) \circ Y - \gamma_Y(t) \circ X))_{t=0} \\ &= X \circ Y - Y \circ X. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Sind $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ und $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ Lie-Algebren, so ist die direkte Summe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ der Vektorräume und dem Kommutator

$$[X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] := [X_1, X_2]_{\mathfrak{g}} + [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}} \quad , \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$$

eine Lie-Algebra. Sind G und H Liesche Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, so ist $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ die Lie-Algebra der Lieschen Gruppe $G \times H$.

Definition: 1. Seien G_1 und G_2 Liesche Gruppen. Eine Abbildung $\psi : G_1 \to G_2$ heißt *Homomorphismus der Lieschen Gruppen*, falls ψ ein glatter Gruppen-Homomorphismus ist.
2. Seien $(V_1, [\cdot,\cdot]_1), [V_2, [\cdot,\cdot]_2)$ zwei Lie-Algebren und $\varphi : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. φ heißt *Lie-Algebren-Homomorphismus*, falls

$$[\varphi(v), \varphi(w)]_2 = [v, w]_1 \qquad \text{für alle } v, w \in V_1.$$

Satz 1.1 *Sei $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Homomorphismus zwischen zwei Lieschen Gruppen und seien $\mathfrak{g}_1$ bzw. $\mathfrak{g}_2$ die Lie-Algebren von G_1 bzw. G_2. Für $X \in \mathfrak{g}_1$ bezeichne $\psi_* X \in \mathfrak{g}_2$ das durch den Vektor $d\psi_e(X(e)) \in T_e G_2$ definierte linksinvariante Vektorfeld. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi_* : \mathfrak{g}_1 &\longrightarrow \mathfrak{g}_2 \\ X &\longmapsto \psi_* X \end{aligned}$$

ein Homomorphismus der Lie-Algebren.

Beweis: Da das Differential $d\psi_e$ linear ist, ist auch ψ_* eine lineare Abbildung. Wir zeigen, daß die Vektorfelder X und $\psi_* X$ ψ-verknüpft sind, d.h. daß

$$(\psi_* X)(\psi(g)) = (d\psi_g)(X(g)) \quad \text{für alle } g \in G.$$

Auf Grund der Definition von $\psi_* X$ gilt:

$$\begin{aligned} (\psi_* X)(\psi(g)) &= dL_{\psi(g)}(d\psi_e(X(e)) \\ &= d(L_{\psi(g)} \circ \psi)_e X(e) \\ &= d(\psi \circ L_g)_e X(e) \\ &= d\psi_g(dL_g X(e)) = d\psi_g(X(g)). \end{aligned}$$

Für den Kommutator ψ-verknüpfter Vektorfelder gilt

$$[\psi_* X, \psi_* Y] = \psi_*[X, Y].$$

Folglich ist ψ_* ein Lie-Algebren-Homomorphismus. □

Definition: Sei G eine Lie-Gruppe und $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ eine Lie-Algebra.

1. $H \subset G$ heißt *Liesche Untergruppe von G*, falls H eine Untergruppe und eine Untermannigfaltigkeit[3] von G ist.
2. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt *Liesche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$*, falls $\mathfrak{h}$ ein linearer Unterraum ist und $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ gilt.

[3] Mit Untermannigfaltigkeiten sind in diesem Skript eingebettete Untermannigfaltigkeiten gemeint. Die Topologie von H stimmt also mit der durch G induzierten Topologie überein.

3. Ein linearer Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt *Ideal von* $\mathfrak{g}$, falls $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Liesche Untergruppen sind also selbst Liesche Gruppen, Liesche Unteralgebren selbst Lie-Algebren. Ist $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so das Bild von φ eine Unteralgebra in $\mathfrak{g}_2$ und der Kern von φ ein Ideal in $\mathfrak{g}_1$. Ist H eine Liesche Untergruppe der Lieschen Gruppe G, so ist die Lie-Algebra von H eine Liesche Unteralgebra der Lie-Algebra von G.

1.2 Die Exponential-Abbildung einer Lieschen Gruppe

Im folgenden Abschnitt beweisen wir spezielle Eigenschaften von linksinvarianten Vektorfeldern auf Lieschen Gruppen, die es uns gestatten, angepaßte Koordinaten einzuführen.

Satz 1.2 *Sei G eine Liesche Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Sei $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld und φ_X die maximale Integralkurve von X durch das neutrale Element $e \in G$. Dann gilt:*

1. *φ_X ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*
2. *$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ ist ein Homomorphismus der Lieschen Gruppen, d.h.*
$$\varphi_X(0) = e \ \text{ und } \quad \varphi_X(s+t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$
3. *$\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $\varphi_X : I = (t_{\min}, t_{\max}) \subset \mathbb{R} \longrightarrow G$ die maximale Integralkurve von X durch e, d.h. $\varphi_X(0) = e$ und $\dot{\varphi}_X(t) = X(\varphi_X(t))$, wobei $\dot{\varphi}$ die Ableitung von φ nach t bezeichnet. Wir zeigen zunächst, daß für alle $s, t \in I$ mit $s + t \in I$

$$\varphi_X(s+t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t)$$

gilt. Sei dazu $s \in I$ ein fester Parameter und $g := \varphi_X(s) \in G$. Wir betrachten die glatten Kurven

$$\begin{aligned} \eta : \tau \in I \ &\longrightarrow \ g \cdot \varphi_X(\tau) \in G \\ \tilde{\eta} : \tau \in (t_{\min}-s, t_{\max}-s) \ &\longrightarrow \ \varphi_X(\tau + s) \in G. \end{aligned}$$

η und $\tilde{\eta}$ sind Integralkurven von X durch $g \in G$, denn $\eta(0) = g \cdot \varphi_X(0) = g$, $\tilde{\eta}(0) = \varphi_X(s) = g$ und

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(\tau) \ &= \ dL_g(\dot{\varphi}_X(\tau)) = dL_g(X(\varphi_X(\tau))) = X(g \cdot \varphi_X(\tau)) = X(\eta(\tau)) \\ \dot{\tilde{\eta}}(\tau) \ &= \ \dot{\varphi}_X(\tau + s) = X(\varphi_X(\tau + s)) = X(\tilde{\eta}(\tau)). \end{aligned}$$

Auf Grund der Eindeutigkeit von Integralkurven stimmen η und $\tilde{\eta}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap (t_{\min} - s, t_{\max} - s)$ überein. Somit gilt für alle $t \in I$ mit $t + s \in I$:

$$\eta(t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t) = \tilde{\eta}(t) = \varphi_X(s+t).$$

Wir zeigen nun, daß φ_X ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
Angenommen, $t_{\max} < \infty$. Sei $\alpha := \min(t_{\max}, |t_{\min}|)$. Wir betrachten die Kurve $\eta(s) := \varphi_X(\frac{\alpha}{2}) \cdot \varphi_X(s - \frac{\alpha}{2})$. Dann ist $\eta(0) = \varphi_X(\frac{\alpha}{2}) \cdot \varphi_X(-\frac{\alpha}{2}) = \varphi_X(0) = e$ und mit $g := \varphi_X(\frac{\alpha}{2})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(s) &= dL_g(\dot{\varphi}_X(s - \frac{\alpha}{2})) = dL_g(X(\varphi_X(s - \frac{\alpha}{2}))) \\
&= X(g \cdot \varphi_X(s - \frac{\alpha}{2})) = X(\varphi_X(\frac{\alpha}{2}) \cdot \varphi_X(s - \frac{\alpha}{2})) \\
&= X(\eta(s)).
\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß η die Integralkurve von X über $t_{\max}$ hinaus fortsetzt, im Widerspruch zur Maximalität des Definitionsbereiches I, also ist φ_X auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Wir zeigen abschließend, daß $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$.
Sei dazu $\delta(t) := \varphi_X(s \cdot t)$. Dann ist $\delta(0) = \varphi_X(0) = e$ und

$$\dot{\delta}(t) = s\dot{\varphi}_X(s \cdot t) = sX(\varphi_X(s \cdot t)) = sX(\delta(t))$$

Folglich ist δ die Integralkurve von sX durch e, d.h. $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$. □

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\exp \,:\, \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\
X &\longmapsto \varphi_X(1)
\end{aligned}$$

heißt *Exponentialabbildung von G*.

Nach Satz 1.2 ist $\varphi_X(t) = \varphi_{tX}(1) = \exp tX$ die maximale Integralkurve von X durch $e \in G$ und die Kurve $t \in \mathbb{R} \to g \cdot \exp tX$ die maximale Integralkurve von X durch $g \in G$.

Beispiel: Betrachten wir als Beispiel wieder die Gruppe aller invertierbaren Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$ mit ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Für diese Gruppe stimmt die Exponentialabbildung mit dem üblichen Exponential von Matrizen überein, d.h. es gilt

$$\exp X = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Als nächstes beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften der Exponentialabbildung.

Satz 1.3 *Die Abbildung* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *ist ein lokaler Diffeomorphismus um den Nullvektor* $o \in \mathfrak{g}$*. Weiterhin gilt*

1. $\exp(o) = e$
2. $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$

3. $\exp((t+s)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX) \quad s,t \in \mathbb{R},\ X \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Die Glattheit der Exponentialabbildung folgt aus den Standardsätzen über die glatte Abhängigkeit der Lösung von linearen Differentialgleichungen von den Anfangswerten. Die Eigenschaften 1., 2., 3. folgen aus Satz 1.2. Es bleibt zu zeigen, daß

$$d\exp_o : T_o\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG = \mathfrak{g}$$

ein Isomorphismus, d.h. exp ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}$ ist. Sei $X \in \mathfrak{g} = T_eG$. Dann gilt

$$d\exp_o(X) = \frac{d}{dt}(\exp(o+tX))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp tX)_{t=0} = X.$$

$d\exp_o$ ist also die Identität auf $\mathfrak{g}$. □

Mit Hilfe der Exponentialabbildung können wir spezielle Koordinaten auf der Lieschen Gruppe G einführen. Sei $W(e) \subset G$ eine offene Menge in G, die das diffeomorphe Bild einer sternförmigen Umgebung $V(o) \subset \mathfrak{g}$ ist. Für $g \in G$ setzen wir

$$W(g) := L_g(W(e)) \quad \text{und} \quad \varphi_g := \exp^{-1} \circ L_{g^{-1}} : W(g) \longrightarrow V(o).$$

Dann ist $(W(g), \varphi_g)$ eine zulässige Karte von G um g. Die Umgebung $W(g)$ heißt *Normalenumgebung* von g und die Koordinaten φ_g *Normalkoordinaten* um g.

Nach Satz 1.3 ist die durch ein Element $X \in \mathfrak{g}$ definierte Abbildung

$$f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp tX \ \in G$$

ein glatter Gruppenhomomorphismus. Wir zeigen als nächstes, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ nach G in dieser Form darstellbar ist.

Satz 1.4 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es ein $X \in \mathfrak{g}$ mit $\psi(t) = \exp tX$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ auch glatt.*

Beweis: Sei $W = \exp(V(0))$ eine Normalenumgebung um $e \in G$. Da $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ stetig ist und $\psi(0) = e$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\psi(t) \in W$ für alle t mit $|t| \leq \varepsilon$. Sei $Y \in V(0)$ der Vektor mit $\exp(Y) = \psi(\varepsilon)$ und $X := \frac{Y}{\varepsilon}$. Wir zeigen

$$\psi(t) = \exp(tX) =: f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dazu die Menge $K := \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = \psi(t)\} \subset \mathbb{R}$. Da $f, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ Gruppenhomomorphismen sind, ist $K \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe. K ist außerdem abgeschlossen und enthält 0 und ε. Jede nicht-triviale Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist entweder $\mathbb{R}$ selbst oder eine diskrete Gruppe der Form $K_d := \{n \cdot d \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wobei d das kleinste positive Element von K ist. Wir zeigen, daß $K = \mathbb{R}$ gilt.

Angenommen, es wäre $K = K_d$. Da $\varepsilon \in K$, ist $\frac{d}{2} < \varepsilon$. Somit folgt:

$$\Big(f\Big(\frac{d}{2}\Big)\Big)^2 = \Big(\exp\frac{d}{2}X\Big)^2 = \exp dX = f(d) = \psi(d) = \Big(\psi\Big(\frac{d}{2}\Big)\Big)^2.$$

Die Gruppenelemente $f(d)$ und $\psi(d)$ liegen in W. Wegen $\exp^{-1}(f(\frac{d}{2})^2) = 2\exp^{-1}(f(\frac{d}{2})) = \exp^{-1}(\psi(\frac{d}{2})^2) = 2\exp^{-1}(\psi(\frac{d}{2}))$ erhalten wir $\psi(\frac{d}{2}) = f(\frac{d}{2})$. Damit wäre aber d nicht das kleinste Element von K, also gilt $K = \mathbb{R}$.
□

In Verallgemeinerung des eben bewiesenen Resultates zeigen wir, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus zwischen Lieschen Gruppen glatt ist.

Satz 1.5 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra, für die eine Vektorraumzerlegung $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ gegeben ist. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r &\longrightarrow G \\ v_1 + \ldots + v_r &\longmapsto \exp(v_1) \cdot \ldots \cdot \exp(v_r) \end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu Satz 1.3. Wir betrachten das Differential

$$d\phi_o : T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \to T_eG = \mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r.$$

Für $X_i \in V_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d\phi_o(X_i) &= \frac{d}{dt}(\phi(tX_i)) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(\exp(o) \cdot \ldots \cdot \exp(tX_i) \cdot \ldots \cdot \exp(o)\Big) \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX_i)) \mid_{t=0} = X_i. \end{aligned}$$

□

Satz 1.6 *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\psi : G_1 \to G_2$ zwischen Lieschen Gruppen G_1 und G_2 ist glatt.*

Beweis: Sei $\mathfrak{g}_1$ die Lie-Algebra von G_1 und $\mathfrak{g}_2$ die Lie-Algebra von G_2. Wir fixieren eine Basis $(X_1, \ldots, X_n)$ in $\mathfrak{g}_1$. Dann ist $\psi_i : t \in \mathbb{R} \to \psi(\exp tX_i) \in G_2$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Nach Satz 1.4 existiert ein $Y_i \in \mathfrak{g}_2$, so daß

$$\psi_i(t) = \psi(\exp tX_i) = \exp tY_i.$$

Die Abbildung $\chi : \mathfrak{g}_1 \to G_2$ definiert durch

$$\chi(t_1X_1 + \ldots + t_nX_n) := \exp(t_1Y_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_nY_n)$$

ist glatt. Sei $\phi : \mathfrak{g}_1 \to G_1$ die in Satz 1.5 betrachtete Abbildung

$$\phi(t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n) = \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n).$$

Da ϕ ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}_1$ ist, gilt $\psi = \chi \circ \phi^{-1}$ auf einer Normalenumgebung $W(e) \subset G_1$. Das zeigt, daß ψ auf $W(e)$ glatt ist. Da

$$\psi(g \cdot a) = \psi(g) \cdot \psi(a) = L_{\psi(g)}(\psi(a)),$$

ist ψ auch glatt auf der Normalenumgebung $W(g) = L_g(W(e))$ von $g \in G_1$. □

Satz 1.7 *Sei $\psi : G_1 \to G_2$ ein Lie-Gruppenhomomorphismus. Dann gilt*

$$\psi(\exp X) = \exp(\psi_* X)$$

für alle X in der Lie-Algebra von G_1.

Beweis: Wir betrachten $\gamma(t) := \psi(\exp tX)$. Dann gilt $\gamma(0) = \psi(e) = e$ und

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= d\psi_{\exp tX}(X(\exp tX)) = d\psi_{\exp tX}(dL_{\exp tX}(X(e))) \\ &= dL_{\psi(\exp tX)} d\psi_e(X(e)) = (\psi_* X)(\psi(\exp(tX))) \\ &= (\psi_* X)(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Folglich ist γ die Integralkurve von ψ_* durch e, was die Behauptung liefert. □

Satz 1.8 *Sei G eine Liesche Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann gilt*

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp(t(X + Y) + O(t^2)),$$

wobei $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $|t| < \varepsilon$, ε hinreichend klein.

Beweis: Wir wählen Normalkoordinaten (W, φ) um $e \in G$. Sei dazu $(X_1, \ldots X_n)$ eine Basis in $\mathfrak{g}$ und $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ die Karte

$$\varphi(\exp(x_1 X_1 + \ldots + x_n X_n)) = (x_1, \ldots x_n).$$

Da die Multiplikation in G stetig ist, gibt es eine Umgebung U des neutralen Elementes mit $U \cdot U \subset W$. Wir betrachten die Gruppenmultiplikation in den Karten $(U \times U, \varphi \times \varphi)$ und (W, φ):

$$\begin{tikzcd} U \times U \subset G \times G \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"] & W \subset G \arrow[d, "\varphi"] \\ \tilde{U} \times \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & \tilde{W} \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\tilde{\mu}(x,0) = x$ und $\tilde{\mu}(0,y) = y$. Die Taylorformel für $\tilde{\mu}$ um $(0,0)$ ergibt:

$$\tilde{\mu}(x,y) = \tilde{\mu}(0,0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_j}(0,0)x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial y_j}(0,0)y_j + O(2) = 0 + x + y + O(2),$$

wobei $O(2)$ für Ableitungen ab der zweiten Ordnung steht. Damit ist gezeigt, daß

$$\exp(X + Y + O(2)) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

für hinreichend kleine Vektoren X und Y. □

Satz 1.8 ist ein Spezialfall der Baker-Campell-Hausdorff-Formel.[4] Sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ zwei Vektoren, für die das Produkt $\exp(X) \cdot \exp(Y)$ in einer Normalenumgebung $W(e) \subset G$ liegt. Wie wir wissen, existiert genau ein Vektor $X * Y \in \exp^{-1}(W) \subset \mathfrak{g}$ mit $\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X * Y)$. Der Vektor $X \star Y$ heißt Campell-Hausdorf-Produkt von X und Y und hat folgende Darstellung

$$X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\{[[X,Y],X] + [[Y,X],X]\} +$$
$$+ \text{ weitere Kommutatoren.}$$

Als Anwendung beweisen wir die folgende Aussage über die Struktur abelscher Gruppen

Satz 1.9 *Sei G eine zusammenhängende abelsche Gruppe. Dann ist G diffeomorph zu einem Produkt $T^k \times \mathbb{R}^m$ aus einem Torus und einem Euklidischen Raum.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ im Fall abelscher Gruppen ein Gruppenhomomorphismus ist. Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Satz 1.3 und Satz 1.8

$$\begin{aligned} \exp(X) \cdot \exp(Y) &= \Big(\exp(\frac{X}{N})\Big)^N \cdot \Big(\exp(\frac{Y}{N})\Big)^N \\ &= \Big(\exp(\frac{X}{N}) \cdot \exp(\frac{Y}{N})\Big)^N \\ &= \Big(\exp(\frac{1}{N}(X+Y) + 0(\frac{1}{N^2}))\Big)^N \\ &= \exp(X + Y + 0(\frac{1}{N})) \end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ folgt $\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X + Y)$. Da G eine zusammenhängende Liesche Gruppe ist, wird sie von der Normalenumgebung $W(e) \subset G$ erzeugt, d.h. jedes $g \in G$ ist in der Form

$$g = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdot \ldots \cdot \exp(X_n) = \exp(X_1 + \ldots + X_n), \quad X_i \in \mathfrak{g}$$

[4] für die genaue Formel siehe S. Helgason: Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces

darstellbar. Folglich ist $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Da $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $K = \operatorname{Ker} \exp \subset \mathfrak{g}$ ein diskreter Normalteiler. Also gilt

$$G \simeq \mathfrak{g} \mid_K = T^k \times \mathbb{R}^m.$$

□

1.3 Abgeschlossene Untergruppen von Lieschen Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß jede abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe selbst eine Liesche Gruppe ist.
Im folgenden sei G eine Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir werden auf H einen glatten Atlas definieren, der H zu einer Untermannigfaltigkeit von G macht. Dazu beweisen wir zunächst einige Hilfssätze.

Lemma 1.1 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge von nichttrivialen Vektoren in $\mathfrak{g}$ mit $\exp(X_n) \in H$ für jedes n. Wir setzen voraus, dass der Grenzwert $X := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{\|X_n\|}$ existiert. Dann gilt*

$$\exp(tX) \in H \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ eine fixierte Zahl und $c_n := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k\cdot \| X_n \| < t\}$. Dann gilt: $c_n \| X_n \| < t \leq (c_n + 1) \| X_n \|$. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \| X_n \| = t$. Mit Satz 1.3 erhalten wir

$$\exp(c_n X_n) = (\exp X_n)^{c_n} = \exp(c_n \| X_n \| \cdot \frac{X_n}{\| X_n \|}) \in H.$$

Somit konvergiert die Folge $(\exp(c_n X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\exp tX$. Da H abgeschlossen ist, folgt $\exp tX \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Lemma 1.2 *Die Menge $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Ist $X \in \mathfrak{h}$ und $s \in \mathbb{R}$, so folgt aus der Definition von $\mathfrak{h}$, daß $sX \in \mathfrak{h}$. Seien $X, Y \in \mathfrak{h}$. Nach Satz 1.8 gilt für hinreichend kleine t

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp(t(X + Y) + O(t^2)) \in H.$$

Sei $t(X + Y) + O(t^2) = t(X + Y + Z(t))$. Wir wählen eine Nullfolge hinreichend kleiner positiver Zahlen $t_n \to 0$ so, daß

$$X_n = t_n(X + Y + Z(t_n)) \neq 0.$$

Dann gilt $\exp X_n \in H$ und

$$\frac{X_n}{\| X_n \|} = \frac{X+Y+Z(t_n)}{\| X+Y+Z(t_n) \|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{X+Y}{\| X+Y \|}.$$

Aus Lemma 1.1 folgt $\exp(t\frac{X+Y}{\|X+Y\|}) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $X+Y \in \mathfrak{h}$. □

Lemma 1.3 *Sei $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \;\forall t \in \mathbb{R}\}$ und $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement zu $\mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Dann existiert eine offene Umgebung $\tilde{V}(o) \subset \mathfrak{m}$ des Nullvektors $o \in \mathfrak{m}$ so, daß $\exp(\tilde{V}(o)\backslash\{o\}) \cap H = \emptyset$.*

Beweis: Angenommen, für jede Umgebung $\tilde{V}(o)$ des Nullvektors in $\mathfrak{m}$ gilt $\exp(\tilde{V}(o)\backslash\{o\}) \cap H \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Nullfolge $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{m}$ mit $\exp(\tilde{X}_n) \in H$. Sei $\mathfrak{k}$ die Menge

$$\mathfrak{k} := \{\tilde{X} \in \mathfrak{m} \mid 1 \leq \| \tilde{X} \| \leq 2\}$$

und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $c_n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $c_n\tilde{X}_n \in \mathfrak{k}$ gilt. Da $\mathfrak{k}$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(c_{n_i}\tilde{X}_{n_i})_i$, die gegen ein $X \in \mathfrak{k}$ konvergiert. Dann gilt

$$\frac{\tilde{X}_{n_i}}{\| \tilde{X}_{n_i} \|} = \frac{c_{n_i}\tilde{X}_{n_i}}{\| c_{n_i}\tilde{X}_{n_i} \|} \longrightarrow \frac{\tilde{X}}{\| \tilde{X} \|} .$$

Aus dem Lemma 1.1 folgt $\exp(t\frac{\tilde{X}}{\|\tilde{X}\|}) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$.
Da aber $\tilde{X} \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{m}$ im Komplement von $\mathfrak{h}$ liegt, erhalten wir $\tilde{X} = o$ im Widerspruch zu $1 \leq \| \tilde{X} \| \leq 2$. □

Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 1.10 *Sei G eine Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann ist H eine Liesche Untergruppe von G mit der Lie-Algebra*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \;\; \textit{für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis: Sei r die Dimension von $\mathfrak{h}$. Wir zeigen, daß H eine r-dimensionale Untermannigfaltigkeit von G ist. Dazu ist zu zeigen, daß es um jeden Punkt $a \in H$ eine Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ von G gibt mit

$$\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap \{x_1 = \ldots = x_{n-r} = 0\}. \qquad (*)$$

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ und $\phi : \mathfrak{g} \to G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ X \oplus Y &\longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.5 ist ϕ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $V = V_m \times V_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ um den Nullvektor, wobei $V_m \subset \mathfrak{m}$ entsprechend Lemma 1.3 so gewählt werden kann, daß $\exp(V_{\mathfrak{m}}\backslash\{o\}) \cap H = \emptyset$ gilt. Dann ist $(U = \phi(V), \phi^{-1})$ eine zulässige Karte von G um $e \in G$ mit der Eigenschaft

$$\phi^{-1}(U \cap H) = \{o\} \times V_{\mathfrak{h}} = \phi^{-1}(U) \cap (\{o\} \times \mathbb{R}^r).$$

(U, ϕ^{-1}) ist also eine Untermannigfaltigkeitskarte um $e \in H$. Für ein beliebiges Element $a \in H$ erfüllt die Karte $(L_a(U), \phi^{-1} \circ L_{a^{-1}})$ die Bedingung $(*)$. Folglich ist H eine Untermannigfaltigkeit von G, also eine Liesche Untergruppe.
Da $\exp tX$ die Integralkurve von X durch $e \in G$ ist, gilt

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \subset T_eH.$$

Da die Vektorräume $\mathfrak{h}$ und T_eH die gleiche Dimension haben, folgt $\mathfrak{h} = T_eH$. Also ist $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H. $\square$

Beispiel 1: $H = SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.
H ist das Urbild des regulären Wertes $0 \in \mathbb{R}$ der Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{n^2} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A - 1 \end{aligned}$$

und somit eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$ von $GL(n; \mathbb{R})$. Nach Satz 1.10 ist $SL(n, \mathbb{R})$ eine Liesche Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \mid \det(e^{tX}) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Aus $\det(e^X) = e^{TrX}$ folgt $\frac{d}{dt}(\det(e^{tX}))|_{t=0} = TrX$ und somit $TrX = 0$ für jedes $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Ein Dimensionsvergleich ergibt dann

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid TrX = 0\}.$$

Beispiel 2: $H = O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = E\}$.
Wir betrachten die glatte Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n^2} &\to \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \\ A &\mapsto \text{obere Dreiecksmatrix von } (AA^t - E) \end{aligned}$$

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist das Urbild $F^{-1}(o)$ des Nullvektors o und dieser ist ein regulärer Wert von F. Folglich ist $O(n)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ von $GL(n, \mathbb{R})$. Nach Satz 1.10 ist $O(n)$ eine Liesche Untergruppe mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid e^{tX} \circ ((e^{tX}))^t = E \ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Leiten wir die Kurve $t \in \mathbb{R} \to e^{tX} \circ (e^{tX})^t$ ab, so folgt, dass jedes $X \in \mathfrak{o}(n)$ schiefsymmetrisch ist. Ein Dimensionsvergleich ergibt dann

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^t = 0\}.$$

Beispiel 3: $H = SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.
$SO(n)$ ist die Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix in $O(n)$. Folglich stimmen die Lie-Algebren von $O(n)$ und $SO(n)$ überein.

Beispiel 4: $H = U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = E\}$.
Dies ist eine n^2-dimensionale reelle Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^t = 0\}.$$

Beispiel 5: $H = SU(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = E \text{ und } \det(A) = 1\}$.
Dies ist eine $(n^2 - 1)$-dimensionale reelle Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^t = 0 \text{ und } Tr(X) = 0\}.$$

1.4 Homogene Räume

In diesem Abschnitt betrachten wir Mannigfaltigkeiten, die sich als Faktorraum einer Lieschen Gruppe nach einer ihrer abgeschlossenen Untergruppen darstellen lassen.

Definition: Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liesche Gruppe. Man sagt: *G wirkt von links auf M*, falls eine glatte Abbildung $\phi : (g, x) \in G \times M \longmapsto g \cdot x \in M$ gegeben ist, für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $l_g : x \in M \longmapsto g \cdot x \in M$ ein Diffeomorphismus.
2. $x = e \cdot x$ für alle $x \in M$, wobei e das 1-Element von G ist.
3. $g \cdot (a \cdot x) = (g \cdot a) \cdot x$ für alle $x \in M$, $g, a \in G$.

Ist eine solche Wirkung von G auf M gegeben, so nennt man das Paar $[M, G]$ auch *Liesche Transformationsgruppe*. Eine G-Wirkung $\phi : G \times M \to M$ heißt *transitiv*, falls zu jedem Paar $x, y \in M$ ein $g \in G$ existiert mit $g \cdot x = y$. Die Wirkung heißt *einfach-transitiv*, falls sie transitiv ist und das Element g eindeutig bestimmt ist. Sie heißt *frei*, falls $l_g : M \to M$ fixpunktfrei für alle $g \neq e$ ist. Die Wirkung heißt *effektiv*, falls $l_g = id_M$ nur für $g = e$ gilt. Analog definiert man diese Begriffe für eine Rechtswirkung.

Definition: Eine Mannigfaltigkeit M, auf der eine Liesche Gruppe G transitiv wirkt, heißt *homogener Raum*.

Beispiel 1: Die Liesche Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ wirkt von links auf $\mathbb{R}^n$ durch die Matrizenmultiplikation $\phi(A,x) := Ax$. Diese Wirkung ist transitiv auf $\mathbb{R}^n\backslash\{o\}$.

Beispiel 2: Die orthogonale Gruppe $O(n)$ wirkt transitiv auf der Sphäre $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \|= r\}$ vom Radius r im $\mathbb{R}^n$, aber nicht transitiv auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Beispiel 3: Wir definieren eine Wirkung der Lieschen Gruppe $G = SL(2,\mathbb{C})$ der komplexen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 auf dem 4-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$. Dazu identifizieren wir zunächst den Minkowski-Raum mit dem Vektorraum $\mathcal{H}(2)$ der hermiteschen (2×2)-Matrizen: Seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen und $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{1,3} &\longrightarrow \mathcal{H}(2) \\ x = (x^0,x^1,x^2,x^3) &\longmapsto X(x) := \sum_{k=0}^{3} x^k\sigma_k = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Die inverse Abbildung ist durch

$$X \in \mathcal{H}(2) \longmapsto (x^k := \frac{1}{2}Tr(\sigma_k \circ X))_{k=0,\ldots,3} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

gegeben. Ist $X \in \mathcal{H}(2)$ und $A \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$, so ist $AX\bar{A}^t$ ebenfalls in $\mathcal{H}(2)$. Dies gestattet es, die folgende Wirkung von $SL(2,\mathbb{C})$ auf dem Minkowski-Raum zu definieren:

$$\begin{aligned} \phi : SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{1,3} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathcal{H}(2) \\ (A,x) &\longmapsto AX(x)\bar{A}^t \end{aligned}$$

Für die Determinante der hermiteschen Matrix $X(x)$ gilt $\det X(x) = (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$. Folglich erhält die Transformation

$$\begin{aligned} l_A : \mathbb{R}^{1,3} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \\ x &\longmapsto \phi(A,x) \end{aligned}$$

die Minkowski-Metrik $\eta(x,y) = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$. Wir bemerken hier, daß die dadurch definierte Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{O}_0(1,3) \\ A &\longmapsto l_A \end{aligned}$$

eine 2-fache Überlagerung der eigentlichen Lorentzgruppe ist.

Sei G eine Liesche Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Wir nennen zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ äquivalent ($g_1 \sim_H g_2$), falls es ein $h \in H$ mit $g_1 = g_2 \cdot h$ gibt. Mit $[g] := \{g \cdot h \mid h \in H\} = gH$ sei die Äquivalenzklasse eines Elementes $g \in G$ bezeichnet.

$$G/H := \bigcup_{g \in G} [g] = \bigcup_{g \in G} gH$$

sei die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : G \to G/H$ die natürliche Projektion $\pi(g) = [g]$. Wir zeigen nun, daß der Faktorraum G/H ein homogener Raum ist.

Satz 1.11 *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe G. Dann existiert auf dem Faktorraum G/H eine Mannigfaltigkeitsstruktur so, daß gilt:*

1. *Die Projektion $\pi : G \to G/H$ ist glatt.*
2. *Mit der Linkswirkung $(g, [a]) \in G \times G/H \mapsto [ga] \in G/H$ ist G/H ein homogener Raum.*
3. *Es existieren "lokale Schritte in $\pi : G \to G/H$", d.h. zu jeder Äquivalenzklasse $[a] \in G/H$ existiert eine Umgebung $W([a]) \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $s_{[a]} : W([a]) \to G$ mit $\pi \circ s_{[a]} = id_{W([a])}$.*

Beweis: Wir versehen die Menge der Äquivalenzklassen G/H mit der durch $\pi : G \to G/H$ definierten Faktortopologie. Da H eine abgeschlossene Teilmenge von G und π eine offene Abbildung ist, ist G/H ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Wir definieren nun um jeden Punkt $[g] \in G/H$ eine Karte: Dazu verfahren wir wie im Beweis von Satz 1.10. Sei $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ und ϕ der lokale Diffeomorphismus um den Nullvektor $o \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ X \oplus Y &\longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y). \end{aligned}$$

Wir verkleinern die im Beweis von Satz 1.10 angegebene Umgebung $V = V_\mathfrak{m} \times V_\mathfrak{h}$ noch einmal auf eine Umgebung $W = W_\mathfrak{m} \times W_\mathfrak{h} \subset V_\mathfrak{m} \times V_\mathfrak{h}$ derart, daß $(\exp W)^{-1} \cdot \exp W \subset U$. Dann prüft man leicht nach, daß für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\varphi_{[g]} : W_\mathfrak{m} \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{L_g} G \xrightarrow{\pi} G/H$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Folglich ist $(\varphi_{[g]}(W_\mathfrak{m}), \varphi_{[g]}^{-1})$ eine Karte um $[g] \in G/H$. Für zwei solche Karten, deren Kartenbereiche einen gemeinsamen Durchschnitt haben, gilt $\varphi_{[a]}^{-1} \circ \varphi_{[g]}(X) = pr_\mathfrak{m} \circ \phi^{-1}(L_{a^{-1}g} \exp(X))$ für $X \in W_m$, wobei pr_m die Projektion von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Da alle Abbildungen auf der rechten Seite glatt sind, sind die Kartenübergänge glatte Abbildungen. Damit definiert

$$\mathcal{A} = \{(\varphi_{[g]}(W_m), \varphi_{[g]}^{-1}) \mid g \in G\}$$

einen glatten Atlas auf G/H. Wir zeigen nun, daß die Projektion $\pi : G \to G/H$ bezüglich dieser Mannigfaltigkeitsstruktur glatt ist. Dazu betrachten wir die Kartendarstellung von π um $g \in G$ in den Karten $(L_g \circ \phi(W), (L_g \circ \phi)^{-1})$ um $g \in G$ und $(\varphi_{[g]}(W_m), \varphi_{[g]}^{-1})$ um $[g] \in G/H$. Benutzt man die Definition von $\varphi_{[g]}$, so erhält man für die Kartendarstellung von π

$$\varphi_{[g]}^{-1} \circ \pi \circ (L_g \circ \phi) = pr_{\mathfrak{m}},$$

sie ist folglich glatt. Auf analoge Weise zeigt man die Glattheit der Linkswirkung von G auf G/H. Die Transitivität der Wirkung folgt aus den Gruppeneigenschaften von G. Somit ist G/H ein homogener Raum.
Lokale Schnitte für $\pi : G \to G/H$ erhält man auf folgende Weise:
Für $[g] \in G/H$ betrachten wir den Kartenbereich $W([g]) := \varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}})$ und die glatte Abbildung

$$s_{[g]} := L_g \circ \exp \circ \varphi_{[g]}^{-1} : W([g]) \longrightarrow G.$$

Sei $[a] \in W([g])$. Dann existiert genau ein $X_{\mathfrak{m}} \in W_{\mathfrak{m}}$ mit

$$[a] = \varphi_{[g]}(X_{\mathfrak{m}}) = \pi L_g \exp X_{\mathfrak{m}} = \pi L_g \exp \varphi_{[g]}^{-1}[a] = \pi(s_{[g]}[a]).$$

Folglich ist $s_{[g]}$ ein lokaler Schnitt. □

Wenn wir im folgenden von abgeschlossenen Untergruppen H einer Lieschen Gruppe G und von homogenen Räumen G/H reden, so seien diese immer mit den in Satz 1.10 und Satz 1.11 beschriebenen Mannigfaltigkeitsstrukturen versehen.

Wir zeigen als nächstes, daß sich jeder homogene Raum $[M, G]$ in der Form $M = G/H$ für eine geeignete abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ darstellen läßt. Für einen Punkt $x \in M$ bezeichnet $G_x \subset G$ den Stabilisator von x:

$$G_x := \{g \in G \mid \; gx = x\}$$

G_x ist offensichtlich eine abgeschlossene Untergruppe von G. Es gilt

Satz 1.12 *Sei G eine Liesche Gruppe, die von links auf M wirkt und $x \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$\Psi : [a] \in G/G_x \longmapsto a \cdot x \in M$$

ein G-äquivarianter Diffeomorphismus, d.h. es gilt $\Psi(g \cdot [a]) = g \cdot \Psi([a])$ für alle $a, g \in G$.

Beweis: Da G transitiv auf M wirkt, ist Ψ korrekt definiert und bijektiv. Die Vertauschbarkeit von Ψ mit der G-Wirkung folgt aus der Definition. Wir müssen zeigen, daß Ψ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\beta : G \to M$ die glatte Abbildung $\beta(g) = g \cdot x$. β ist ein Lift von ψ, d.h. $\psi \circ \pi = \beta$. Analog wie im Beweis von Satz 1.11 zeigt man, daß die Kartendarstellungen von Ψ glatt sind. Es genügt nun zu zeigen, daß für jeden Punkt $[a] \in G/G_x$ das Differential

$$d\psi_{[a]} : T_{[a]}G/G_x \to T_{\Psi([a])}M$$

ein Isomorphismus ist. Wegen $d\psi_{[a]} \circ dl_a = dl_a \circ d\psi_{[e]}$, reicht es aus, dies für die Äquivalenzklasse $[e]$ des trivialen Elements $e \in G$ zu zeigen.
Aus Satz 1.11 folgt $T_{[e]}G/G_x = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m})$, wobei $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement der Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von G_x ist. Dann gilt für $X \in \mathfrak{m}$:

$$d\psi_{[e]}(d\varphi_{[e]}(X)) = d(\Psi \circ \pi \circ \exp)(X) = d(\beta \circ \exp)(X) = d\beta_e(X)$$

Die Abbildung $d\beta_e : \mathfrak{g} \to T_xM$ hat den Kern $\mathfrak{h}$, folglich ist $d\psi_{[e]} : T_{[e]}G/G_x \to T_xM$ ein Isomorphismus. $\square$

Beispiel 1: Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre vom Radius 1. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n+1)$ wirkt transitiv auf S^n. Der Stabilisator des Vektors $e_{n+1} = (0,0,\ldots,0,1)^t$ ist die Untergruppe $SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$, eingebettet durch $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folglich kann man S^n als homogenen Raum $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ darstellen.

Beispiel 2: Sei $\mathbb{R}P^n$ der n-dimensionale reell-projektive Raum. $\mathbb{R}P^n$ ist die Mannigfaltigkeit aller Geraden durch o im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Gruppe $SO(n+1)$ wirkt transitiv auf $\mathbb{R}P^n$. Der Stabilisator der Geraden $\mathbb{R}e_{n+1}$ ist die Untergruppe

$$O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in O(n) \right\} \subset SO(n+1).$$

Also haben wir

$$\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/O(n).$$

Beispiel 3: Sei $\mathbb{C}P^n$ der n-dimensionale komplex-projektive Raum. $\mathbb{C}P^n$ ist die Mannigfaltigkeit aller 1-dimensionalen komplexen Unterräume des $\mathbb{C}^{n+1}$. Wie im Beispiel 2 erhält man

$$\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)).$$

Beispiel 4: Bezeichne $\mathbb{K}$ die reellen oder komplexen Zahlen oder die Quaternionen und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^n}$ das entsprechende Standard-Skalarprodukt. Unter der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge der k-Tupel von orthonormalen Vektoren im $\mathbb{K}^n$

$$V_k(\mathbb{K}^n) = \{(v_1,\ldots,v_k) \mid v_i \in \mathbb{K}^n ,\ \langle v_i, v_j\rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}\}$$

Diese Menge kann man mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen (Übungsaufgabe). Die orthogonale Gruppe $O(n)$ wirkt transitiv auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ durch
$A \cdot (v_1, \dots v_k) = (Av_1, \dots Av_k)$. Der Stabilisator des k-Tupels $(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ ist die Untergruppe

$$O(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \mid A \in O(n-k) \right\} \subset O(n).$$

(Hierbei bezeichnet $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ und E die Einheitsmatrix). Demnach ist $V_k(\mathbb{R}^n)$ als homogener Raum

$$V_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(n-k)$$

darstellbar. Analog erhält man

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{C}^n) &= U(n)/U(n-k) \\ V_k(\mathbb{H}^n) &= Sp(n)/Sp(n-k). \end{aligned}$$

Beispiel 5: Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^n$. Auch diese Menge trägt eine Mannigfaltigkeitsstruktur und ist auf folgende Weise als homogener Raum darstellbar:

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \\ G_k(\mathbb{C}^n) &= U(n)/(U(k) \times U(n-k)) \\ G_k(\mathbb{H}^n) &= \mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{Sp}(k) \times \mathrm{Sp}(n-k)). \end{aligned}$$

1.5 Die adjungierte Darstellung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Wirkung einer Lieschen Gruppe G über ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Definition: Sei G eine Liesche Gruppe, $(A, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Agebra und V ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Eine *Darstellung der Lieschen Gruppe* G über dem Vektorraum V ist ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Eine *Darstellung der Lie-Algebra* A über V ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : A \to \mathfrak{g}l(V)$, d.h. es gilt

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(X) \circ \varphi(Y) - \varphi(Y) \circ \varphi(X) , \qquad X, Y \in A.$$

Der Vektorraum V heißt auch *Darstellungsraum*.

Sei G eine Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Ist $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung der Lieschen Gruppe G über V, so ist nach Satz 1.1 das Differential

$\rho_\star : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über V.
Sind (V, ρ) und (W, σ) zwei Darstellungen der Lieschen Gruppe G über dem Vektorraum V bzw. W, so sind durch die folgenden Festlegungen Darstellungen von G über der Summe $V \oplus W$, dem Tensorprodukt $V \otimes W$, den Homomorphismen $Hom(V, W)$ bzw. dem dualen Raum V^* definiert.

$$\begin{aligned}
(\rho \oplus \sigma)(g)(v \oplus w) &:= \rho(g)v \oplus \sigma(g)w \\
(\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) &:= \rho(g)v \otimes \sigma(g)w \\
hom_{\rho,\sigma}(g)(F)(v) &:= \sigma(g)F(\rho(g^{-1})v) \\
\rho^*(g)(L)(v) &:= L(\rho(g^{-1})v)
\end{aligned}$$

Definition: Eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ über einem n-dimensionalen Euklidischen bzw. hermitischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ heißt *orthogonal* bzw. *unitär*, falls das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ G-invariant ist, d.h. falls

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle_V = \langle v, w\rangle_V \quad \text{für alle } v, w \in V, g \in G.$$

Wir zeigen als nächstes, dass jede Darstellung einer kompakten Lieschen Gruppe orthogonal bzw. unitär ist.

Satz 1.13 *Sei G eine kompakte Liesche Gruppe und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G über einem reellen oder komplexen Vektorraum V. Dann existiert ein G-invariantes Euklidisches bzw. hermitisches Skalarprodukt auf V, d.h. die Darstellung ist orthogonal bzw. unitär.*

Beweis: Sei $(X_1, \dots X_n)$ eine Basis in T_eG und bezeichne $X_i^* \in \mathcal{X}(G)$ die durch X_i definierten rechtsinvarianten Vektorfelder: $X_i^*(g) := dR_g(X_i)$. Wir betrachten die dualen 1-Formen $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ zu $(X_1^*, \dots, X_n^*)$. Dann ist die n-Form $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ eine rechtsinvariante Volumenform auf G. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiges positiv-definites Skalarprodukt auf V. Da G kompakt ist, definiert

$$(v, w) := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \omega_g$$

ein neues Skalarprodukt auf V und wegen der Rechtsinvarianz von ω gilt:

$$\begin{aligned}
(\rho(a)v, \rho(a)w) &= \int_G \langle \rho(ga)v, \rho(ga)w\rangle \omega_g \\
&= \int_G R_a^*(\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \omega_g) \\
&= \int_{R_a(G)} \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \omega_g \\
&= (v, w).
\end{aligned}$$

□

Definition: Eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ heißt *irreduzibel*, falls kein echter Unterraum $W \subset V$ existiert, für den $\rho(G)W \subset W$ gilt.

Satz 1.14 *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer kompakten Lieschen Gruppe über einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Dann zerlegt sich (V, ρ) in die direkte Summe von irreduziblen orthogonalen bzw. unitären G-Darstellungen, d.h.*

$$(V, \rho) = (V_1, \rho_1) \oplus \ldots \oplus (V_n, \rho_n),$$

wobei (V_i, ρ_i) irreduzible orthogonale bzw. unitäre G-Darstellungen sind.

Beweis: Nach Satz 1.13 gibt es auf V ein G-invariantes Euklidisches bzw. hermitisches Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Angenommen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ ist nicht irreduzibel. Dann existiert ein echter $\rho(G)$-invarianter Unterraum $W \subset V$. Sei $W^\perp$ das orthogonale Komplement von W bezüglich des G-invarianten Skalarprodktes $(\cdot, \cdot)$. Dann gilt $\rho(G)W^\perp \subset W^\perp$, d.h. wir haben eine Zerlegung $V = W \oplus W^\perp$ in zwei $\rho(G)$-invariante Teilräume, die wir dann gegebenenfalls weiter zerlegen können. Die Einschränkung von $\rho(g)$ und $(\cdot, \cdot)$ auf diese Teilräume liefert die G-Darstellungen (V_i, ρ_i). Da V endlich-dimensional ist, folgt die Behauptung. □

Wir bemerken, dass Satz 1.14 für nicht-kompakte Gruppen i.a. nicht gilt. Betrachten wir zum Beispiel die Wirkung der Gruppe $G = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}\}$ durch Matrizenmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist ein 1-dimensionaler Unterraum $W \subset \mathbb{R}^2$ genau dann G-invariant, wenn er vom Vektor $(1, 0)^t$ erzeugt wird. Der Unterraum $\mathbb{R}(1, 0)^t$ hat kein aber invariantes Komplement.

In der Eichfeldtheorie spielt eine spezielle Darstellung der Lieschen Gruppe G über ihrer eigenen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine besondere Rolle, die adjungierte Darstellung. Für ein Element $g \in G$ betrachten wir den inneren Automorphismus

$$\alpha_g := L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G.$$

Das Differential $(\alpha_g)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist ein Isomorphismus der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.

Satz 1.15

1. *Die Abbildung $Ad : g \in G \longrightarrow (\alpha_g)_* \in GL(\mathfrak{g})$ ist eine Darstellung der Lie-Gruppe G.*

2. *Für das Differential $Ad_* =: ad : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ von Ad gilt*

$$ad(X)(Y) = [X, Y].$$

3. *Für das Zentrum $Z(G)$ der Liegruppe G gilt $Z(G) \subset \mathrm{Ker}\, Ad$ und $Z(G) = \mathrm{Ker}\, Ad$, falls G zusammenhängend ist.*

Definition: Die Darstellung $Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ heißt *adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe* G. Die Darstellung $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ heißt *adjungierte Darstellung der Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$.

Beweis von Satz 1.15

Die Abbildung $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ ist ein Homomorphismus, da

$$Ad(ga) = (\alpha_{ga})_* = (\alpha_g \circ \alpha_a)_* = (\alpha_g)_* \circ (\alpha_a)_* = Ad(g) \circ Ad(a).$$

Für $X \in \mathfrak{g}$ und hinreichend kleine $t \in \mathbb{R}$ folgt aus Satz 1.7

$$Ad(g)X = \frac{1}{t}(\exp^{-1}(\alpha_g(\exp tX)) = \frac{1}{t}\Big(\exp^{-1}(g \cdot \exp tX \cdot g^{-1})\Big).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von Ad. Wegen Satz 1.6 ist Ad auch glatt.

Wir zeigen $ad(X)Y = [X,Y]$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wir benutzen dazu die Darstellung des Kommutators zweier Vektorfelder als Lie-Ableitung. Sei $t \in \mathbb{R} \to \varphi_t(x) \in G$ die Integralkurve des linksinvarianten Vektorfeldes $X \in \mathcal{X}(G)$ durch $x \in G$. Dann ist

$$[X,Y](x) = \frac{d}{dt}(d\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(x))) \mid_{t=0} .$$

Wie wir in Kapitel 1.2 gesehen hatten, ist $\varphi_t(g) = g \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(g)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} ad(X)Y &= Ad_*(X)Y = \frac{d}{dt}(Ad(\exp tX)) \mid_{t=0} Y \\ &= \frac{d}{dt}(dR_{\exp(-tX)} \circ dL_{\exp tX}(Y)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(dR_{\exp(-tX)}(Y(\exp tX)) \mid_{t=0} \\ &= [X,Y]. \end{aligned}$$

Zum Beweis der 3. Behauptung bemerken wir, daß g genau dann im Zentrum von G liegt, wenn $\alpha_g = id_G$ gilt. Folglich ist $Z(G) \subset \operatorname{Ker} Ad$. Sei nun G zusammenhängend und $g \in \operatorname{Ker} Ad$. Da G als zusammenhängende topologische Gruppe von einer Normalenumgebung des 1-Elementes erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass $\exp tX = \alpha_g(\exp tX)$ für alle $X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\psi : t \in \mathbb{R} \to \alpha_g(\exp tX) \in G.$$

Nach Satz 1.4 existiert ein $Y \in \mathfrak{g}$ so, daß $\exp tY = \alpha_g(\exp tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Differenzieren wir diese Gleichung in $t = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} Y(e) = \frac{d}{dt}(\exp tY) \mid_{t=0} &= (d\alpha_g)_e(X(e)) \\ &= Ad(g)(X(e)) = X(e). \end{aligned}$$

Demnach ist $X = Y$ und somit $\alpha_g = id_G$. □

Als Übung überlassen wir dem Leser die folgende einfache Folgerung.

Folgerung 1.1 *Ist G eine abelsche Liesche Gruppe, so ist ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ abelsch, d.h. es gilt $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$. Ist umgekehrt G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit abelscher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist G abelsch.*

Wirkt eine Lie-Gruppe G auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, so definiert jedes Element der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ein spezielles Vektorfeld auf M, das in der Eichfeldtheorie eine wichtige Rolle spielt.

Definition Sei $[M, G]$ eine Links-Transformationsgruppe und $X \in \mathfrak{g}$. Dann heißt das Vektorfeld $\tilde{X}$ auf M, definiert durch

$$\tilde{X}(x) := \frac{d}{dt}(\exp(-tX) \cdot x) \mid_{t=0},$$

das zu X gehörende *fundamentale Vektorfeld.* Ist $[M, G]$ eine Rechtstransformationsgruppe, so ist das fundamentale Vektorfeld definiert durch

$$\tilde{X}(x) := \frac{d}{dt}(x \cdot \exp(tX)) \mid_{t=0} .$$

Satz 1.16 *Sei $[M, G]$ eine Liesche Transformationsgruppe.*

1. *Die Abbildung*
$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ X & \longmapsto & \tilde{X} \end{array}$$
ist linear und es gilt $\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Insbesondere bildet die Menge der fundamentalen Vektorfelder eine Liesche Unteralgebra der Lie-Algebra aller Vektorfelder.

2. *Wirkt die Zusammenhangskomponente der Einheit von G effektiv auf M, so ist*
$$\mathfrak{g} \longrightarrow \{\tilde{X} \in \mathcal{X}(M) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$
ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

3. *Wirkt G von rechts auf M, so gilt für alle $a \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$*
$$(dr_a)(\tilde{X}) = \widetilde{Ad(a^{-1})X}.$$
Für eine Linkswirkung gilt
$$(dl_a)(\tilde{X}) = \widetilde{Ad(a)X}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis hier für Rechtswirkungen. Für Linkswirkungen schließt man analog. Sei $x \in M$ fixiert und bezeichne $\varphi_x : G \to M$ die Abbildung $\varphi_x(g) = x \cdot g$. Für ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned}(d\varphi_x)_a(X(a)) &= d\varphi_x(dL_a(X(e))) = \frac{d}{dt}\Big(\varphi_x(L_a(\exp tX))\Big)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(x \cdot a \cdot \exp tX)|_{t=0} = \tilde{X}(x \cdot a) = \tilde{X}(\varphi_x(a)).\end{aligned}$$

Folglich sind $X \in \mathfrak{g} \subset \mathcal{X}(G)$ und $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ φ_x-verknüpft für alle $x \in M$. Damit erhält man

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}.$$

Die Linearität der Zuordnung $X \in \mathfrak{g} \to \tilde{X} \in \chi(M)$ folgt aus der Linearität des Differentials $(d\varphi_x)_a$. Sei G_0 die Zusammenhangskomponente von $e \in G$. Wir zeigen, dass die Zuordnung $X \in \mathfrak{g} \to \tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ injektiv ist, falls G_0 effektiv wirkt.
Sei $\tilde{X} = 0$. Dann ist jeder Punkt von M eine Nullstelle von $\tilde{X}$, folglich bewegt der Fluß von $\tilde{X}$ die Punkte von M nicht. Wir erhalten

$$x \cdot \exp tX = x \qquad \text{für alle } x \in M, t \in \mathbb{R}.$$

Für hinreichend kleine $t_0 \in \mathbb{R}$ liegt $g_0 = \exp t_0 X$ in einer Normalenumgebung des 1-Elementes von G_0. Da G_0 effektiv auf M wirkt folgt aus $r_{g_0} = id_M$ daß $g_0 = e$, also $X = 0$ ist.
Sei nun $x \in M, a \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(dr_a(\tilde{X}))(x) &= (dr_a)_{xa^{-1}}(\tilde{X}(xa^{-1})) \\ &= (dr_a)_{xa^{-1}}\Big(\frac{d}{dt}(xa^{-1} \cdot \exp tX)|_{t=0}\Big) \\ &= \frac{d}{dt}(x \cdot (a^{-1} \cdot \exp tX \cdot a))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(x \cdot (\alpha_{a^{-1}} \exp tX))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(x \cdot \exp(tAd(a^{-1})X))|_{t=0} \\ &= (\widetilde{Ad(a^{-1})X})(x).\end{aligned}$$

□

1.6 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass es genau zwei 2-dimensionale, zueinander nicht isomorphe reelle Lie-Algebren gibt. Geben Sie in beiden Fällen eine Liesche Gruppe mit der entsprechenden Lie-Algebra an.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Sphäre S^3 die Struktur einer Lieschen Gruppe trägt. Warum kann es auf S^2 keine Liegruppen-Struktur geben?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Lie-Algebra der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ isomorph zur Lie-Algebra $(\mathbb{R}^3, \times)$ ist, wobei $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 4. Für $A \in GL(n, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $F_{A,v}$ die folgende Abbildung auf dem $\mathbb{R}^n$

$$F_{A,v}(x) := Ax + v \,, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass die affine Gruppe $Aff(\mathbb{R}^n) := \{F_{A,v} \mid A \in GL(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$ eine Liesche Gruppe ist und bestimmen Sie ihre Lie-Algebra.

Aufgabe 5. Es bezeichne $C := \{x \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mid \langle x, x\rangle_{1,n+1} = 0\}$ den Lichtkegel im (n+2)-dimensionalen Minkowski-Raum und $PC := \{\mathbb{R}x \mid x \in C \setminus \{o\}\}$ seine Projektivierung.

1. Zeigen Sie, dass PC ist diffeomorph zur Sphäre S^n ist. Veranschaulichen Sie dies an einem Bild.
2. Zeigen Sie, dass die pseudo-orthogonale Gruppe $O(1, n+1)$ transitiv auf PC wirkt. Bestimmen Sie den Stabilisator des Punktes $\mathbb{R}(1, 0, \ldots, 0, 1) \in PC$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Die Stiefel-Mannigfaltigkeit

$$V_k(\mathbb{R}^n) := \{(v_1, ..., v_k) \mid v_i \in \mathbb{R}^n \,,\, \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \,,\, i, j = 1...k\}$$

und die Grassmann-Mannigfaltigkeit

$$G_k(\mathbb{R}^n) := \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ } k\text{-dimensionaler Unterraum von}\, \mathbb{R}^n\}$$

sind homogene Räume und es gilt:

$$V_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(n-k) \qquad \text{und} \qquad G_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/\, O(k) \times O(n-k).$$

Aufgabe 7. Beweisen Sie:

1. Ist G eine abelsche Liesche Gruppe, so ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G abelsch.
2. Ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer zusammenhängenden Lieschen Gruppe G abelsch, so ist G abelsch.

Aufgabe 8. Sei $SO(n)$ die spezielle orthogonale Gruppe und $\mathfrak{so}(n)$ ihre Lie-Algebra, betrachtet als Menge der schiefsymmetrischen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$. Weiterhin bezeichne ρ_2 die durch die Matrixwirkung von $SO(n)$ auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Darstellung

von $SO(n)$ auf dem Raum der alternierernden Tensoren $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$.
Sei $\phi : \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n \to \mathfrak{so}(n)$ die Abbildung

$$\phi(v \wedge w) = X_{v,w} \quad \text{wobei} \quad X_{v,w}(z) := \langle v, z\rangle w - \langle w, z\rangle v \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^n$$

Zeigen Sie, dass ϕ ein linearer Isomorphismus ist, der mit der Wirkung $(\rho_2)_*$ von $\mathfrak{so}(n)$ auf $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ und der durch die adjungierte Darstellung ad definierten Wirkung von $\mathfrak{so}(n)$ auf $\mathfrak{so}(n)$ kommutiert.

Aufgabe 9

Es sei $[M, G]$ eine von rechts wirkende Transformationsgruppe. Wir betrachten Kurven $x(t)$ in der Mannigfaltigkeit M und $g(t)$ in der Lieschen Gruppe G mit $x(0) = x$ und $g(0) = g$. Es bezeichne $z(t)$ die Kurve $z(t) := x(t) \cdot g(t)$ in M. Beweisen Sie, daß die folgende Formel für den Tangentialvektor der Kurve $z(t)$ in $t = 0$ gilt:

$$\dot{z}(0) = dr_g(\dot{x}(0)) + (\widetilde{dL_{g^{-1}}\dot{g}(0)})\,(x \cdot g).$$

Dabei bezeichnet $\widetilde{X}$ das von einem Element X der Lie-Algebra von G erzeugte fundamentale Vektorfeld auf M.

Kapitel 2

Hauptfaserbündel und assoziierte Faserbündel

2.1 Lokal-triviale Faserungen

In diesem Abschnitt definieren wir die grundlegenden Objekte, mit denen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen wollen, die lokal-trivialen Faserbündel.

Definition: Sei $\pi : E \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten[1] und F eine weitere Mannigfaltigkeit. Das Tupel $(E, \pi, M; F)$ heißt *lokal-triviale Faserung (oder lokal-triviales Bündel) mit dem Fasertyp* F, falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ und einen Diffeomorphismus $\phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ gibt, so dass $\phi_U \circ pr_1 = \pi$ gilt.

Man kann sich den Raum E also als zusammengeklebte "Zylinder" der Form $U \times F$ vorstellen. Der Raum E heißt der *Totalraum*, M der *Basisraum*, π die *Projektion* und F der Fasertyp der Faserung. Die Untermannigfaltigkeit $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$ nennen wir *Faser über* $x \in M$. Das in der Definition gegebene Paar (U, ϕ_U) heißt *Bündelkarte* oder *lokale Trivialisierung über U*. Mit E_V bezeichnen wir die Menge der Fasern über $V \subset M$. Ist V offen, so ist $(E_V, \pi, V; F)$ ebenfalls eine lokal-triviale Faserung, das *Teilbündel* über V. Für jedes $x \in M$ ist die durch die Bündelkarte (U, ϕ) gegebene Abbildung

$$\phi_{U,x} := pr_2 \circ \Phi_U|_{E_x} : E_x \longrightarrow F$$

ein Diffeomorphismus zwischen der Faser und dem Fasertyp. Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M und $\{(U_i, \phi_{U_i})\}_{i\in\Lambda}$ ein Atlas von Bündelkarten. Die Abbildungen

$$\phi_i \circ \phi_k^{-1} : (U_i \cap U_k) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_k) \times F$$

[1] alle Mannigfaltigkeiten in diesem Skript sind glatt

heißen Übergangsfunktionen zwischen den Bündelkarten (U_k, ϕ_k) und (U_i, ϕ_i). Sie lassen sich äquivalent in der Form von Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_{ik}: \ U_i \cap U_k &\longrightarrow Diff(F) \\ x \quad &\longmapsto \phi_{ix} \circ \phi_{kx}^{-1} : F \to F \end{aligned}$$

beschreiben, die die sogenannten Cozyklusbedingungen

$$\phi_{ik}(x) \circ \phi_{kj}(x) = \phi_{ij}(x) \quad \text{und} \quad \phi_{ii}(x) = Id_F$$

erfüllen.

Definition: Zwei lokal-triviale Faserungen $(E, \pi, M; F)$ und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, \tilde{M}; \tilde{F})$ heißen *isomorph*, wenn es einen Diffeomorphismus $H : E \longrightarrow \tilde{E}$ gibt, so dass $\tilde{\pi} \circ H = \pi$.

Beispiel 1: Seien M und F Mannigfaltigkeiten und $pr_1 : M \times F \longrightarrow M$ die Projektion auf die 1. Komponente. Dann ist $\underline{F} := (M \times F, pr_1, M; F)$ eine lokal-triviale Faserung mit einem Bündelatlas aus einer Karte $\{(M \times F, id)\}$. Wir nennen jede Faserung, die isomorph zu dieser Faserung ist, *trivial*.

Beispiel 2: Jede Überlagerung $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist eine lokal-triviale Faserung. Der Fasertyp F_0 ist hier ein diskreter topologischer Raum, der sich bijektiv auf den Faktorraum $\pi_1(M, x)/\pi_\sharp(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}))$ abbilden läßt.

Beispiel 3: Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die folgenden Bündel über M sind lokal-triviale Faserungen:

das Tangentialbündel	$(TM, \pi, M; \mathbb{R}^n)$
das Cotangentialbündel	$(T^*M, \pi, M; \mathbb{R}^n)$
das Bündel der k-Formen	$(\Lambda^k(M), \pi, M; \mathbb{R}^{\lambda_k})$, mit $\lambda_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
das Bündel der (r, s)-Tensoren	$(T^{r,s}(M), \pi, M; \mathbb{R}^{rs})$.

Die Topologie und Differentialstruktur des Totalraumes E einer lokal-trivialen Faserung $(E, \pi, M; F)$ ist wegen der Glattheit der Bündelkarten durch diejenige von M und F eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich folgende Bemerkung, die für die Konstuktion neuer Bündel nützlich ist:
Seien M und F Mannigfaltigkeiten und E lediglich eine <u>Menge</u> mit einer Abbildung $\pi : E \longrightarrow M$. Weiterhin gebe es um jeden Punkt $x \in M$ eine Bündelkarte (U, ϕ) mit <u>bijektiver</u> Trivialisierung $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ und einen Bündelatlas $\{U_i, \phi_i)\}_{i \in \Lambda}$, für den alle Übergangsfunktionen

$$\phi_i \circ \phi_k^{-1} : (U_i \cap U_k) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_k) \times F$$

glatt sind. OBdA seien die Umgebungen $U_i \subset M$ Kartenbereiche von M. Dann kann man eine Topologie und eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf E derart definieren, dass

$(E, \pi, M; F)$ eine (glatte) lokal-triviale Faserung wird:
Eine Menge $O \subset E$ sei offen, wenn für jede Bündelkarte $(U_i, \phi_i), i \in \Lambda$, die Menge $\phi_i(O \cap \pi^{-1}(U_i)) \subset U_i \times F$ offen in der durch M und F gegebenen Produkttopologie auf $U_i \times F$ ist. Dies definiert eine Topologie auf E, die Hausdorffsch ist und eine abzählbarer Basis besitzt. Zur Definition der Mannigfaltigkeitstruktur betrachten wir zusätzlich einen glatten Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$ von M und einen glatten Atlas $\{(V_j, \psi)\}_{j \in \Upsilon}$ von F. Die Karte (W_{ij}, θ_{ij}) auf E wird dann definiert durch

$$\begin{aligned} W_{ij} &:= \pi^{-1}(U_i) \cap \phi_i^{-1}(U_i \times V_j) \subset E \\ \theta_{ij} &:= (\varphi_i \times \psi_j) \circ \phi_i : W_{ij} \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

Dann ist $\{(W_{ij}, \theta_{ij}) \mid i \in \Lambda, j \in \Upsilon\}$ ein glatter Atlas auf E und für die dadurch auf E definierte Differentialstruktur sind die Projektion π und die Bündelkarten (U_i, ϕ_i) glatt. Man überzeugt sich schnell davon, dass die auf E definierte Topologie und Differentialstruktur nicht von den gewählten Atlanten abhängt.
Sind $(E, \pi, M; F)$ und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M; \tilde{F})$ (glatte) lokal-triviale Faserungen über M und $H : E \longrightarrow \tilde{E}$ eine <u>bijektive</u> Abbildung mit $H \circ \tilde{\pi} = \pi$. Seien weiterhin für alle Karten zweier Bündelatlanten $\{(U_i, \phi_i)\}$ von E bzw. $\{(U_i, \tilde{\phi}_i)\}$ von $\tilde{E}$ die Abbildungen

$$\tilde{\phi}_i \circ H \circ \phi_k^{-1} : (U_i \cap U_k) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_k) \times \tilde{F}$$

glatt, dann ist H ein Diffeomorphismus.

Sei $\xi = (E, \pi, M; F)$ eine lokal-triviale Faserung und $f : N \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann definieren wir die zurückgezogene Faserung $f^*\xi := (f^*E, \overline{\pi}, N; F)$ durch

$$\begin{aligned} f^*E &:= \{(y, e) \in N \times E \mid f(y) = \pi(e)\} \subset N \times E. \\ \overline{\pi}(y, e) &:= y \end{aligned}$$

Offensichtlich kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ \downarrow \overline{\pi} & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Satz 2.1 $f^*\xi = (f^*E, \overline{\pi}, N; F)$ *ist eine lokal-triviale Faserung (die durch f induzierte Faserung über N).*

Beweis: Sei $\{(U_i, \phi_i)\}$ ein Bündelatlas von ξ. Wir betrachten die offenen Mengen $V_i := f^{-1}(U_i) \subset N$ und die bijektiven Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_i : \overline{\pi}^{-1}(V_i) = (f^*E)_{V_i} &\longrightarrow V_i \times F \\ (y, e) &\longmapsto (y, pr_2 \phi_i(e)) \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} \psi_i \circ \psi_k^{-1} : (V_i \cap V_k) \times F &\longrightarrow (V_i \cap V_k) \times F \\ (y, v) &\longmapsto (y, pr_2 \phi_k \phi_i^{-1}(f(y), v)) \end{aligned}$$

glatte Abbildungen. Folglich gibt es auf f^*E eine Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass $f^*\xi$ eine (glatte) lokal-triviale Faserung mit dem Bündelatlas $\{(V_i, \psi_i)\}$ wird. □

Definition: Unter einem *glatten Schnitt*[2] in einer lokal-trivialen Faserung $(E, \pi, M; F)$ versteht man eine glatte Abbildung $s : M \longrightarrow E$ mit $\pi \circ s = id_M$. Einen Schnitt im Teilbündel E_U über einer offenen Menge $U \subset M$ nennt man *lokalen Schnitt* in E über U. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge der glatten Schnitte in E, mit $\Gamma(U, E) = \Gamma(E_U)$ die Menge der lokalen glatten Schnitte über U.

Aus der Differentialgeometrie kennt man die folgenden Identifizierungen der Schnitträume der in Beispiel 3 genannten Bündel: $\Gamma(TM)$ sind die glatten Vektorfelder, $\Gamma(\Lambda^k(M))$ die glatten k-Formen und $\Gamma(T^{r,s}(M))$ die glatten (r, s)-Tensorfelder auf M. Für ein triviales Bündel $\underline{F} = (M \times F, pr_1, M; F)$ gilt $\Gamma(\underline{F}) = C^\infty(M, F)$.

Abschließend beweisen wie die Existenz von globalen Schnitten für lokal-triviale Faserungen, deren Fasertyp diffeomorph zu einem reellen Vektorraum ist.

Satz 2.2 *Sei $(E, \pi, M; F)$ eine lokal-triviale Faserung, deren Fasertyp F diffeomorph zu einem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^m$ ist und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann kann man jeden auf A definierten glatten Schnitt $s : A \longrightarrow E$ zu einem globalen glatten Schnitt auf M fortsetzen.*[3] *Insbesondere existiert ein globaler glatter Schnitt in E, d.h. $\Gamma(E) \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei (U, ϕ_U) eine Bündelkarte von E, $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge von M und $s : A \longrightarrow E$ ein glatter Schnitt in E über A. Dann kann man den Schnitt $s|_{U\cap A} : A \cap U \longrightarrow E$ glatt auf die offene Menge U fortsetzen. Wir betrachten dazu die glatten reellwertigen Funktionen $f_1, \dots, f_m : A \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$, die mittels

$$\begin{array}{rccl} \phi_U : & E_{A\cap U} & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m \\ & s(x) & \longmapsto & (x, f_1(x), \dots, f_m(x)) \end{array}$$

definiert sind. Jede glatte reellwertige Funktion, die auf einer abgeschlossenen Teilmenge einer Mannigfaltigkeit definiert ist, kann man glatt auf die gesamte Mannigfaltigkeit fortsetzen.[4] Wir wählen glatte Fortsetzungen $\hat{f}_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ von f_i und definieren die Fortsetzung $s_U : U \longrightarrow E$ durch

$$s_U(x) := \phi_U^{-1}((x, \hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_m(x))).$$

[2]Im folgenden werden wir nur glatte Schnitte betrachten und zur Abkürzung einfach Schnitt sagen

[3]Eine auf einer abgeschlossenen Menge definierte Abbildung $f : A \subset M \longrightarrow E$ heißt glatt, falls es zu jedem $x \in A$ eine offene Umgebung $U(x) \subset M$ und eine glatte Abbildung $F_x : U(x) \longrightarrow E$ mit $F_x|_{U(x)\cap A} = f$ gibt.

[4]Für einen Beweis dieser Tatsache siehe S. Kobayashi und K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Volume 1, Appendix 3.

Sei nun $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Überdeckung von E durch Bündelkarten, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Zerlegung der 1 zur Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ von M und $V_\alpha := \{x \in M \mid f_\alpha(x) > 0\}$. Dann ist $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M und die Mengen $clV_\alpha := supp(f_\alpha) \subset U_\alpha$ sind kompakt.
Sei $J \subset \Lambda$ eine Teilmenge der Indexmenge Λ und $M_J := \bigcup_{\alpha\in J} clV_\alpha$. Dann ist $M = M_\Lambda$. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{(\tau, J) \mid \ J \subset \Lambda,\ \tau : M_J \longrightarrow E \ \text{ glatter Schnitt mit } \tau|_{M_J\cap A} = s|_{M_J\cap A}\}.$$

$\mathcal{T}$ ist nichtleer, da $(s_{U_\alpha}, \{\alpha\}) \in \mathcal{T}$. Außerdem ist $\mathcal{T}$ durch

$$(\tau', J') \leq (\tau'', J'') :\Longleftrightarrow \ J' \subset J'',\ \ \tau' = \tau''|_{M_{J'}}$$

halbgeordnet und jede wohlgeordnete Kette in $\mathcal{T}$ hat eine obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma gibt es somit ein maximales Element $(\hat{s}, \hat{J}) \in \mathcal{T}$. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir $\hat{J} = \Lambda$ zeigen. Angenommen es gäbe ein $i_0 \in \Lambda \setminus \hat{J}$. Dann existiert ein glatter Schnitt $\tau_{i_0} : U_{i_0} \longrightarrow E$, so dass

$$\begin{aligned} \tau_{i_0}|_{A\cap clV_{i_0}} &= s|_{A\cap clV_{i_0}} \quad \text{und} \\ \tau_{i_0}|_{M_{\hat{J}}\cap clV_{i_0}} &= \hat{s}|_{M_{\hat{J}}\cap clV_{i_0}}. \end{aligned}$$

Sei $\hat{J}' := \hat{J} \cup \{i_0\}$ und der Schnitt $\hat{s}' : M_{\hat{J}'} \longrightarrow E$ durch

$$\hat{s}' := \begin{cases} \hat{s} & \text{auf } M_{\hat{J}} \\ \tau_{i_0} & \text{auf } clV_{i_0} \end{cases}$$

definiert. Dann ist $(\hat{s}', \hat{J}') \in \mathcal{T}$. Dies widerspricht der Maximalität von $(\hat{s}, \hat{J})$. Somit ist $M = M_{\hat{J}}$ und $\hat{s} : M \longrightarrow E$ der gesuchte glatte Schnitt mit $\hat{s}|_A = s$. □

2.2 Hauptfaserbündel

Wir betrachten nun spezielle lokal-triviale Faserungen, deren Fasertyp eine Liesche Gruppe ist.

Definition: Sei G eine Liesche Gruppe und $\pi : P \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung. Das Tupel $(P, \pi, M; G)$[5] heißt G-Hauptfaserbündel über M, falls gilt

1. G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P. Die Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern.

2. Es gibt einen Bündelatlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ aus G-äquivarianten Bündelkarten, d.h.
   - $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ ist ein Diffeomorphismus.

[5] Falls keine Verwechslungen möglich sind, bezeichnen wir das Hauptfaserbündel auch kurz mit P

- $pr_1 \circ \phi_i = \pi$.
- $\phi_i(pg) = \phi_i(p)g$ für alle $p \in P, g \in G$,
  wobei G auf $U_i \times G$ durch $(x,a)g = (x,ag)$ wirkt.

Wir geben zwei weitere äquivalente Definitionen für Hauptfaserbündel an:

Satz 2.3 *$(P,\pi;M;G)$ ist ganau dann ein G-Hauptfaserbündel, wenn gilt*

1. *G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P. Die Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern.*

2. *Es existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ von M und lokale Schnitte $s_i : U_i \longrightarrow P$ für jedes $i \in \Lambda$,so dass die Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \psi_{s_i}: & P_{U_i} & \longrightarrow & G \\ & s_i(x)\cdot g & \longmapsto & g \end{array}$$

glatt ist.

Beweis: Sei $s : U \longrightarrow P$ ein lokaler Schnitt mit glatter Abbildung ψ_s. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} \phi_U: & \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U\times G \\ & s(x)\cdot g & \longmapsto & (x,g) \end{array}$$

ein G-äquivarianter Diffeomorphismus. Ist andereseits (U,ϕ_U) eine G-äquivariante Bündelkarte des Hauptfaserbündels P, so ist durch $s(x) := \phi^{-1}(x,e)$, wobei $x \in U$ und $e \in G$ das triviale Element der Lieschen Gruppe G ist, ein lokaler Schnitt über U definiert, für den ψ_s glatt ist. □

Satz 2.4 *$(P,\pi;M;G)$ ist genau dann ein G-Hauptfaserbündel, wenn es einen Bündelatlas $\{(U_i,\phi_i)\}$ gibt, dessen Übergangsfunktionen durch Linkstranslationen mit Cozyklen von G gegeben sind, d.h wenn es eine Familie glatter Abbildungen $g_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow G$, $i,k \in \Lambda$, mit der Cozyklusbedingung*

$$g_{ij}(x)\cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \quad \textit{und} \quad g_{ii}(x) = e,$$

gibt, so dass $\phi_{ik}(x) = L_{g_{ik}(x)} : G \longrightarrow G$.

Beweis: Sei $\{(U_i,\phi_i)\}$ ein G-äquivarianter Bündelatlas eines G-Hauptfaserbündels P. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{rrcl} g_{ik}: & U_i\cap U_k & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g_{ik}(x) := \phi_{ix}(\phi_{kx}^{-1}(e)) = \phi_{ik}(x)(e) \end{array}$$

glatt, erfüllen die Cozyklusbedingung und $\phi_{ik}(x)(g) = g_{ik}(x)\cdot g$. Sei andererseits ein G-äquivarianter Bündelatlas $\{(U_i,\phi_i)\}$ gegeben, dessen Übergangsfunktionen durch

Linkstranslationen mit Cozyklen gegeben sind, dann definieren wir die G-Wirkung auf P durch

$$p \cdot g := \phi_{ix}^{-1}(\phi_{ix}(p) \cdot g),$$

wobei $x \in U_i$ und $p \in P_x$. Diese Wirkung ist dann unabhängig von der gewählten Karte und erfüllt die gewünschten Bedingungen. $\square$

Beispiel 1: Das triviale Bündel $\underline{G} := (M \times G, pr_1, M; G)$ ist ein G-Hauptfaserbündel.

Beispiel 2: Sei $\xi = (P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über M und $f : N \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann ist das induzierte Bündel $f^*\xi$ ein G-Hauptfaserbündel über N.

Beispiel 3: Das homogene Bündel eines homogenen Raumes
Sei G eine Liesche Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und G/H der entsprechende homogene Raum (siehe Kapitel 1.4). Bezeichne $\pi : G \longrightarrow G/H$ die Projektion auf den Faktorraum. Dann ist $(G, \pi, G/H; H)$ ein H-Hauptfaserbündel. H wirkt von rechts auf G und Existenz der nötigen lokalen Schnitte ist im Satz 1.11 bewiesen.

Beispiel 4: Die Hopfbündel über $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$
Wir betrachten die Sphäre $S^{2n+1} = \{(w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |w_0|^2 + \ldots + |w_n|^2 = 1\}$ und die Liesche Gruppe S^1. S^1 wirkt von rechts auf S^{2n+1} durch

$$\begin{array}{rcl} S^{2n+1} \times S^1 & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ ((w_0, \ldots, w_n), z) & \longmapsto & (w_0 \cdot z, \ldots, w_n \cdot z). \end{array}$$

Dann definiert die Projektion

$$\begin{array}{rrcl} \pi : & S^{2n+1} & \longmapsto & \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1 \\ & (w_0, \ldots, w_n) & \longmapsto & [w_0 : \ldots : w_n] \end{array}$$

ein S^1-Hauptfaserbündel über dem komplex-projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$, das wir das *Hopfbündel über* $\mathbb{C}P^n$ nennen. Ist speziell $n = 1$, so erhält man wegen $\mathbb{C}P^1 = S^2$ ein S^1-Hauptfaserbündel $(S^3, \pi, S^2; S^1)$ über S^2. Die lokalen Trivialisierungen sind durch die folgenden lokalen Schnitte über $U_j = \{[w_0 : \ldots : w_n] \mid w_j \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ gegeben

$$s_j([w_0 : \ldots : w_n]) = \left(\frac{w_0}{w_j}, \ldots, \frac{w_{j-1}}{w_j}, 1, \frac{w_{j+1}}{w_j}, \ldots, \frac{w_n}{w_j}\right) \cdot \left(1 + \sum_{k \neq j} \frac{|w_k|^2}{|w_j|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Auf analoge Weise erhält man das *Hopfbündel über* $\mathbb{H}P^n$. Wir betrachten dazu die Sphäre $S^{4n+3} = \{(q_0, \ldots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid |q_0|^2 + \ldots |q_n|^2 = 1\}$ und die Liesche Gruppe $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$. S^3 wirkt auf S^{4n+3} durch

$$\begin{array}{rcl} S^{4n+3} \times S^3 & \longrightarrow & S^{4n+3} \\ ((q_0, \ldots, q_n), q) & \longmapsto & (q_0 \cdot q, \ldots, q_n \cdot q). \end{array}$$

Dann definiert die Projektion

$$\begin{array}{rrcl} \pi : & S^{4n+3} & \longmapsto & \mathbb{H}P^n = S^{4n+3}/S^3 \\ & (q_0, \ldots, q_n) & \longmapsto & [q_0 : \ldots : q_n] \end{array}$$

ein S^3-Hauptfaserbündel über dem quaternionisch-projektiven Raum $\mathbb{H}P^n$, das wir das *Hopfbündel über* $\mathbb{H}P^n$ nennen. Ist speziell $n = 1$, so erhält man wegen $\mathbb{H}P^1 = S^4$ ein S^3-Hauptfaserbündel $(S^7, \pi, S^4; S^1)$ über S^4. Die lokalen Schnitte werden analog zum komplexen Fall definiert.

Beispiel 5: Wir betrachten die Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{R}^n)$ und die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{R}^n)$. Die Projektion

$$\begin{array}{rrcl} \pi : & V_k(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & G_k(\mathbb{R}^n) \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \longmapsto & span(v_1, \ldots, v_k) \end{array}$$

definiert ein Hauptfaserbündel über $G_k(\mathbb{R}^n)$ mit der orthogonalen Gruppe $O(k)$ als Strukturgruppe. Auf analoge Weise erhält man ein $U(k)$-Hauptfaserbündel $\pi : V_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ über der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 6: Das Reperbündel einer Mannigfaltigkeit
Sei M^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit,

$$GL(M)_x := \{v_x = (v_1, \ldots, v_n) \mid v_x \text{ Basis in } T_xM\}$$

die Menge der Basen in T_xM und

$$GL(M) := \dot{\bigcup_{x \in M}} GL(M)_x$$

die disjunkte Vereinigung dieser Basen. Die Projektion $\pi : GL(M) \longrightarrow M$ ist durch $\pi(v_x) := x$ gegeben. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wirkt von rechts auf der Menge $GL(M)$ durch

$$(v_1, \ldots, v_n) \cdot A := (\sum_i v_i A_{i1}, \ldots, \sum_i v_i A_{in}) \ , \quad A = (A_{ij}).$$

Diese Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern. Ist $(U, \varphi) = (x_1, \ldots . x_n))$ eine Karte der Mannigfaltigkeit M, so definiert die kanonische Basis einen lokalen Schnitt

$$s = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) : U \longrightarrow GL(M).$$

Dies definiert die Topologie und die Mannigfaltigkeitsstruktur auf der Menge $GL(M)$, wie im Kapitel 2.1 erläutert wurde. Das entstehende $GL(n, \mathbb{R})$-Hauptfaserbündel $(GL(M), \pi, M; GL(n, \mathbb{R}))$ heißt das *Reperbündel über* M.
Jede zusätzliche geometrische Struktur auf M definiert auf analoge Weise ein Teilbündel des Reperbündels $GL(M)$.

- Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine orientierte Mannigfaltigkeit. Dann betrachten wir alle positiv orientierten Basen $GL(M)_x^+ := \{v_x \in GL(M)_x \mid v_x \text{ positiv orientiert}\}$. Wir erhalten das $GL(n,\mathbb{R})^+$-Hauptfaserbündel aller positiv-orientierten Repere $(GL(M)^+, \pi, M, GL(n,\mathbb{R})^+)$.

- Sei $(M^{k,l}, g)$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur (k,l). In diesem Fall betrachten wir die orthonormalen Basen $O(M,g)_x = \{v_x \in GL(M)_x \mid v_x \text{ ist } g_x-\text{orthonormal}\}$ und erhalten das $O(k,l)$-Hauptfaserbündel aller orthonormalen Repere $(O(M,g), \pi, M; O(k,l))$.

- Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann betrachten wir die symplektischen Basen $Sp(M,\omega)_x = \{v_x \in GL(M)_x \mid v_x \text{ ist symplektisch}\}$ und erhalten das $Sp(n,\mathbb{R})$-Hauptfaserbündel $(Sp(M,\omega), \pi, M; Sp(n,\mathbb{R}))$ der symplektischen Repere.

Definition: Zwei G-Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ und $(\tilde{P}, \tilde{\pi}, M; G)$ heißen isomorph, falls es einen G-äquivarianten Diffeomorphismus $\Phi : P \longrightarrow \tilde{P}$ mit $\tilde{\pi} \circ \Phi = \pi$ gibt.

Die G-Äquivarianz ist dabei wesentlich! Es gibt G-Hauptfaserbündel, die als Faserungen, aber nicht als Hauptfaserbündel isomorph sind. Als Beispiel betrachte man das Hopfbündel $\xi = (S^3, \pi, S^2; S^1)$ und die gleiche lokal-triviale Faserung $\tilde{\xi} = (S^3, \pi, S^2; S^1)$ mit der Gruppenwirkung $(w_1, w_2) \cdot z = (w_1 \cdot z^{-1}, w_2 \cdot z^{-1})$.

Die Existenz der G-Wirkung auf einem Hauptfaserbündel hat die folgende starke Konsequenz

Satz 2.5 *Ein G-Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.*

Beweis: Sei $s : M \longrightarrow P$ ein globaler Schnitt. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi : \; M \times G &\longrightarrow P \\ (x, g) &\longmapsto s(x) \cdot g \end{aligned}$$

ein Hauptfaserbündel-Isomorphismus zwischen P und dem trivialen G-Hauptfaserbündel. Umgekehrt definiert ein Hauptfaserbündel-Isomorphismus $\Phi : M \times G \longrightarrow P$ durch $s(x) = \Phi(x, e)$ einen globalen Schnitt in P. □

2.3 Assoziierte Faserbündel

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie man aus Hauptfaserbündeln durch "Ersetzen der Faser" neue Bündel konstruieren kann. Im folgenden bezeichne

$(P,\pi,M;G)$ ein G- Hauptfaserbündel über M und $[F,G]$ eine von links wirkende Transformationsgruppe. Auf dem Produkt $P\times F$ wirkt G von rechts durch

$$(p,v)\cdot g := (p\cdot g, g^{-1}\cdot v).$$

Mit

$$E := (P\times F)/G =: P\times_G F$$

bezeichnen wir den entsprechenden Faktorraum, mit $[p,v]$ die Äquivalenzklasse von (p,v) und mit

$$\begin{array}{rccl} \hat{\pi}: & E & \longrightarrow & M \\ & [p,v] & \longmapsto & \pi(p) \end{array}$$

die Projektion.

Satz 2.6 *Das Tupel $(E,\hat{\pi},M;F)$ ist eine lokal-triviale Faserung über M mit dem Fasertyp F (das zum Hauptfaserbündel P und der Transformationsgruppe $[F,G]$ assoziierte Faserbündel).*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass es einen Atlas von Bündelkarten für E gibt. Sei $x\in M$ und (U,ϕ_U) eine Bündelkarte des Hauptfaserbündels P um x

$$\begin{array}{rccl} \phi_U: & P_U & \longrightarrow & U\times G \\ & p & \longmapsto & (\pi(p),\varphi_U(p)). \end{array}$$

Da ϕ_U mit der G-Wirkung vertauscht, gilt gleiches für φ_U. Wir definieren jetzt

$$\begin{array}{rccl} \psi_U: & E_U & \longrightarrow & U\times F \\ & [p,v] & \longmapsto & (\pi(p),\varphi_U(p)\cdot v) \end{array}$$

Wegen der G-Äquivarianz von φ_U ist ψ_U korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten definiert und bijektiv. Die Kartenübergänge

$$\begin{array}{rccl} \psi_V\circ\psi_U^{-1}: & (U\cap V)\times F & \longrightarrow & (U\cap V)\times F \\ & (x,v) & \longmapsto & (x,\, \varphi_V(p)\cdot(\varphi_U(p)^{-1}\cdot v)) \end{array}$$

sind glatt. Folglich gibt es auf E eine Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur so, dass $(E,\hat{\pi},M;F)$ eine (glatte) lokal-triviale Faserung wird. □

Sehen wir uns die Kartenübergänge von P und dem assoziierten Bündel E genauer an, so stellen wir folgendes fest: Seien $g_{ik}: U_i\cap U_k \longrightarrow G$ die durch den Bündelatlas $\{(U_i,\phi_i)\}_i$ von P definierten Cozyklen. Die Übergangsfunktionen des in Satz 2.6 durch $\{(U_i,\phi_i)\}_i$ definierten Bündelatlas $\{(U_i,\psi_i)\}_i$ von E erfüllen dann

$$\psi_{ik}(x)v = \psi_{ix}(\psi_{kx}^{-1}(v)) = \varphi_i(p)\cdot(\varphi_k(p)^{-1}\cdot v))$$

für jedes $p\in P_x$. Wählen wir ein $p_0\in P_x$ mit $\varphi_k(p_0)=\phi_{kx}(p_0)=e$, so erhalten wir

$$\psi_{ik}(x)v = \varphi_i(p_0)\cdot v = (\phi_{ix}(\phi_{kx}^{-1}(e))\cdot v = g_{ik}(x)\cdot v$$

Die Übergangsfunktionen von E sind also durch die Linkswirkung $l_{g_{ik}(x)}\in Diff(F)$ der Cozyklen g_{ik} von P gegeben.

Satz 2.7 *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $[F, G]$ eine von links wirkende Transformationsgruppe. Sei weiterhin $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M und $g_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow G,\ i, k \in \Lambda$, eine Familie von Cozyklen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine lokal-triviale Faserung $(E, \hat{\pi}, M; F)$, deren Übergangsfunktionen durch die Linkswirkungen $l_{g_{ik}(x)} \in Diff(F, F)$ gegeben sind. Dieses Faserbündel ist assoziiert zum eindeutig bestimmten G-Hauptfaserbündel, dessen Übergangsfunktionen durch die Linkstranslationen $L_{g_{ik}(x)} \in Diff(G)$ gegeben sind.*

Beweis: Wir konstruieren das Bündel E aus den vorgegebenen Daten. Betrachten wir zunächst die disjunkte Vereinigung

$$\hat{E} := \dot{\bigcup_{i\in\Lambda}} U_i \times F$$

Die in dieser Vereinigung auftretenden "Zylinder" verkleben wir über den Mengen $U_i \cap U_k \neq \emptyset$ mittels folgender Äquivalenzrelation: Zwei Elemente $(x_i, v_i) \in U_i \times F$ und $(x_k, v_k) \in U_k \times F$ seien äquivalent, falls $x_i = x_k = x \in U_i \cap U_k$ und $v_k = g_{ki}(x)v_i$ gilt. Die Äquivalenzklasse von (x_i, v_i) bezeichnen wir mit $[x_i, v_i]$. Dann betrachten wir die Menge der Äquivalenzklassen

$$E := \hat{E}/_{\sim} \quad \text{und} \quad \pi([x, v]) = x.$$

Die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \psi_i \quad E_{U_i} & \longrightarrow & U_i \times F \\ [x_i, v] & \longmapsto & (x_i, v) \end{array}$$

sind bijektiv und es gilt $\psi_{ix}(\psi_{kx}^{-1}(v)) = g_{ik}(x) \cdot v = l_{g_{ik}(x)}(v)$. Insbesondere ist

$$\begin{array}{rcl} \psi_i \circ \psi_k^{-1} :\ (U_i \cap U_k) \times F & \longrightarrow & (U_i \cap U_k) \times F \\ (x, v) & \longmapsto & (x, g_{ik}(x)v) \end{array}$$

glatt. Folglich gibt es auf E eine Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass $(E, \pi, M; F)$ eine lokal-triviale Faserung wird. Die analoge Konstruktion machen wir mit der Transformationsgruppe $[G, G]$. Nach Satz 2.4 entsteht dann ein G-Hauptfaserbündel P. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P \times_G F & \longrightarrow & E \\ [[x_i, g], v] & \longmapsto & [x_i, g \cdot v] \end{array}$$

ist ein Isomorphismus der Faserbündel. Abschließend zeigen wir noch die Eindeutigkeit von E. Seien E und $\tilde{E}$ zwei Faserbündel mit Bündelatlanten $\{(U_i, \psi_i)\}$ bzw. $\{(U_i, \tilde{\psi}_i)\}$, deren Übergangsfunktionen durch die Cozyklen g_{ik} gegeben sind. Dann definieren wir einen Bündelisomorphismus $H : E \longrightarrow \tilde{E}$ durch

$$\begin{array}{ccc} E_{U_i} & \xrightarrow{H} & \tilde{E}_{U_i} \\ \psi_i \downarrow & & \uparrow \tilde{\psi}_i^{-1} \\ U_i \times F & \xrightarrow{id} & U_i \times F \end{array}$$

Die Voraussetzungen an die Bündelkarten liefern die Unabhängkeit von U_i. □

Im folgenden werden wir oft spezielle Diffeomorphismen zwischen dem Fasertyp F und den Fasern des zum G-Hauptfaserbündel P und dem G-Raum F assoziierten Faserbündels $E = P \times_G F$ benutzen:
Sei $p \in P_x$ ein Punkt von P in der Faser über $x \in M$. Dann heißt

$$[p] : v \in F \longrightarrow [p, v] \in E_x = P_x \times_G F$$

der *von p definierte Faserdiffeomorphismus*. Offensichtlich gilt $[pg] = [p]g$ für alle $p \in P, g \in G$.
Abschließend beweisen wir eine nützliche Interpretation der Schnitte in assoziierten Faserbündeln. Mit $C^\infty(P, F)^G$ bezeichen wir die Menge der glatten G-äquivarianten Abbildungen von P in F

$$C^\infty(P, F)^G := \{\overline{s} \in C^\infty(P, F) \mid \overline{s}(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \overline{s}(p) \quad \forall\, p \in P,\, g \in G\}.$$

Dann gilt

Satz 2.8 *Sei $E := P \times_G F$ das zu einem G-Hauptfaserbündel P über M und einer Transformationsgruppe $[F, G]$ assoziierte Faserbündel. Dann gilt für die glatten Schnitte in E*

$$\Gamma(E) = C^\infty(P, F)^G.$$

Beweis: Sei $\overline{s} \in C^\infty(P, F)^G$ eine äquivariante Abbildung. Wir definieren den zugehörigen Schnitt $s : M \longrightarrow E$ durch $s(x) := [p, \overline{s}(p)] \in E_x$, wobei $p \in P_x$ ein beliebig gewähltes Element in der Faser über $x \in M$ ist. Wegen $[pg, \overline{s}(pg)] = [pg, g^{-1}\overline{s}(p)] = [p, \overline{s}(p)]$ hängt dies nicht von der Auswahl von p ab.
Sei andererseits $s \in \Gamma(E)$ ein Schnitt in E und die Abbildung $\overline{s} : P \longrightarrow F$ definiert durch $\overline{s}(p) := [p]^{-1}s(x)$. Dann gilt $\overline{s}(pg) = [pg]^{-1}s(x) = g^{-1}[p]^{-1}s(x) = g^{-1}\overline{s}(p)$. Also ist $\overline{s} \in C^\infty(P, F)^G$. □

2.4 Vektorbündel

In diesem Abschnitt betrachten wir lokal-triviale Faserungen, deren Fasertyp ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Definition: Eine lokal-triviale Faserung $(E, \pi, M; V)$ heißt $\mathbb{K}$-*Vektorbündel* vom Rang $m < \infty$, falls folgende Bedingungen gelten

1. Der Fasertyp V ist ein m-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
2. Jede Faser E_x des Bündels ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

3. Es existiert ein Bündelatlas $\{U_i, \phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ von E, so dass die Faserisomorphismen

$$\phi_{ix} : E_x \longrightarrow V \ , \quad i \in \Lambda$$

Vektorraum-Isomorphismen sind.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt E reelles Vektorbündel, ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt E komplexes Vektorbündel[6].

Für Vektorbündel kann man die gleichen Operationen ausführen, wie für Vektorräume.

1. Die Whitney-Summe
Seien E und $\tilde{E}$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit dem Fasertyp V bzw. $\tilde{V}$. Wir betrachten die Menge

$$E \oplus \tilde{E} := \dot{\bigcup_{x\in M}} E_x \oplus \tilde{E}_x$$

und die Projektion

$$\pi_\oplus : (e_x, \tilde{e}_x) \in E_x \oplus \tilde{E}_x \longmapsto x \in M.$$

Die Topologie und Differentialstruktur auf $E \oplus \tilde{E}$ wird, wie in Kapitel 2.1 erläutert, durch Bündelkarten erkärt. Seien $(U, \phi) = (\pi, \varphi_U)$ und $(U, \tilde{\phi}) = (\pi, \tilde{\varphi}_U)$ Bündelkarten von E bzw. $\tilde{E}$ über der offenen Menge $U \subset M$. Dann ist

$$\begin{array}{rccl} \phi_U : & (E \oplus \tilde{E})_U & \longrightarrow & U \times (V \oplus \tilde{V}) \\ & (e, \tilde{e}) & \longmapsto & (\pi(e), \varphi_U(e) \oplus \tilde{\varphi}_U(\tilde{e})) \end{array}$$

eine Bündelkarte von $E \oplus \tilde{E}$ über U. Das Vektorbündel $(E \oplus \tilde{E}; \pi_\oplus, M; V \oplus \tilde{V})$ heißt *Whitney-Summe* von E und $\tilde{E}$.

2. Das Tensorprodukt
Seien E und $\tilde{E}$ Vektorbündel wie in 1. Beispiel. Wir betrachten die Menge

$$E \otimes \tilde{E} := \dot{\bigcup_{x\in M}} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x$$

und die Projektion

$$\pi_\otimes : (e_x, \tilde{e}_x) \in E_x \otimes \tilde{E}_x \longmapsto x \in M.$$

Die Topologie und Differentialstruktur auf $E \otimes \tilde{E}$ wird durch die Bündelkarten

$$\begin{array}{rccl} \phi_U : & (E \times \tilde{E})_U & \longrightarrow & U \times (V \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{V}) \\ & (e, \tilde{e}) & \longmapsto & (\pi(e), \varphi_U(e) \otimes \tilde{\varphi}_U(\tilde{e})) \end{array}$$

erklärt. Das Vektorbündel $(E \otimes \tilde{E}; \pi_\otimes, M; V \otimes \tilde{V})$ heißt *Tensorprodukt* von E und $\tilde{E}$.

[6]Falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, lassen wir die Angabe des Körpers weg

3. Das duale Vektorbündel
Sei $(E, \pi, M; V)$ ein Vektorbündel und V^* der duale Vektorraum zu V. Wir betrachten die Menge

$$E^* := \dot{\bigcup_{x \in M}} E_x^*$$

und die Projektion

$$\pi^* : L_x \in E_x^* \longmapsto x \in M.$$

Die Topologie und Differentialstruktur auf E^* wird durch die Bündelkarten

$$\begin{array}{rccl} \phi_U^* : & E_U^* & \longrightarrow & U \times V^* \\ & L & \longmapsto & (\pi(L), \varphi_U^*(L)), \quad \text{mit } \varphi_U^*(L)(v) = L(\phi_{U,x}^{-1}(v)) \end{array}$$

erklärt. $(E^*, \pi^*, M; V^*)$ heißt zu E *duales Vektorbündel*.

4. Das konjugierte Vektorbündel
Sei $(E, \pi, M; V)$ ein komplexes Vektorbündel und bezeichne $\overline{V}$ den konjugiert-komplexen Vektorraum zu V, d.h. die abelsche Gruppe V mit der $\mathbb{C}$-Wirkung $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V \longmapsto \overline{\lambda} \cdot v \in V$. Für eine Bündelkarte (U, ϕ_U) von E bezeichne $\overline{\phi}_{U,x} : \overline{E}_x \longrightarrow \overline{V}$ den durch $\phi_{U,x}$ induzierten Vektorraum-Isomorphismus. Wir betrachten die Menge

$$\overline{E} := \dot{\bigcup_{x \in M}} \overline{E}_x,$$

die Projektion $\overline{\pi} : \overline{e}_x \in \overline{E}_x \longmapsto x \in M$ und die Bündelkarten

$$\begin{array}{rccl} \overline{\phi}_U : & \overline{E}_U & \longrightarrow & U \times \overline{V} \\ & \overline{e} \in \overline{E}_x & \longmapsto & (x, \overline{\phi}_{U,x}(\overline{e})) \end{array}$$

Das Vektorbündel$\{\overline{E}, \overline{\pi}, M; \overline{V})$ heißt das zu E *konjugierte Bündel*.

5. Das Homomorphismenbündel
Seien E und $\tilde{E}$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit dem Fasertyp V bzw. $\tilde{V}$ und den Bündelatlanten $\{(U, \phi)\}_{U \in \mathcal{U}}$ bzw. $\{(U, \tilde{\phi})\}_{U \in \mathcal{U}}$ Wir betrachten die Menge

$$Hom(E, \tilde{E}) := \dot{\bigcup_{x \in M}} Hom(E_x, \tilde{E}_x)$$

und die Projektion

$$\hat{\pi} : L_x \in Hom(E_x, \tilde{E}_x) \longmapsto x \in M.$$

Die Topologie und Differentialstruktur auf $Hom(E, \tilde{E})$ wird durch die Bündelkarten

$$\begin{array}{rccl} \hat{\phi}_U : & Hom(E, \tilde{E})_U & \longrightarrow & U \times Hom(V, \tilde{V}) \\ & L_x & \longmapsto & (x, T) \quad \text{mit } T(v) := (\tilde{\phi}_{U,x} \circ L_x \circ \phi_{U,x}^{-1})(v)) \end{array}$$

erklärt. Das Vektorbündel $(Hom(E,\tilde{E}), \hat{\pi}, M; Hom(V,\tilde{V}))$ heißt *Homomorphismenbündel von E nach $\tilde{E}$.*

Definition: Zwei Vektorbündel $(E,\pi,M;V)$ und $(\tilde{E},\tilde{\pi},M;\tilde{V})$ heißen *isomorph*, falls es einen Diffeomorphismus $\Phi : E \longrightarrow \tilde{E}$ mit $\tilde{\pi}\circ\Phi = \pi$ gibt, dessen Einschränkungen $\Phi|_{E_x} : E_x \longrightarrow \tilde{E}_x$ auf die Fasern Vektorraum-Isomorphismen sind.

Jedes Vektorbündel ist zu einem Hauptfaserbündel mit linearer Strukturgruppe assoziiert. Sei $(E,\pi,M;V)$ ein Vektorbündel über M mit Fasertyp V und $GL(V)$ die lineare Liesche Gruppe aller Isomorphismen des Vektorraumes V. Bezeichne weiterhin $\{(U_i,\psi_i)\}_{i\in\Lambda}$ einen Bündelatlas von E. Da die Übergangsfunktionen $\psi_{ik}(x) := \psi_{ix}\circ\psi_{kx}^{-1} : V \longrightarrow V$ linear sind, definieren sie Cozyklen

$$g_{ik} := \psi_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow GL(V)$$

in $GL(V)$. Nach Satz 2.4 ist E assoziiert zum durch die Cozyklen $\{g_{ik}\}$ definierten Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe $GL(V)$.
Sei andererseits $(P,\pi,M;G)$ ein G-Hauptfaserbündel und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G über V. Dann ist das dazu assozierte Faserbündel

$$E := P \times_{(G,\rho)} V$$

ein Vektorbündel mit der auf den Fasern $E_x = P_x \times_{(G,\rho)} V$ durch

$$\lambda[p,v] + \mu[p,w] := [p, \lambda v + \mu w]\ , \quad p \in P, v,w \in V, \lambda,\mu \in \mathbb{K}$$

definierten Vektorraum-Struktur. Die durch ein $p \in P_x$ definierten Faserdiffeomorphismen $[p] : v \in V \longrightarrow [p,v] \in E_x$ sind dann lineare Isomorphismen.
Die Operationen $\oplus, \otimes, ^*, ^-, Hom, \ldots$ auf den Bündeln entsprechen den analogen Operationen auf den Darstellungen.
Sind $E = P \times_{(G,\rho)} E$ und $\tilde{E} = P \times_{(G,\tilde{\rho})} \tilde{V}$ zwei zu G-Darstellungen assoziierte Vektorbündel, so ist z.B. das Tensorbündel gegeben durch $E\otimes\tilde{E} = P\times_{(G,\rho\otimes\tilde{\rho})} V\otimes\tilde{V}$.

Wir erläutern die Beziehung zwischen Vektorbündeln und Hauptfaserbündeln an zwei Beispielen.

Beispiel 1: Die Tensorbündel einer Mannigfaltigkeit
Sei M^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel, T^*M das Cotangentialbündel, $\Lambda^k(M)$ das Bündel der k-Formen, $T^{(r,s)}M$ das Bündel der (r,s)-Tensoren und $GL(M)$ das $GL(n,\mathbb{R})$-Hauptfaserbündel aller Repere von M. Bezeichne weiterhin $\rho : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ die durch die Matrizenwirkung gegebene Darstellung von $GL(n,\mathbb{R})$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und $\rho^* : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{n*})$ die dazu duale Darstellung, $\rho_k : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(\Lambda^k(T_x^*M))$ die induzierte Dartellung auf den k-Formen und $\rho_{(r,s)} : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(T^{r,s}(T_x^*M))$ die induzierte

Darstellung auf den (r,s)-Tensoren. Dann sind die folgenden Bündel isomorph

$$\begin{aligned}
TM &\simeq GL(M) \times_{(GL(n,\mathbb{R}),\rho)} \mathbb{R}^n \\
T^*M &\simeq GL(M) \times_{(GL(n,\mathbb{R}),\rho^*)} \mathbb{R}^{n*} \\
\Lambda^k M &\simeq GL(M) \times_{(GL(n,\mathbb{R}),\rho_k)} \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) \\
T^{(r,s)}(M) &\simeq GL(M) \times_{(GL(n,\mathbb{R}),\rho_{r,s})} T^{r,s}(\mathbb{R}^{n*})
\end{aligned}$$

Den Isomorphismus zwischen dem Tangentialbündel und dem zum Reperbündel assoziierten Bündel erhält man beispielsweise durch

$$\begin{array}{rccl}
\Phi: & GL(M) \times_\rho \mathbb{R}^n & \longrightarrow & TM \\
& [(s_1,\ldots,s_n),(x_1,\ldots,x_n)] & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i s_i
\end{array}$$

wobei $(s_1,\ldots,s_n)$ eine Basis in T_xM bezeichne. Den Isomorphismus für das Cotangentialbündel erhält man durch

$$\begin{array}{rccl}
\Phi^*: & GL(M) \times_{\rho^*} \mathbb{R}^{n*} & \longrightarrow & T^*M \\
& [(s_1,\ldots,s_n),(y_1,\ldots,y_n)] & \longmapsto & \sum_{i=1}^n y_i \sigma^i,
\end{array}$$

wobei $(\sigma^1,\ldots\sigma^n)$ die duale Basis zu $(s_1,\ldots,s_n)$ bezeichnet. Die beiden letzten Fällen gehen analog.

Beispiel 2: Das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$
Sei H die Menge $H := \{(L,\xi) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid \xi \in L\}$ und $\pi : H \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ die Abbildung $\pi : (L,\xi) \in H \longrightarrow L \in \mathbb{C}P^n$. Dann gilt

- $(H,\pi,\mathbb{C}P^n;\mathbb{C})$ ist ein 1-dimensionales komplexes Vektorbündel über $\mathbb{C}P^n$.
- Sei $(S^{2n+1};\pi,\mathbb{C}P^n;S^1)$ das Hopfbündel über $\mathbb{C}P^n$ und $\rho_k : S^1 \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ die Darstellung $\rho_k(z)w = z^k w$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
H &\simeq S^{2n+1} \times_{(S^1,\rho)} \mathbb{C} \\
H^* &\simeq S^{2n+1} \times_{(S^1,\rho_{-1})} \mathbb{C} \\
\otimes^k H &\simeq S^{2n+1} \times_{(S^1,\rho_k)} \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Abschließend zeigen wir noch, das jedes reelle Vektorbündel vom Rang m zu einem $O(m)$-Haupfaserbündel und jedes komplexe Vektorbündel vom Rang m zu einem $U(m)$-Hauptfaserbündel assoziiert ist. Wir benutzen dazu Bündelmetriken.

Definition: Eine *Bündelmetrik* auf einem reellen bzw. komplexen Vektorbündel E über M ist ein Schnitt $\langle\cdot,\cdot\rangle \in \Gamma(E^* \otimes \overline{E}^*)$, der jedem Punkt $x \in M$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine nichtausgeartete hermitische Form ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_x} := \langle\cdot,\cdot\rangle(x) : E_x \times E_x \to \mathbb{K}$$

zuordnet.

Ein Beispiel sind die semi-Riemannschen Metriken auf dem Tangentialbündel TM. Analog wie für Riemannsche Metriken beweist man

Satz 2.9 *Auf jedem komplexen oder reellen Vektorbündel existiert eine positiv-definite Bündelmetrik.*

Beweis: Sei $(E, \pi, M; V)$ ein komplexes oder reelles Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M mit dem Fasertyp V. Wir betrachten einen Atlas von Bündelkarten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ von E und eine Zerlegung der 1 $\{f_i\}_{i\in\Lambda}$ zur Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$. Sei $(a_1, \ldots, a_m)$ eine Basis in V. Dann definiert

$$\begin{array}{rcl} s_{i\alpha} : U_i & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & s_{i\alpha}(x) := \phi_i^{-1}(x, a_\alpha) \end{array}$$

ein lokales Basisfeld $(s_{i1}, \ldots, s_{im})$ in E über U_i. Wir definieren eine Bündelmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ im Teilbündel E_{U_i} durch die Bedingung

$$\langle s_{i\alpha}(x), s_{i\beta}(x)\rangle_{ix} := \delta_{\alpha\beta} \quad \text{für } x \in U_i.$$

Dann liefert das "Verkleben" dieser lokalen Metriken mittels der Zerlegung der 1, d.h.

$$\langle\cdot,\cdot\rangle(x) := \sum_{i\in\Lambda} f_i(x)\langle\cdot,\cdot\rangle_{ix}$$

eine positiv-definite Bündelmetrik auf E. □

Satz 2.10 *1. Jedes reelle Vektorbündel vom Rang m ist zu einem $O(m)$-Hauptfaserbündel assoziiert.*

2. Jedes komplexe Vektorbündel vom Rang m ist zu einem $U(m)$-Hauptfaserbündel assoziiert.

Beweis: Sei E ein Vektorbündel vom Rang m über M. Wir fixieren eine positiv-definite Bündelmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf E und betrachten die Menge der Basen

$$P_x := \{s_x = (s_1, \ldots, s_m) \mid s_x \text{ Basis in } E_x \text{ mit } \langle s_\alpha, s_\beta\rangle_x = \delta_{\alpha\beta}\}$$

Dann ist durch

$$\begin{array}{rcl} P := \dot{\bigcup\limits_{x\in M}} P_x : & \xrightarrow{\pi} & M \\ s_x & \longmapsto & x \end{array}$$

ein $O(m)$- bzw. $U(m)$-Hauptfaserbündel über M gegeben und es gilt

$$P \times_{O(m)} \mathbb{R}^m \simeq E \quad \text{bzw.} \quad P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \simeq E,$$

wobei die Identifizierung durch $[(s_1, \dots, s_m), (x_1, \dots, x_m)] \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha s_\alpha$ gegeben ist. $\square$

Ist $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über M, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G über einem reellen bzw. komplexen Vektorraum V und $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ eine G-invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform bzw. eine G-invariante nichtausgeartete hermitische Form der Signatur (k, l) auf V. Dann ist auf dem assozierten Vektorbündel $E = P \times_{(G,\rho)} V$ eine Bündelmetrik der Signatur (k, l) durch

$$\langle [p, v], [p, w] \rangle_{E_x} := \langle v, w \rangle_V \qquad \text{für } p \in P,\ v, w \in V$$

gegeben.

2.5 Reduktion und Erweiterung von Hauptfaserbündeln

Wir behandeln in diesem Abschnitt, wie man die Strukturgruppe eines Hauptfaserbündels ändern kann.

Definition: Sei $\xi = (P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel und $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen. Eine *λ-Reduktion von ξ* ist ein Paar (η, f) bestehend aus einem H-Hauptfaserbündel $\eta = (Q, \tilde{\pi}, M, H)$ und einer glatten Abbildung $f : Q \longrightarrow P$ mit den folgenden Eigenschaften

- $\pi \circ f = \tilde{\pi}$ und
- $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$ für alle $q \in Q$ und $h \in H$.

Definition: Zwei λ-Reduktionen (η, f) und $(\tilde{\eta}, \tilde{f})$ von ξ heißen *isomorph*, wenn es einen H-Hauptfaserbündel-Isomorphismus $\phi : Q \longrightarrow \tilde{Q}$ gibt, für den $\Phi \circ \tilde{f} = f$ gilt. Mit $Red_\lambda(\xi)$ bezeichnen wir die Menge der Isomorphieklassen von λ-Reduktionen.

Ist speziell $H \subset G$ eine Liesche Untergruppe von G und λ die Einbettung, so spricht man auch von der *Reduktion von P auf H*, da die Abbildung $f : Q \longrightarrow P$ in diesem Fall eine Einbettung ist.

Beispiel: Reduktionen des Reperbündels
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Reperbündel $GL(M)$. Jede zusätzliche geometrische Struktur auf M liefert eine Reduktion des Reperbündels auf eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$. Wir beschreiben dies am Beispiel der Metriken. Sei g eine semi-Riemannsche Metrik der Signatur (k, l) auf M, dann ist das in Kapitel 2.2 definierte Bündel $O(M, g)$ der orthonormalen Basen eine Reduktion des Reperbündels $GL(M)$ auf die orthogonale Gruppe $O(k, l)$. Andererseits definiert

jede $O(k,l)$-Reduktion $(Q,\tilde{\pi},M,O(k,l))$ des Reperbündels eine semi-Riemannsche Metrik g der Signatur (k,l) auf M. Um die Metrik zu definieren, betrachten wir für jeden Punkt $x \in M$ ein Element $q \in Q_x$ in der Faser über x. Dann ist $f(q) = (v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis in T_xM. Wir definieren g_x durch die Forderung $g_x(v_i,v_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$, wobei $\varepsilon_i = -1$ für $i = 1,\ldots,k$ und $\varepsilon_i = 1$ für $i = k+1,\ldots,n$. Die Invarianzeigenschaften von f haben zur Folge, dass g_x nicht von der Auswahl von $q \in Q_x$ abhängt. Die Glattheit des durch die Familie $\{g_x\}$ definierten Schnittes $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ folgt aus der Glattheit von f. g ist also eine semi-Riemannsche Metrik der Signatur (k,l) auf M.

Satz 2.11 *Sei $\xi = (P,\pi,M;G)$ ein G-Hauptfaserbündel über M und $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen. Dann existiert genau dann eine λ-Reduktion von P, wenn es einen Bündelatlas $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ von P und eine Familie von H-Cozyklen $h_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow H,\ i,k \in \Lambda$, gibt, so dass*

$$\lambda(h_{ik}(x)) = \Phi_{ix}\left(\Phi_{kx}^{-1}(e)\right) := g_{ik}(x) \quad \textit{für alle } x \in U_i \cap U_k$$

gilt.

Beweis: Sei zunächst das H-Hauptfaserbündel $(Q,\tilde{\pi},M;H)$ mit der Abbildung $f : Q \longrightarrow P$ eine λ-Reduktion von P. Wir betrachten einen Bündelatlas $\{(U_i,\psi_i)\}_{i\in U}$ von Q und die entsprechende Familie von Cozyklen $h_{ik} : x \in U_i \cap U_k \longrightarrow \psi_{ix}(\psi_{kx}^{-1}(e)) \in H$. Aus der Bündelkarte (U_i,ψ_i) verschaffen wir uns eine Bündelkarte von P über U_i. Sei dazu $p \in P_x$ für ein $x \in U_i$. Dann existiert ein $q \in Q_x$ mit $p = f(q) \cdot g$. Wir definieren

$$\begin{array}{rccl} \phi_i: & P_{U_i} & \longrightarrow & U_i \times G \\ & p & \longmapsto & (\pi(p), \lambda(\psi_{ix}(q)) \cdot g). \end{array}$$

Dieser Diffeomorphismus ist unabhängig von der Auswahl von q, G-äquivariant und für die entsprechenden Cozyklen gilt

$$g_{ij}(x) := \phi_{ix}(\phi_{kx}^{-1}(e)) = \lambda(h_{ik}(x)).$$

Sei andererseits $(P,\pi,M;G)$ ein G-Hauptfaserbündel, dessen Cozyklen $\{g_{ik}\}$ durch H-Cozyklen $h_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow H$ gegeben sind, d.h. gelte $g_{ik}(x) = \lambda(h_{ik}(x))$. Nach Satz 2.4 definieren diese H-Cozyklen ein H-Hauptfaserbündel $(Q,\tilde{\pi},M;H)$ über M mit Bündelkarten $\psi_i : Q_{U_i} \longrightarrow U_i \times H$ über U_i. Dann erhalten wir für die Teilbündel Abbildungen $f_i : Q_{U_i} \longrightarrow P_{U_i}$ durch $f_i := \phi_i^{-1} \circ (id_{U_i} \times \lambda) \circ \psi_i$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q_{U_i} & \xrightarrow{f_i} & P_{U_i} \\ \downarrow \psi_i & & \downarrow \phi_i \\ U_i \times H & \xrightarrow{id\times\lambda} & U_i \times G \end{array}$$

kommutiert. Aus der Cozyklusbedingung folgt, dass $f_i = f_k$ auf $Q_{U_i\cap U_k}$. Damit haben wir eine Abbildung $f : Q \longrightarrow Q$ mit den erforderlichen Eigenschaften definiert.$\Box$

Als nächstes beweisen wir ein Kriterium für die Reduzierbarkeit eines G-Hauptfaserbündels $(P, \pi, M; G)$ auf eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$, das die Existenz von Schnitten in assoziierten Faserbündeln benutzt. Wir betrachten dazu die von den Linkstranslationen induzierte G-Wirkung auf dem homogenen Raum G/H und das assoziierte Faserbündel

$$\begin{array}{rcl} E := P \times_G G/H & \simeq & P/H \\ [p, g \cdot H] & \longmapsto & (p \cdot g) \cdot H \end{array}$$

Satz 2.12 *Das G-Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist genau dann auf die abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ reduzierbar, wenn das assoziierte Faserbündel $(E, \tilde{\pi}, M; G/H)$ einen globalen glatten Schnitt besitzt.*

Beweis: Betrachten wir zunächst einen glatten Schnitt $s \in \Gamma(E)$. Nach Satz 2.8 entspricht diesem Schnitt eine G-äquivariante Abbildung $\overline{s} \in C^\infty(P, G/H)^G$. Wir definieren die Menge $Q \subset P$ durch

$$Q := \{p \in P \mid \overline{s}(p) = eH\}$$

und zeigen, dass Q mit der Projektion $\overline{\pi} := \pi|_Q$ ein H-Hauptfaserbündel ist. Wegen der G-Äquivarianz von $\overline{s}$ gilt

$$\overline{s}(ph) = h^{-1}\overline{s}(p) = h^{-1}eH = eH \quad \text{für alle } h \in H.$$

Folglich wirkt die Untergruppe H von rechts auf Q. Seien $q, \tilde{q} \in Q \cap P_x$. Dann gibt es genau ein $g \in G$, so dass $q = \tilde{q} \cdot g$. Da

$$\overline{s}(q) = eH = \overline{s}(\tilde{q}g) = g^{-1}\overline{s}(\tilde{q}) = g^{-1}eH = g^{-1}H,$$

liegt g in der Untergruppe H. Folglich ist die H-Wirkung auf Q fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern. Sei $\{(U_i, s_i)\}_{i\in\Lambda}$ eine Überdeckung von P durch lokale Schnitte, die Bündelkarten von P entsprechen (siehe Satz 2.3), und $\sigma_i : W_i \subset G/H \longrightarrow G$ lokale Schnitte im homogenen Bündel mit $s_i(U_i) \subset W_i$. Dann ist $g_i := \sigma_i \circ \overline{s} \circ s_i : U_i \longrightarrow G$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten den Schnitt $\tilde{s}_i : U_i \longrightarrow P$ definiert durch

$$\tilde{s}_i(x) := s_i(x) \cdot g_i(x).$$

Wegen der Invarianzeigenschaft von $\overline{s}$ gilt

$$\overline{s}(\tilde{s}_i(x)) = g_i^{-1} \cdot \overline{s}(s_i(x)) = g_i^{-1} \cdot g_i \cdot H = eH.$$

Also ist $\tilde{s}_i : U_i \longrightarrow Q$ ein lokaler Schnitt in Q. Dies definiert die nötigen lokalen Trivialisierungen von Q und die Einbettung $Q \subset P$ erfüllt alle Eigenschaften einer H-Reduktion von P.

Sei nun andererseits $(Q, \overline{\pi}, M, H)$ mit $f : Q \longrightarrow P$ eine H-Reduktion von P. Dann ist $f : Q \longrightarrow P$ eine Einbettung. Die Untergruppe H wirkt von links auf G. Dies definiert ein G-Hauptfaserbündel $Q \times_H G$ über M und man prüft leicht nach, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \; Q \times_H G & \longrightarrow & P \\ [q, g] & \longmapsto & f(q)g \end{array}$$

korrekt definiert und ein Isomorphismus der G-Hauptfaserbündel ist. Den gesuchten Schnitt $\overline{s} : P \longrightarrow G/H$ definieren wir nun durch

$$\begin{array}{rcl} \overline{s} : \; P = Q \times_H G & \longrightarrow & G/H \\ [q, g] & \longmapsto & g^{-1}H. \end{array}$$

Dann gilt die Invarianzbedingung

$$\overline{s}([q, g] \cdot a) = \overline{s}([q, ga]) = a^{-1}g^{-1}H = a^{-1}\overline{s}([q, g]) \quad \text{für alle } g, a \in G, q \in Q.$$

Folglich ist $\overline{s} \in C^\infty(P, G/H)^G$. □

Als Anwendung dieses Kriteriums beweisen wir, dass man man jedes G-Hauptfaserbündel mit nicht-kompakter Strukturgruppe G auf eine kompakte Gruppe reduzieren kann.

Satz 2.13 *Sei G eine zusammenhängende, nicht-kompakte Liesche Gruppe und $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über der Mannigfaltigkeit M. Dann läßt sich P auf jede maximal-kompakte Untergruppe $K \subset G$ reduzieren.*

Beweis: Sei $K \subset G$ eine maximal-kompakte Untergruppe. Dann ist der homogene Raum G/K diffeomorph zu einem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^m$.[7] Nach Satz 2.12 genügt es zu zeigen, dass es einen globalen Schnitt im assoziierten Faserbündel $E = P \times_G G/K$ gibt. Dies folgt aber aus Satz 2.2. □

Satz 2.14 *Sei $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G. Sei weiterhin $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel und (Q, f) eine λ-Reduktion von P. Dann sind die assoziierten Vektorbündel $P \times_{(G,\rho)} V$ und $Q \times_{(H,\rho\lambda)} V$ isomorph.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \; Q \times_{(H,\rho\lambda)} V & \longrightarrow & P \times_{(G,\rho)} V \\ [q, v] & \longmapsto & [f(q), v]. \end{array}$$

Ψ ist korrekt definiert, da $\Psi([qh, \rho\lambda(h^{-1})v]) = [f(q)\lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v] = [f(q), v]$. Offensichtlich ist Ψ linear und faserteu. Sei nun $\Psi([q, v]) = \Psi([\tilde{q}, \tilde{v}])$ für $q, \tilde{q} \in Q_x$,

[7]Einen Beweis findet man in J. Hilgert, K.-K.Neeb: Lie-Gruppen und Lie-Algebren, Vieweg-Verlag 1991, Kap. III

$v, \tilde{v} \in V$. Dann gibt es ein $h \in H$ mit $\tilde{q} = qh$. Wir erhalten $f(\tilde{q}) = f(q)\lambda(h)$ und daraus

$$[f(q), v] = [f(q)\lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v] = [f(\tilde{q}), \rho(\lambda(h)^{-1})v] = [f(\tilde{q}), \tilde{v}].$$

Folglich gilt $\tilde{v} = \rho(\lambda(h^{-1}))v$ und somit $[q, v] = [qh, \rho(\lambda(h^{-1}))v] = [\tilde{q}, \tilde{v}]$. Also ist Ψ injektiv. Sei jetzt $[p, v] \in P \times_G V$ ein beliebiges Element mit $p \in P_x$. Wir wählen ein beliebiges Element $q \in Q_x$. Dann gibt es ein $g \in G$, so dass $f(q) = pg$. Wir erhalten $\Psi([q, \rho(g^{-1})v]) = [f(q), \rho(g^{-1})v] = [p, v]$. Somit ist Ψ surjektiv. Die Glattheit erhält man aus der Betrachtung der Bündelkarten. □

Wir betrachten jetzt eine zur Reduktion inverse Prozedur, die Erweiterung von Hauptfaserbündeln.

Definition: Sei $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen und $(Q, \pi, M; H)$ ein H-Hauptfaserbündel. Wir betrachten die durch λ definierte H-Wirkung auf G. Dann heißt das assoziierte G-Hauptfaserbündel $P := Q \times_H G$ die *λ-Erweiterung von Q*.

Satz 2.15 *Sei $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen.*

1. *Sei Q ein H-Hauptfaserbündel über M und $f : Q \longrightarrow P = Q \times_H G$ die Abbildung $f(q) = [q, e]$. Dann ist (Q, f) eine λ-Reduktion der Erweiterung $P = Q \times_H G$.*
2. *Sei P ein G-Hauptfaserbündel über M und (Q, f) eine λ-Reduktion von P. Dann ist P isomorph zur λ-Erweiterung von Q.*

Beweis: Wir überlassen den Beweis dem Leser zur Übung. Zum Beweis der 2. Behauptung zeigt man, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & Q \times_H G & \longrightarrow & P \\ & [q, g] & \longmapsto & f(q)g \end{array}$$

ein Isomorphisms der G-Hauptfaserbündel ist. □

Als Anwendung beweisen wir abschließend ein Kriterium für die Existenz von pseudo-Riemannschen Metriken. Auf einer Mannigfaltigkeit M existiert immer eine Riemannsche Metrik (siehe Satz 2.9). Für pseudo-Riemannsche Metriken gilt dies nicht mehr.

Satz 2.16 *Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und (k, l) ein Tupel natürlicher Zahlen mit $k + l = n$. Dann existiert genau dann eine pseudo-Riemannsche Metrik der Signatur (k, l) auf M, wenn es ein reelles Vektorbündel ξ vom Rang k und ein reelles Vektorbündel η vom Rang l über M gibt, so dass $TM = \xi \oplus \eta$ gilt.*

Beweis: Sei $TM = \xi \oplus \eta$. Wir wählen eine beliebige Riemannsche Metrik r auf M und setzen

$$g|_{\xi\times\xi} := -r|_{\xi\times\xi}\,, \quad g|_{\eta\times\eta} := r|_{\eta\times\eta}\,, \quad g|_{\xi\times\eta} := 0.$$

Dann ist g eine pseudo-Riemannsche Metrik der Signatur (k,l). Sei umgekehrt g eine pseudo-Riemannsche Metrik der Signatur (k,l). Dann betrachten wir das Bündel aller g-orthonormalen Repere $O(M,g)$. Die Strukturgruppe von $O(M,g)$ ist die nicht-kompakte Liesche Gruppe $O(k,l)$. Das Produkt der orthogonalen Gruppen $O(k)\times O(l) \subset O(k,l)$ ist eine maximal-kompakte Untergruppe in $O(k,l)$. Nach Satz 2.13 existiert eine $(O(k)\times O(l))$-Reduktion Q von $O(M,g)$. Nach Satz 2.14 gilt dann

$$\begin{aligned} TM &= GL(M)\times_{GL(n,\mathbb{R})}\mathbb{R}^n \\ &= O(M,g)\times_{O(k,l)}\mathbb{R}^n \\ &= Q\times_{(O(k)\times O(l))}(\mathbb{R}^k\oplus\mathbb{R}^l) \\ &= (Q\times_{O(k)}\mathbb{R}^k)\oplus(Q\times_{O(l)}\mathbb{R}^l) \\ &=: \xi\oplus\eta. \end{aligned}$$

□

2.6 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 1. Sei $V_k(\mathbb{R}^n)$ die Stiefel-Mannigfaltigkeit, $G_k(\mathbb{R}^n)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit und $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung, die jedem k-Tupel $(v_1,...,v_k)$ von ON-Vektoren den von ihnen erzeugten k-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Beweisen Sie, daß $(V_k(\mathbb{R}^n),\pi,G_k(\mathbb{R}^n);O(k))$ ein $O(k)$-Hauptfaserbündel ist.

Aufgabe 2. Es seien $\xi = (P_\xi,\pi_\xi,X;G)$ und $\eta = (P_\eta,\pi_\eta,Y;G)$ G-Hauptfaserbündel und $f : Y \longrightarrow X$ eine glatte Abbildung. Beweisen Sie:
Die G-Hauptfaserbündel $f^*\xi$ und η über Y sind genau dann isomorph, wenn es eine glatte G-äquivariante Abbildung $H : P_\eta \longrightarrow P_\xi$ gibt, für die $\pi_\xi\circ H = f\circ\pi_\eta$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f : (M,g) \longrightarrow (\widetilde{M},\widetilde{g})$ eine semi-Riemannsche Immersion.
Zeigen Sie: Es existiert ein Vektorbündel ν_f über der Mannigfaltigkeit M derart, daß

$$f^*T\widetilde{M} = TM\oplus\nu_f.$$

(ν_f heißt Normalenbündel der Immersion f.)

Aufgabe 4. Es sei $(S^{2n+1},\pi,\mathbb{C}P^n;S^1)$ das Hopfbündel über $\mathbb{C}P^n$,
$H := \{(L,\xi)\in\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}^{n+1} \mid \xi\in L\}$ das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$, $k\in\mathbb{Z}$

und $\rho_k : S^1 \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ die S^1-Darstellung, die durch $\rho_k(z)w := z^k \cdot w$ gegeben ist. Beweisen Sie:

1. $(H, pr_1, \mathbb{C}P^n; \mathbb{C})$ ist ein komplexes Vektorbündel vom Rang 1 über $\mathbb{C}P^n$.

2. Das aus H entstehende Tensorbündel

$$H^k := \underbrace{H \otimes .... \otimes H}_{k-\text{mal}} \quad \text{falls } k > 0 \qquad \text{bzw.} \qquad H^k := \underbrace{H^* \otimes .... \otimes H^*}_{|k|-\text{mal}} \quad \text{falls } k < 0$$

   ist assoziiert zum Hopfbündel und der Darstellung ρ_k, d.h.

$$H^k = S^{2n+1} \times_{[\rho_k, S^1]} \mathbb{C}.$$

Aufgabe 5. Es sei $M = G/H$ ein homogener Raum, $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G und $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H. M heißt *reduktiv*, falls es ein algebraisches Komplement $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ gibt, das H-invariant unter der Adjungierten Darstellung Ad von G auf $\mathfrak{g}$ ist, d.h.:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \quad \text{und} \quad Ad(H)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}.$$

Sei nun $M = G/H$ ein reduktiver homogener Raum. Dann erhält man mittels der Adjungierten Darstellung Ad eine H-Wirkung auf $\mathfrak{m}$ und auf $GL(\mathfrak{m})$.
Beweisen Sie, daß das Tangentialbündel und das Reperbündel von M auf folgende Weise als assoziierte Faserbündel aus dem homogenen Hauptfaserbündel $(G, \pi, G/H; H)$ entstehen:

$$TM = G \times_{[Ad,H]} \mathfrak{m} \qquad \text{bzw.} \qquad GL(M) = G \times_{[\widehat{Ad},H]} GL(\mathfrak{m})\,.$$

Aufgabe 6. Sei M^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, G eine Liesche Gruppe und $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G auf V. Unter einer *G-Struktur auf M* verstehen wir ein Paar (P, θ), bestehend aus einem G-Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ über M und einer 1-Form $\theta \in \Omega^1(P, V)$ auf P mit Werten in V, die folgende Eigenschaften hat:

1. $R_g^*\theta = \rho(g^{-1}) \circ \theta$ für alle $g \in G$.

2. $\operatorname{Ker}\theta_u = Tv_uP$ für alle $u \in P$.

Beweisen Sie, dass die Menge der G-Strukturen in bijektiver Beziehung zur Menge der Reduktionen der Reperbündels $GL(M)$ von M bzgl. $\rho : G \to GL(V)$ steht.

Kapitel 3

Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln

In diesem Kapitel werden die notwendigen Begriffe für die Differentialrechnung auf Hauptfaserbündeln und ihren assoziierten Vektorbündeln eingeführt.

3.1 Zusammenhänge, Definition und Beispiele

Im folgenden bezeichne $(P, \pi, M; G)$ ein glattes G-Hauptfaserbündel über der Mannigfaltigkeit M. Die Lie-Algebra von G wird wie bisher mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet. P_x sei die Faser über dem Punkt $x \in M$ und $u \in P$ ein Punkt in dieser Faser. Da $\pi : P \to M$ eine Submersion ist, ist die Faser P_x eine glatte Untermannigfaltigkeit von P. Wir bezeichnen den Tangentialraum an die Faser P_x im Punkt u mit

$$Tv_uP := T_u(P_x) \subset T_uP$$

und nennen ihn den *vertikalen Tangentialraum* von P im Punkt u.

Lemma 3.1 *Für den vertikalen Tangentialraum gilt:*

1. $Tv_u(P) = \operatorname{Ker} d\pi_u$
2. *Die Abbildung*

$$X \in \mathfrak{g} \longmapsto \tilde{X}(u) := \frac{d}{dt}(u \cdot \exp(tX))|_{t=0} \in Tv_uP,$$

die jedem Element der Lie-Algebra von G das von ihm erzeugte fundamentale Vektorfeld auf P zuordnet, ist ein linearer Isomorphismus. Es ist also $Tv_u(P) = \{\tilde{X}(u) \mid X \in \mathfrak{g}\}$

Beweis:
Sei $\Phi : P_U \longrightarrow U \times G$ eine lokale Trivialisierung von P um den Punkt $x \in M$. Es sei $u \in P_U$ und $\Phi(u) = (x, g)$. Wegen $\pi = pr_1 \circ \Phi$, liegt ein Vektor $X \in T_uP$ genau dann im Kern von $d\pi_u$, wenn $d\Phi_u(X) = (0, Y)$ für einen Vektor $Y \in T_gG$ gilt, also

genau dann, wenn es eine Kurve der Form $\delta(t) = (x, g(t))$ in $U \times G$ gibt, so dass $d\Phi_u(X) = \dot{\delta}(0)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass X die Ableitung der in der Faser P_x liegenden Kurve $\Phi^{-1}(\delta(t))$ in $t = 0$, also ein vertikaler Tangentialvektor ist. Um die 2. Behauptung einzusehen, bemerken wir zunächst, dass die Abbildung

$$X \in \mathfrak{g} \longmapsto \tilde{X}(u) \in Tv_u(P)$$

linear ist. Da die Dimension von $\mathfrak{g}$ mit der der Fasern des Hauptfaserbündels übereinstimmt, genügt es zu zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist. Sei also $\tilde{X}(u) = 0$, das heißt u eine Nullstelle von $\tilde{X}$. Dann ist Integralkurve von $\tilde{X}$ durch u konstant, d.h. es gilt $u = u \cdot \exp tX$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da die Exponential-Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus und die G-Wirkung auf P frei ist, folgt $X = 0$. □

Einen zum vertikalen Tangentialraum $Tv_uP \subset T_uP$ komplementären Vektorraum nennt man *horizontalen Tangentialraum* von P im Punkt $u \in P$. Unter einem Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ versteht man eine mit der G-Wirkung und der glatten Struktur verträgliche Auswahl von horizontalen Tangentialräumen von P. Solche Zuammenhänge sind die grundlegenden Objekte der Differentialrechnung auf Hauptfaserbündeln.

Definition: Ein *Zusammenhang* auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist eine Zuordnung

$$Th : u \in P \longmapsto Th_uP \subset T_uP\,,$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

1. *Komplementarität:* $T_uP = Tv_uP \oplus Th_uP \quad \forall u \in P$
2. *Rechtsinvarianz:* $dR_a(Th_uP) = Th_{u\cdot a}P \quad \forall\, a \in G, u \in P.$
3. *Glattheit:* Zu jedem Punkt $u \in P$ gibt es eine Umgebung $W \subset P$ und glatte lokale Vektorfelder $X_1, X_2, \ldots, X_r$ auf W, so dass

$$Th_wP = span(X_1(w), X_2(w), \ldots, X_r(w)) \quad \forall\, w \in W.$$

Vektoren aus den vertikalen Tangentialräumen von P nennen wir *vertikal*, solche aus den horizontalen Tangentialräumen *horizontal*. Die Projektion pr_v von TP auf die vertikalen Tangentialräume ist glatt. Die Zuordnung Th ist genau dann glatt, wenn die Projektion pr_h von TP auf die horizontalen Tangentialräume ebenfalls glatt ist. Entsprechend Lemma 3.1 ist das Differential der Projektion π

$$d\pi_u : Th_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$$

ein linearer Isomorphismus von den horizontalen Tangentialräumen auf den entsprechenden Tangentialraum von M.

Im folgenden besprechen wir weitere Möglichkeiten, Zusammenhänge zu charakterisieren. Die erste ist die Charakterisierung durch gewisse 1-Formen auf P mit Werten in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Definition: Eine *Zusammenhangsform* auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist eine 1-Form $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $A(\tilde{X}) = X \quad \forall\, X \in \mathfrak{g}$
2. $R_g^* A = Ad(g^{-1}) \circ A \quad \forall\, g \in G.$

Die Menge der Zusammenhangsformen auf P bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(P)$.

Satz 3.1 *Die Zusammenhänge und die Zusammenhangsformen auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ stehen in bijektiver Beziehung zueinander:*

1. *Sei $Th : u \in P \longmapsto Th_u P$ ein Zusammenhang auf P. Dann ist durch*
$$A_u(\tilde{X}(u)) \oplus Y_h) := X \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g}, u \in P, Y_h \in Th_u P$$
eine Zusammenhangsform auf P definiert.
2. *Ist $A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf P, so ist*
$$Th : u \in P \longmapsto Th_u := \mathrm{Ker}\, A_u$$
ein Zusammenhang auf P.

Beweis:
Zu 1.) Nach Definition von A gilt für alle fundamentalen Vektorfelder $\tilde{X}$ die Bedingung $A(\tilde{X}) = X \in \mathfrak{g}$. Für fundamentale Vektorfeld gilt außerdem
$$dR_g(\tilde{X}(u)) = (\widetilde{Ad(g^{-1})}X)(ug).$$
Ist Y_h horizontal im Punkt u, so ist $dR_g(Y_h)$ horizontal im Punkt ug. Daraus erhält man
$$\begin{aligned}
(R_g^* A)_u(\tilde{X}(u) + Y_h) &= A_{ug}(dR_g(\tilde{X}(u)) + dR_g Y_h) \\
&= A_{ug}(\widetilde{Ad(g^{-1})}X(ug) + dR_g Y_h) \\
&= Ad(g^{-1})X \\
&= Ad(g^{-1}) \circ A_u(\tilde{X}(u) + Y_h)
\end{aligned}$$
Folglich gilt
$$R_g^* A = Ad(g^{-1}) \circ A.$$
Zu 2.) Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{Ker}\, A$ eine rechtsinvariante glatte Auswahl von horizontalen Räumen ist:

Komplementarität: Sei $Y \in Ker A_u \cap Tv_u P$. Dann ist Y der Wert eines fundamentalen Vektorfeldes, d.h. $Y = \tilde{X}(u)$ für ein $X \in \mathfrak{g}$. Daraus folgt $0 = A(Y) = X$ und somit $Y = 0$. $\operatorname{Ker} A_u$ ist also transversal zu $Tv_u P$. Da A_u nach Definition surjektiv ist, gilt

$$\dim \operatorname{Ker} A_u = \dim T_u P - \dim \mathfrak{g} = \dim T_u P - \dim Tv_u P.$$

Somit ist $T_u P = \operatorname{Ker} A_u \oplus Tv_u P$.

Rechtsinvarianz: Sei $Y \in T_u P$ ein Vektor mit $A_u(Y) = 0$. Dann erhält man

$$A_{ug}(dR_g Y) = (R_g^* A)_u(Y) = Ad(g^{-1})(A_u(Y)) = 0.$$

Glattheit: Wir fixieren eine Karte $(W, (x_1, \dots, x_m))$ um $u \in P$ und eine Basis $(a_1, \dots, a_r)$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $Y = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u) \in T_u P$ die Basisdarstellung von $Y \in T_u P$. Da die Zusammenhangsform A differenzierbar ist, gilt $A(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_j A_{ij} a_j$, wobei A_{ij} glatte Funktionen auf W sind. Ein Vektor Y liegt genau dann im Kern von A_u, wenn

$$\sum_i \xi_i A_{ij} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, r$$

gilt. Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems sind glatt auf einer Umgebung von u. Folglich wird $\operatorname{Ker} A$ lokal durch glatte Vektorfelder aufgespannt. □

Für eine weitere Charakterisierung von Zusammenhängen benutzt man lokale 1-Formen auf der Basis-Mannigfaltigkeit des Hauptfaserbündels.

Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf dem Hauptfaserbündel P und $s : U \subset M \longrightarrow P$ ein lokaler Schnitt in P. Die 1-Form

$$A^s := A \circ ds \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$$

heißt die durch s bestimmte *lokale Zusammenhangsform*. Wählt man verschiedene lokale Schnitte über der gleichen Umgebung U, so kann man den Unterschied der zugehörigen lokalen Zusammenhangsformen berechnen.

Seien $s_i : U_i \longrightarrow P$ und $s_j : U_j \longrightarrow P$ lokale Schnitte in P mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dann gibt es eine glatte Übergangsfunktion $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ zwischen diesen Schnitten

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ij}(x) \quad \text{für alle}\, x \in U_i \cap U_j.$$

Im folgenden bezeichnet $\theta_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ die kanonische 1-Form (Maurer-Cartan-Form) der Lieschen Gruppe G

$$\theta_G(Y_g) := dL_{g^{-1}}(Y_g), \quad Y_g \in T_g G$$

und $\theta_{ij} := g_{ij}^* \theta_G$ die auf $U_i \cap U_j$ zurückgezogenden kanonischen 1-Formen

$$\theta_{ij}(X) = dL_{g_{ij}^{-1}(x)}(dg_{ij}(X)), \quad X \in T_x(U_i \cap U_j).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 3.2 *Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln können auf die folgende Weise durch lokale Zusammenhangsformen charakterisiert werden:*

1. *Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangform im Hauptfaserbündel P und seien (s_i, U_i) und (s_j, U_j) lokale Schnitte in P mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dann gilt*
$$A^{s_i} = Ad(g_{ij}^{-1}) \circ A^{s_j} + \theta_{ij}.$$
2. *Ist umgekehrt eine Überdeckung des Bündels P durch lokale Schnitte $\{(s_i, U_i)\}_i$ und eine Familie von lokalen 1-Formen $\{A_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g}))\}_i$ gegeben, so dass für $U_i \cap U_j \neq \emptyset$*
$$A_i = Ad(g_{ij}^{-1}) \circ A_j + \theta_{ij} \qquad (*)$$
gilt, so existiert eine Zusammenhangsform A auf P, die $A^{s_i} = A_i$ erfüllt.

Bevor wir Satz 3.2 beweisen, notieren wir folgende Spezialfälle, die in der physikalischen Literatur oft benutzt werden:

1. Ist $G \subset GL(r, \mathbb{K})$ eine Matrizengruppe, so gilt wegen der Linearität der Wirkung $dL_g X = gX$ und $Ad(g)X = gXg^{-1}$ für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. In diesem Fall lautet die Transformationsformel (*) folglich
$$A_i = g_{ij}^{-1} \circ A_j \circ g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij}.$$
2. Ist das Hauptfaserbündel P trivial, dann ist ein Zusammenhang in P eindeutig durch eine 1-Form Z auf dem Basisraum M mit Werten in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gegeben, da man das Bündel P durch einen einzigen (globalen) Schnitt überdecken kann.

Im Beweis von Satz 3.2 benutzen wir die Produktregel für die Ableitung von Kurven in Transformationsgruppen, die wir hier nochmal ohne Beweis angeben (Übungsaufgabe 9, Kapitel 1)

Lemma 3.2 *Sei G eine Liesche Gruppe, die von rechts auf einer Mannigfaltigkeit N wirkt. Sei $x(t)$ eine Kurve in N durch den Punkt x_0 und $g(t)$ eine Kurve in G durch den Punkt g_0. Dann gilt für die Ableitung des Produktes der Kurven*
$$\frac{d}{dt}(x(t) \cdot g(t)|_{t=0} = dR_{g_0}(x'(0)) + (\widetilde{dL_{g_0^{-1}}(g'(0))})(x_0 \cdot g_0).$$

Beweis von Satz 3.2:
Zu 1.) Sei $x \in U_i \cap U_j, X \in T_x M$ und $\gamma(t)$ eine Kurve durch x mit dem Tangentialvektor X, d.h. $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Benutzt man die Produktregel aus Lemma 3.2 so ergibt sich
$$\begin{aligned} ds_i(X) &= \frac{d}{dt}(s_i(\gamma(t)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(s_j(\gamma(t)) \cdot g_{ij}(\gamma(t)))|_{t=0} \\ &= dR_{g_{ij}(x)}(ds_j(X)) + \widetilde{\theta_{ij}(X)}(s_j(x)) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^{s_i}(X) &= A(ds_i(X)) \\ &= A(dR_{g_{ij}(x)}ds_j(X)) + \theta_{ij}(X) \\ &= Ad(g_{ij}(x)^{-1})A^{s_j}(X) + \theta_{ij}(X). \end{aligned}$$

Zu 2.) Seien $s_i : U_i \longrightarrow P$ lokale Schnitte und $A_i : TU_i \longrightarrow \mathfrak{g}$ lokale 1-Formen mit dem Transformationsverhalten (*). Wir zeigen zuerst, dass A_i eine Zusammenhangsform auf dem trivialen Teilbündel P_{U_i} definiert und setzen diese Zusammenhangsformen dann zu einer Zusammenhangsform auf P zusammen:
Sei $x \in U_i$ und $u := s_i(x) \in P$ das Bild von x in P. Dann gilt

$$T_uP = Tv_uP \oplus ds_i(T_xU_i).$$

Wir definieren die 1-Form $A_u : T_uP \longrightarrow \mathfrak{g}$ in u durch

$$A_u(\tilde{Y}(u) \oplus ds_i(X)) := A_i(X) + Y, \qquad Y \in \mathfrak{g}, X \in T_xU_i.$$

Im nach rechts verschobenen Punkt $ug \in P$ sei $A_{ug} : T_{ug}P \longrightarrow \mathfrak{g}$ definiert durch

$$A_{ug} := Ad(g^{-1}) \circ A_u(dR_{g^{-1}}(\cdot)).$$

Dann gilt für jedes $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} A_{ug}(\tilde{Y}(ug)) &= Ad(g^{-1})A_u(dR_{g^{-1}}(\tilde{Y}(ug)) \\ &= Ad(g^{-1})A_u(\widetilde{Ad(g)Y}(u)) \\ &= Ad(g^{-1})Ad(g)Y \\ &= Y. \end{aligned}$$

Für die rechtsverschobene 1-Form erhält man

$$\begin{aligned} (R_a^*A)_{ug}(V) &= A_{uga}(dR_a(V)) \\ &= Ad(a^{-1})Ad(g^{-1})A_u(dR_{a^{-1}g^{-1}}(dR_a(V))) \\ &= Ad(a^{-1})A_u(V) \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass A eine Zusammenhangsform auf dem Teilbündel P_{U_i} ist. Als nächstes zeigen wir, dass die mittels (A_i, s_i) und (A_j, s_j) definierten Zusammenhangsformen A und $\hat{A}$ auf dem Bündel $P_{U_i \cap U_j}$ übereinstimmen. Da die Zusammenhangsformen A und $\hat{A}$ nach Definition auf den vertikalen Tangentialräumen übereinstimmen und außerdem durch $A_{s_i(x)}$ und $\hat{A}_{s_j(x)}$ eindeutig bestimmt sind, genügt es zu zeigen, dass für den Punkt $u = s_i(x)$

$$\hat{A}_u(ds_i(X)) = A_u(ds_i(X)) = A_i(X)$$

gilt. Sei $s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ij}(x)$, $X \in T_uP$ und $\gamma(t)$ eine Kurve durch u mit dem Tangentialvektor X. Dann erhält man unter Benutzung der Produktregel aus Lemma 3.2

$$ds_i(X) = \frac{d}{dt}\Big(s_j(\gamma(t)) \cdot g_{ij}(\gamma(t))\Big)|_{t=0} = dR_{g_{ij}(x)}(ds_j(X)) + \widetilde{\theta_{ij}(X)}(s_j(x) \cdot g_{ij}(x))$$

Folglich gilt wegen der Transformationsformel (*)

$$\begin{aligned}
\hat{A}(ds_i(X)) &= \hat{A}\Big(dR_{g_{ij}(x)}(ds_j(X)) + \widetilde{\theta_{ij}(X)}(s_j(x)\cdot g_{ij}(x))\Big) \\
&= Ad(g_{ij}(x)^{-1})\hat{A}(ds_j(X)) + \theta_{ij}(X) \\
&= Ad(g_{ij}(x)^{-1})A_j(X) + \theta_{ij}(X) \\
&= A_i(X).
\end{aligned}$$

Die 1-Formen A und $\hat{A}$ stimmen also auf $P_{U_i\cap U_j}$ überein. Die Familie von 1-Formen A_i mit dem Transformationsverhalten (*) definiert folglich eine Zusammenhangsform auf P. □

Als nächstes betrachten wir einige spezielle Zusammenhänge.

Beispiel 1: Der kanonische flache Zusammenhang
Wir betrachten das triviale G-Hauptfaserbündel $(P := M \times G, pr_1, M; G)$ über der Mannigfaltigkeit M. Dann gilt für den vertikalen Tangentialraum

$$Tv_{(x,g)}P = T_{(x,g)}(\{x\}\times G) \simeq T_gG.$$

Die fundamentalen Vektorfelder auf P stimmen bei dieser Identifzierung mit den linksinvarianten Vektorfeldern auf G überein, da für $Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\tilde{Y}(x,g) = \frac{d}{dt}((x,g)\cdot \exp(tY))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x, g\cdot\exp(tY))|_{t=0} = 0 \oplus dL_g(Y).$$

Wir wählen als horizontale Tangentialräume des Bündels P die Tangentialräume an M

$$Th_{(x,g)}P := T_{(x,g)}(M\times\{g\}) \simeq T_xM.$$

Die zu diesem Zusammenhang gehörende Zusammenhangsform ist durch die kanonische 1-Form von G gegeben

$$\begin{aligned}
A:\ T_{(x,g)}(M\times G) \simeq\ T_xM \oplus T_gG &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
X + Y &\longmapsto dL_{g^{-1}}Y = \theta_G(Y)
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Zusammenhänge auf dem Reperbündel einer glatten Mannigfaltigkeit
Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann steht die Menge der kovarianten Ableitungen auf M in bijektiver Beziehung zur Menge der Zusammenhänge auf dem $GL(n)$-Hauptfaserbündel $GL(M)$ aller Repere von M:

1. Sei $A : T(GL(M)) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ eine Zusammenhangsform auf dem Reperbündel. Wir bezeichnen mit B_{ij} die $n\times n$-Matrix, in der in der i. Zeile

und j. Spalte eine 1 und an allen anderen Stellen 0 steht. Dann kann man A mittels der Basis $(B_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ in der Form

$$A = \sum_{ij} \omega_{ij} B_{ij}$$

darstellen, wobei $\omega_{ij} : T(GL(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle 1-Formen sind. Sei $s := (s_1, \dots, s_n) : U \longrightarrow GL(M)$ ein lokales Basisfeld auf M. Wir definieren die zu A gehörende kovariante Ableitung ∇ durch

$$\nabla_X s_k := \sum_i \omega_{ik}(ds(X)) s_i$$

und die nötige Produktregel.

2. Sei andererseits ∇ eine kovariante Ableitung auf M und $s := (s_1, \dots, s_n) : U \longrightarrow GL(M)$ ein lokaler Schnitt im Reperbündel. Dann gilt

$$\nabla s_i = \sum_{ji} \omega_{ij} \otimes s_j$$

für reelle 1-Formen $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$. Wir definieren lokale 1-Formen $A_s \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ durch

$$A_s := \sum_{ij} \omega_{ij} B_{ij}.$$

Die Familie $\{(A_s, s) \mid s \text{ lokaler Schnitt in } GL(M)\}$ dieser 1-Formen erfüllt die Transformationsregel (*) aus Satz 3.2, definiert also eine Zusammenhangsform auf dem Reperbündel.

Beispiel 3: Der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit

Wir betrachten eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g), wobei g eine Metrik der Signatur (k,l) mit $n = k+l$ ist. Auf (M,g) gibt es eine eindeutig bestimmte metrische und torsionsfreie kovariante Ableitung

$$\nabla^{LC} : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM),$$

den Levi-Civita-Zusammenhang von (M,g). Dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{LC} entspricht eine Zusammenhangsform A^{LC} im Hauptfaserbündel aller orthonormalen Repere $(O(M,g), \pi, M; O(k,l))$ der semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit:
Seien E_{ij} die $(n \times n)$-Matrizen

$$E_{ij} := \varepsilon_i B_{ji} - \varepsilon_j B_{ij}, \qquad \text{wobei } \varepsilon_i := \begin{cases} -1 & \text{falls } i = 1, \dots, k \\ 1 & \text{falls } i = k+1, \dots, k+l \end{cases}$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(k,l)$ der orthogonalen Gruppe $O(k,l)$ wird von den Matrizen E_{ij} erzeugt

$$\mathfrak{o}(k,l) = span\{E_{ij} \mid i < j\}.$$

Sei nun $s = (s_1, \ldots, s_n) : U \subset M \longrightarrow O(M, g)$ ein lokales Feld von orthonormalen Basisvektoren. Wir definieren eine lokale 1-Form $A_s \in \Omega^1(U, \mathfrak{o}(k, l))$ durch

$$A_s(X) := \sum_{i \leq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \ g(\nabla_X^{LC} s_i, s_j) \ E_{ij} \in \mathfrak{o}(k, l).$$

Die Familie $\{(A_s, s) \mid s \text{ lokaler Schnitt in } O(M, g)\}$ dieser 1-Formen erfüllt die Transformationsregel (*) aus Satz 3.2, definiert also eine Zusammenhangsform A^{LC} auf dem Bündel der orthonormalen Repere.
Analog zum Beispiel 2 zeigt man, dass die Menge der metrischen kovarianten Ableitungen auf dem Tangentialbündel TM in bijektiver Beziehung zur Menge der Zusammenhänge im Bündel der orthonormalen Repere $O(M, g)$ steht.

Beispiel 4: Ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel
Wir betrachten das Hopfbündel $(S^3, \pi, \mathbb{C}P^1, S^1)$ über dem $\mathbb{C}P^1$. Die Strukturgruppe dieses Bündels ist die Gruppe S^1, ihre Lie-Algebra identifizieren wir mit $i\mathbb{R}$. Die 1-Form $A \in \Omega^1(S^3, i\mathbb{R})$

$$A_{(w_1, w_2)} := \frac{1}{2}\{\overline{w}_1 dw_1 - w_1 d\overline{w}_1 + \overline{w}_2 dw_2 - w_2 d\overline{w}_2\}$$

ist eine Zusammenhangsform auf dem Hopfbündel.

Beispiel 5: Linksinvariante Zusammenhänge auf homogenen Räumen
Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe G. Bezeichne $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G und $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H. Der homogene Raum $M = G/H$ heißt *reduktiv*, falls es eine Vektorraum-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ gibt, so dass $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ gilt. Sei nun G/H ein reduktiver homogener Raum und $\xi = (G, \pi, G/H; H)$ das homogene H-Hauptfaserbündel über G/H. Dann ist

$$Th : g \in G \longrightarrow Th_g G := dL_g(\mathfrak{m}) \subset T_g G$$

ein Zusammenhang auf ξ, der wegen der Reduktivität von G/H zusätzlich linksinvariant ist, d.h. Th erfüllt auch

$$dL_a(Th_g G) = Th_{ag} G \qquad \text{für alle } a \in H, g \in G.$$

Die zugehörige Zusammenhangsform ist

$$A := pr_{\mathfrak{h}} \circ \theta_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{h}),$$

wobei θ_G die kanonische 1-Form der Lieschen Gruppe G bezeichnet.
Ist andererseits $M = G/H$ ein homogener Raum mit der Eigenschaft, dass auf dem zugehörigen homogenen Haupfaserbündel ein linksinvarianter Zusammenhang existiert, so ist $M = G/H$ reduktiv.

Nachdem wir einige Beispiele von Zusammenhängen auf speziellen Hauptfaserbündeln besprochen haben, zeigen wir nun, dass es auf *jedem* Hauptfaserbündel einen Zusammenhang gibt.

Satz 3.3 *Auf jedem Hauptfaserbündel existiert ein Zusammenhang.*

Beweis: Es sei $(P, \pi, M; G)$ ein beliebiges G-Hauptfaserbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Wir fixieren eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ von M, über der das Bündel P trivial ist, d.h. es gelte $P_{U_\alpha} \simeq U_\alpha \times G$. Weiterhin sei $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Zerlegung der 1 zu $\mathcal{U}$. Es bezeichne $A_\alpha \in \Omega^1(P_{U_\alpha}, \mathfrak{g})$ den kanonischen flachen Zusammenhang auf dem trivialen Teilbündel P_{U_α} (Beispiel 1). Wir definieren eine 1-Form $A \in \Omega(P, \mathfrak{g})$ durch

$$A := \sum_\alpha (f_\alpha \circ \pi) A_\alpha.$$

Ist $\tilde{X}$ das von $X \in \mathfrak{g}$ erzeugte fundamentale Vektorfeld auf P, so gilt

$$A(\tilde{X}(p)) = \sum_\alpha f_\alpha(\pi(p))\ A_\alpha(\tilde{X}(p)) = X.$$

Für die Rechtsverschiebung gilt

$$(R_g^* A)_p(Y) = A_{pg}(dR_g Y) = \sum_\alpha f_\alpha(\pi(p)) A_\alpha(dR_g(Y)) = Ad(g^{-1})\ A_p(Y).$$

A ist somit eine Zusammenhangsform auf P. □

3.2 Der affine Raum aller Zusammenhänge

Nachdem wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, dass es auf jedem Hauptfaserbündel einen Zusammenhang gibt, wollen wir nun sehen, wie groß die Menge aller Zusammenhänge eines Hauptfaserbündels ist. Es wird sich zeigen, dass diese Menge ein unendlich-dimensionaler affiner Raum ist. Um dies zu zeigen, führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Sei E ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Mit $\Omega^k(M, E) := \Gamma(\Lambda^k M \otimes E)$ bezeichnen wir den Raum aller k-Formen auf M mit Werten in E. Wir erinnern daran, dass eine k-Form $\omega \in \Omega^k(M, E)$ durch eine glatte Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \omega : x \in M & \longrightarrow & \omega_x : T_xM \times \ldots \times T_xM \mapsto E_x \\ & & \text{multilinear und schiefsymmetrisch} \end{array}$$

gegeben ist. Die Glattheit von ω bedeutet, dass für beliebige glatte lokale Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ auf einer offenen Teilmenge U von M der lokale Schnitt

$$s : x \in U \longrightarrow \omega_x(X_1(x), \ldots, X_k(x)) \in E_x \subset E_U$$

im Bündel E glatt ist. Die k-Form ω kann man auch als $C^\infty(M)$-multilineare und schiefsymmetrische Abbildung

$$\omega : \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \Gamma(E)$$

auffassen. Dabei ist für jedes $x \in M$

$$\omega(X_1, \ldots, X_n)(x) := \omega_x(X_1(x), \ldots, X_n(x)) \in E_x.$$

Ein Spezialfall sind die k-Formen auf M mit Werten in einem Vektorraum V, die wir auch als die Schnitte $\Omega^k(M, V) := \Gamma(\Lambda^k M \otimes \underline{V})$ für das triviale Bündel $\underline{V}$ über M mit der Faser V schreiben können.

Im folgenden sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über M, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine G-Darstellung und $E := P \times_{(G,\rho)} V$ das dazu assoziierte Vektorbündel. In Kapitel 2.3 haben wir gesehen, dass die glatten Schnitte in E mit den invarianten Funktionen von P nach V

$$C^\infty(P, V)^{(G,\rho)} := \{s : P \to V \mid s(pg) = \rho(g^{-1})s(p)\ ,\ s \text{ glatt}\}$$

zu identifizieren sind. Wir stellen als nächstes eine analoge Beziehung zwischen den k-Formen auf P mit Werten im Vektorraum V und den k-Formen auf M mit Werten im Vektorbündel E her.

Definition Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(P, V)$ auf P mit Werten in V heißt

1. *horizontal*, falls $\omega_p(X_1, \ldots, X_k) = 0$ gilt sobald einer der Vektoren $X_i \in T_pP$ vertikal ist.
2. *vom Typ* ρ, falls $R_a^*\omega = \rho(a^{-1}) \circ \omega$ für alle $a \in G$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge der horizontalen k-Formen vom Typ ρ mit $\Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$.

Als Beispiel betrachten wir die Menge der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ von P. Sind A_1 und A_2 zwei Zusammenhänge auf P, so ist die Differenz $A_1 - A_2$ offensichtlich eine horizontale 1-Form von Typ Ad. Ist andererseits A ein Zusammenhang auf P und ω eine horizontale 1-Form von Typ Ad auf P mit Werten in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G, so ist $\tilde{A} := A + \omega$ ebenfalls ein Zusammenhang auf P. Die Menge aller Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ ist folglich ein affiner Raum mit dem Vektorraum $\Omega^1_{hor}(P, \mathfrak{g})^{(G,Ad)}$.

Satz 3.4 *Der Vektorraum $\Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$ der horizontalen k-Formen auf P vom Typ ρ ist isomorph zum Vektorraum $\Omega^k(M, E)$ der k-Formen auf M mit Werten in E.*

Beweis: Sei $p \in P_x$ ein Element in der Faser von P über dem Punkt $x \in M$. Mit $[p] : V \longrightarrow E_x$ bezeichnen wir den Faserisomorphismus von E

$$[p] : v \in V \longrightarrow [p, v] \in E_x.$$

Wir definieren eine lineare Abbildung $\Phi : \Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)} \longrightarrow \Omega^k(M, E)$ auf folgende Weise:

Für $\overline{\omega} \in \Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$ sei die k-Form $\omega = \Phi(\overline{\omega}) \in \Omega^k(M,E)$ durch die Familie der folgenden k-Formen $\omega_x \in \Lambda^k(T_x^*M) \otimes E_x$ gegeben

$$\omega_x(t_1,\ldots,t_k) := [p, \overline{\omega}_p(X_1,\ldots,X_k)],$$

wobei $\pi(p) = x,\ t_1,\ldots,t_k \in T_xM$ und $X_1,\ldots,X_k \in TpP$ mit $d\pi_p(X_j) = t_j$.
Da $\overline{\omega}$ horizontal ist, hängt ω nicht von der Wahl der Vektoren X_j ab. Sind nämlich $\tilde{X}_j$ weitere Vektoren mit $d\pi(\tilde{X}_j) = t_j$, so gilt $d\pi(\tilde{X}_j - X_j) = 0$, folglich ist $\tilde{X}_j - X_j$ vertikal. Damit folgt $\overline{\omega}(\ldots,\tilde{X}_j - X_j,\ldots) = 0$.
Die ρ-Invarianz von $\overline{\omega}$ liefert die Unabhängigkeit von der Auswahl von $p \in P_x$. Sei $\tilde{p} = pg$ und $Y_1,\ldots,Y_k \in T_{\tilde{p}}P$ Vektoren, die sich auf $t_1,\ldots,t_k \in T_xM$ projezieren. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\tilde{p}, \overline{\omega}_{\tilde{p}}(Y_1,\ldots,Y_k)] &= [pg, \overline{\omega}_{pg}(Y_1,\ldots,Y_k)] \\
&= [p, \rho(g)\ \overline{\omega}_{pg}(Y_1,\ldots,Y_k)] \\
&= [p, (R^*_{g^{-1}}\overline{\omega})_{pg}(Y_1,\ldots,Y_k)] \\
&= [p, \overline{\omega}_p(dR_{g^{-1}}Y_1,\ldots,dR_{g^{-1}}Y_k)] \\
&= [p, \overline{\omega}_p(X_1,\ldots,X_k)].
\end{aligned}$$

Sei $s : U \subset M \longrightarrow P$ ein lokaler Schnitt in P und $T_1,\ldots,T_k$ lokale Vektorfelder auf U. Dann ist

$$\omega(T_1,\ldots,T_k)|_U = [s, \overline{\omega}_{s(\cdot)}(ds(T_1),\ldots,ds(T_k))].$$

Dies zeigt die Glattheit von ω.
Die Abbildung Φ ist bijektiv. Ist $\omega \in \Omega^k(M,E)$, so ist das Urbild $\overline{\omega} = \Phi^{-1}(\omega) \in \Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$ gegeben durch

$$\overline{\omega}_p(X_1,\ldots,X_k) := [p]^{-1}\omega_{\pi(p)}(d\pi(X_1),\ldots,d\pi(X_k)) \in V.$$

□

Folgerung 3.1 *Die Menge der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ eines G-Hauptfaserbündels P über M ist ein affiner Raum mit dem Vektorraum $\Omega^1(M, Ad(P))$, wobei $Ad(P)$ das adjungierte Bündel $Ad(P) := P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ bezeichnet.*

3.3 Parallelverschiebung in Hauptfaserbündeln

Mit Hilfe eines Zusammenhangs läßt sich eine Parallelverschiebung im Bündel P und in den assoziierten Faserbündeln erklären. Dies soll in diesem Abschnitt erläutert werden.
Im folgenden ist $(P,\pi,M;G)$ ein G-Hauptfaserbündel mit fixiertem Zusammenhang Th und der dazugehörigen Zusammenhangsform A.

Definition: Sei X ein Vektorfeld auf M. Ein Vektorfeld X^* auf P heißt *horizontaler Lift von X*, falls

1. $X^*(p) \in Th_p(P)$ und
2. $d\pi_p(X^*(p)) = X(\pi(p))$ für alle $p \in P$

gilt.

Satz 3.5 *1. Für jedes Vektorfeld X auf M gibt es einen eindeutig bestimmten horizontalen Lift X^* auf P. X^* ist rechtsinvariant.*

2. Ist andererseits Y ein horizontales und rechtsinvariantes Vektorfeld auf P, so existiert genau ein Vektorfeld X auf M mit $X^* = Y$.

3. Sind X und Y Vektorfelder und f eine glatte Funktion auf M. Dann gilt

$$\begin{aligned} X^* + Y^* &= (X+Y)^* \\ (fX)^* &= (f \circ \pi)\ X^* \\ [X,Y]^* &= pr_h[X^*, Y^*] \end{aligned}$$

4. Sei Y ein horizontales und $\tilde{X}$ ein fundamantales Vektorfeld auf P und V ein Vektorfeld auf M. Dann ist der Kommutator $[\tilde{X}, Y]$ ebenfalls horizontal und es gilt $[\tilde{X}, V^*] = 0$.

Beweis: Da die Abbildung $d\pi_p : Th_pP \longrightarrow T_{\pi(p)}M$ ein linearer Isomorphismus ist, ist die einzig mögliche Wahl eines horizontalen Liftes durch

$$X^*(p) := \Big(d\pi|_{Th}\Big)^{-1}(X(\pi(p)))$$

gegeben. Wir zeigen, dass das dadurch definierte Vektorfeld X^* glatt und rechtsinvariant ist. Um die Glattheit einzusehen, betrachten wir eine lokale Trivialisierung $\Phi : P_U \simeq U \times G$ um den Punkt $\pi(p)$. Sei Y das glatte Vektorfeld $Y := d\Phi^{-1}(X \oplus 0)$ auf P_U. Dann gilt $d\pi(Y) = X$ und folglich $X^* = pr_hY$. Da Y und pr_h glatt sind, ist X^* glatt. Aus der Rechtsinvarianz des Zusammenhanges Th erhält man $dR_g(X^*(p)) \in Th_{pg}P$. Folglich gilt $d\pi(dR_gX^*(p)) = d\pi(X^*(p)) = X(\pi(p))$. Die Eindeutigkeit des horizontalen Liftes liefert dann $dR_g(X^*(p)) = X^*(pg)$. Somit ist X^* rechtsinvariant.
Für ein horizontales und rechtsinvariantes Vektorfeld Y auf P definieren wir ein Vektorfeld X auf M durch

$$X(x) = d\pi_p(Y(p)) \qquad \text{für ein } p \in P_x.$$

X ist wegen der Rechtsinvarianz von Y korrekt (d.h. unabhängig von der Wahl von $p \in P_x$) definiert und erfüllt $X^* = Y$.
Die ersten beiden Rechenregeln für den horizontalen Lift aus der 3. Behauptung folgen unmittelbar. Die Aussage über den horizontalen Lift des Kommutators erhält man, da $d\pi$ mit dem Kommutator vertauscht

$$d\pi(pr_h[X^*, Y^*]) \ = \ d\pi([X^*, Y^*]) = [d\pi(X^*), d\pi(Y^*)] = [X, Y] = d\pi([X, Y]^*)$$

und der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts.
Um die 4. Behauptung einzusehen, benutzen wir die Darstellung des Kommutators von Vektorfeldern als Lie-Ableitung. Sei Y ein horizontales Vektorfeld auf P, $X \in \mathfrak{g}$ und $\tilde{X}$ das davon erzeugte fundamentale Vektorfeld auf P. Der Fluss von $\tilde{X}$ ist durch die Schar von Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} \varphi_t : P &\longrightarrow P \\ p &\longmapsto p \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(p) \end{aligned}$$

gegeben. Für den Kommutator gilt dann

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, Y](p) = (L_{\tilde{X}} Y)(p) &= \frac{d}{dt}\Big(d\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p)))\Big)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(dR_{\exp(-tX)}(Y(p \cdot \exp(tX)))\Big)\Big|_{t=0} \qquad (*) \end{aligned}$$

Da Y horizontal und der Zusammenhang rechtsinvariant ist, ist die Kurve, die in der Zeile (*) abgeleitet wird, eine Kurve im horizontalen Tangentialraum Th_pP. Folglich ist $[\tilde{X}, Y]$ ein horizontales Vektorfeld. Ist speziell $Y = V^*$ für ein Vektorfeld V auf M, so ist Y zusätzlich rechtsinvariant und die in (*) abgeleitete Kurve ist konstant $Y(p)$. Folglich ist $[\tilde{X}, V^*] = 0$. □

Wir betrachten nun horizontale Lifte von Wegen im Basisraum M des Bündels P, wobei wir unter Wegen hier immer stückweis glatte Kurven verstehen.

Definition: Ein Weg $\gamma^* : I \longrightarrow P$ heißt *horizontaler Lift des Weges* $\gamma : I \longrightarrow M$, falls

1. $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$ für alle $t \in I$ und
2. die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}^*(t)$ sind horizontal für alle $t \in I$.

Satz 3.6 *Sei $\gamma : I \longrightarrow M$ ein Weg in M, $t_0 \in I$ und $u \in P_{\gamma(t_0)}$ ein Punkt in der Faser über $\gamma(t_0)$. Dann gibt es genau einen horizontalen Lift γ_u^* von γ mit $\gamma_u^*(t_0) = u$.*

Zum Beweis von Satz 3.6 benutzen wir eine Aussage aus der Theorie der Lieschen Gruppen (siehe z.B. Kobayashi/Nomizu Band I, Kapitel 2.3).

Lemma 3.3 *Es sei G eine Liesche Gruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Für jede stückweis glatte Kurve $Y : [0,1] \longrightarrow \mathfrak{g}$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ existiert eine eindeutig bestimmte stückweis glatte Kurve $g : [0,1] \longrightarrow G$ in der Lieschen Gruppe G mit $dR_{g(t)}^{-1}\dot{g}(t) = Y(t)$ und $g(0) = e$.*

Beweis von Satz 3.6: Sei oBdA $I = [0,1]$ und $t_0 = 0$. Da P lokal trivial ist, existiert ein Weg $\delta : I \longrightarrow P$ mit $\delta(0) = u$ und $\pi \circ \delta = \gamma$. Wir müssen diesen Weg δ zu einem horizontalen Weg abändern. Wir suchen also einen Weg $g : I \longrightarrow G$, für den der Weg $\gamma_u^*(t) := \delta(t) \cdot g(t)$ horizontal wird. Der Tangentialvektor $\dot{\gamma}_u^*(t)$ ist genau dann horizontal, wenn $A(\dot{\gamma}_u^*(t)) = 0$ gilt. Benutzen wir die Produktregel aus Lemma 3.2 so erhalten wir, dass dies äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} 0 &= A\Big(dR_{g(t)}\dot{\delta}(t) + (dL_{\widetilde{g(t)^{-1}}}\dot{g}(t))(\gamma_u^*(t))\Big) \\ &= Ad(g(t)^{-1})A(\dot{\delta}(t)) + dL_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t) \\ &= dR_{g(t)}A(\dot{\delta}(t)) + \dot{g}(t). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die stückweis glatte Kurve $Y := -A(\dot{\delta}(\cdot)) : I \longrightarrow \mathfrak{g}$. Nach Lemma 3.3 existiert genau ein Weg $g : I \longrightarrow G$ mit $g(0) = e$ und $\dot{g}(t) = -dR_{g(t)}A(\dot{\delta}(t))$. Damit haben wir den Weg $g(t)$ gefunden, der aus δ den horizontalen Weg γ_u^* macht. □

Definition: Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ ein Weg in M. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^A : P_{\gamma(a)} &\longrightarrow P_{\gamma(b)} \\ u &\longmapsto \gamma_u^*(b) \end{aligned}$$

heißt *Parallelverschiebung* in P entlang γ bezüglich des Zusammenhanges A.

Aus Standardfakten der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man

Satz 3.7 *1. Die Parallelverschiebung entlang γ hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve γ ab.*

2. Seien γ und μ Wege in M, die x mit y bzw. y mit z verbinden und bezeichne $\mu * \gamma$ den hintereinander ausgeführten Weg von x nach z. Dann gilt

$$\mathcal{P}_{\mu*\gamma}^A = \mathcal{P}_\mu^A \circ \mathcal{P}_\gamma^A.$$

3. Die Parallelverschiebung ist G-äquivariant, d.h. es gilt

$$\mathcal{P}_\gamma^A \circ R_g = R_g \circ \mathcal{P}_\gamma^A \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Die Parallelverschiebung hängt im allgemeinen vom Weg ab.

Beispiel 1: Betrachten wir als einfachstes Beispiel die 2-fache Überlagerung der Sphäre $\pi : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \in S^1 \mapsto z^2 \in S^1$. Da die Faser $\mathbb{Z}_2$ diskret ist, stimmt jeder horizontale Tangentialraum Th_zS^1 mit T_zS^1 überein. Betrachtet man nun 2 Punkte x, y in S^1 und die beiden verschiedenen verbindenden Kurvenstücke γ_1 und γ_2 zwischen ihnen, so erhält man bei Parallelverschiebung eines Punktes u in der Faser über x entlang γ_1 bzw. γ_2 die beiden verschiedenen Punkte der Faser über y.

Beispiel 2: Sei $(P_0 = M \times G, pr_1, M; G)$ das triviale G-Hauptfaserbündel über M mit dem kanonischen flachen Zusaammenhang $Th_{(x,g)}P = T_xM$ und der zugehörigen Zusammenhangsform A_0 . Der horizontale Lift eines beliebigen in $x \in M$ startenden

Weges γ mit dem Anfangspunkt (x,g) ist durch $\gamma^*(t) = (\gamma(t), g)$ gegeben. Folglich ist die Parallelverschiebung von x nach y

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^{A_0} :\ \{x\} \times G &\longrightarrow \{y\} \times G \\ (x,g) &\longmapsto (y,g) \end{aligned}$$

unabhängig vom Weg γ.

Der folgende Satz zeigt, dass dies die einzig mögliche Situation ist, in der die Parallelverschiebung nicht vom Weg abhängt.

Satz 3.8 *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M, A eine Zusammenhangsform auf P und hänge die Parallelverschiebung in P bzgl. A nicht vom Weg ab. Dann ist (P, A) isomorph zum trivialen G-Hauptfaserbündel P_0 mit dem kanonischem flachen Zusammenhang A_0, d.h. es existiert ein Hauptfaserbündel-Isomorphismus $\Phi : P \longrightarrow P_0$, für den $\Phi^* A_0 = A$ bzw. $d\Phi(ThP) = Th_{\Phi(\cdot)} P_0$ gilt.*

Beweis: Das Hauptfaserbündel P ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt in P gibt (siehe Satz 2.5). Wir nennen einen Schnitt $s : M \longrightarrow P$ horizontal bzgl. eines in P fixierten Zusammenhanges, falls $ds_x(T_xM) = Th_{s(x)}P$ für jeden Punkt $x \in M$ gilt.

1. Wir zeigen, dass (P, A) genau dann zu (P_0, A_0) isomorph ist, wenn ein globaler A-horizontaler Schnitt in P existiert. Sei zunächst $\Phi : P_0 = M \times G \longrightarrow P$ eine Trivialisierung des Hauptfaserbündels P mit $d\phi(T_{(x,g)}(M \times \{g\})) = Th_{\Phi(x,g)}P$. Wir betrachten den durch die Trivialisierung gegebenen globalen Schnitt

$$\begin{aligned} s :\ M &\longrightarrow P \\ x &\longmapsto s(x) := \Phi(x, e). \end{aligned}$$

   Dieser Schnitt ist horizontal, da

$$ds(T_xM) = d\Phi_{(x,e)}(T_{(x,e)}(M \times \{e\}) = Th_{s(x)}P.$$

   Sei andererseits $s : M \longrightarrow P$ ein globaler A-horizontaler Schnitt in P. Wir betrachten die durch s definierte Trivialisierung Φ von P

$$\begin{aligned} \Phi :\ P_0 = M \times G &\longrightarrow P \\ (x,g) &\longmapsto s(x) \cdot g = R_g(s(x)) \end{aligned}$$

   Dann gilt

$$d\Phi_{(x,g)}(T_{(x,g)}(M \times \{g\})) = dR_g ds(T_xM) = dR_g Th_{s(x)}P = Th_{s(x)\cdot g}P.$$

2. Es bleibt nun zu zeigen, dass es einen globalen A-horizontalen Schnitt in P gibt, wenn die Parallelverschiebung nicht von Weg abhängt. Dazu fixieren wir

eine Punkt $x_0 \in M$ und ein Element $u \in P_{x_0}$ in der Faser über x_0. Wir definieren den gesuchten globalen Schnitt durch

$$s(x) := \mathcal{P}_\gamma^A(u) = \gamma_u^*(1),$$

wobei $\gamma : [0,1] \to M$ ein beliebiger Weg von x_0 nach x ist. Eine Überprüfung in lokalen Trivialisierungen zeigt, dass s glatt ist. s ist horizontal, da

$$ds(X) = \frac{d}{dt}(s(\delta(t))) = \frac{d}{dt}(\delta_u^*(t)) \subset Th_{s(x)}P$$

gilt, wobei δ eine Kurve in M durch x mit dem Tangentialvektor $X \in T_xM$ ist.

□

Die Parallelverschiebung im Hauptfaserbündel P induziert eine Parallelverschiebung in den zu P assoziierten Faserbündeln. Sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über M mit fixierter Zusammenhangsform A, $[F, G]$ eine Transformationsgruppe und $E := P \times_G F$ das dazu assoziierte Faserbündel. Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ ein Weg in M. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_\gamma^{E,A} : & E_{\gamma(a)} & \longrightarrow & E_{\gamma(b)} \\ & [p, v] & \longmapsto & [\mathcal{P}_\gamma^A(p), v]. \end{array}$$

ist korrekt definiert, da $\mathcal{P}_\gamma^A$ mit der G-Wirkung kommutiert. $\mathcal{P}_\gamma^{E,A}$ heißt die von A induzierte *Parallelverschiebung im Bündel E*. Für jeden horizontalen Lift γ^* von γ gilt

$$\mathcal{P}_\gamma^{E,Z} = [\gamma^*(b)] \circ [\gamma^*(a)]^{-1}.$$

Ist E insbesondere ein Vektorbündel, so ist die Parallelverschiebung $\mathcal{P}_\gamma^{E,A}$ ein linearer Isomorphismus.

Beispiel: Sei (M^n, ∇) eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung. ∇ definiert ebenfalls eine Parallelverschiebung im Tangentialbündel TM

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_\gamma^\nabla : & T_{\gamma(a)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(b)}M \\ & v & \longmapsto & X_v(b), \end{array}$$

wobei X_v das durch $\frac{\nabla X_v}{dt} = 0$ und $X_v(a) = v$ definierte Vektorfeld entlang γ ist. Wir wissen, dass das Tangentialbündel zum Reperbündel assoziiert ist

$$TM = GL(M) \times_{Gl(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n.$$

Der kovarianten Ableitung ∇ entspricht eine Zusammenhangsform A^∇ in $GL(M)$. Die durch ∇ und A^∇ definierten Parallelverschiebungen stimmen überein:

$$\mathcal{P}_\gamma^\nabla = \mathcal{P}_\gamma^{A^\nabla}.$$

3.4 Das absolute Differential eines Zusammenhanges

In diesem Abschnitt sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel mit fixierter Zusammenhangsform A, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G und $E := P \times_G V$ das dazu assoziierte Vektorbündel über M. Analog zu den kovarianten Ableitungen auf M definiert man für beliebige Vektorbündel E

Definition: Eine lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(M, E)$$

heißt *kovariante Ableitung* in E, falls

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f \cdot \nabla e \qquad \text{für alle } \; f \in C^\infty(M), e \in \Gamma(E).$$

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie man mit Hilfe der gegebenen Zusammenhangsform A beliebige Differentialformen auf M mit Werten im Vektorbündel E ableiten kann. Insbesondere werden wir der Zusammenhangsform A auf kanonische Weise eine kovariante Ableitung ∇^A in E zuordnen. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Differentialformen auf M mit Werten in E den horizontalen Differentialformen vom Typ ρ auf P mit Werten in V entsprechen. Wir benötigen also ein Differential, das den horizontalen Formen von Typ ρ auf P wieder horizontale Formen vom Typ ρ zuordnet.

Das übliche Differential auf den k-Formen auf P mit Werten in V

$$\begin{aligned} d:\ \Omega^k(P,V) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(P,V) \\ \omega \quad &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

ist (für $k > 0$) gegeben durch

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_k) \;:=\; & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) + \\ & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

und erfüllt bekanntlich $d \circ d = 0$[1]. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Differential einer horizontalen k-Form nicht unbedingt horizontal sein muß. Wir betrachten dazu die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$, die Liesche Gruppe $G = \mathbb{R}$ und das triviale $\mathbb{R}$-Hauptfaserbündel $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ über M mit dem kanonischen flachen Zusammenhang. Für jede glatte Funktion $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ ist durch $\omega_{(t,s)} = f(t,s)dt$ eine horizontale 1-Form $\omega \in \Omega^1(P, \mathbb{R})$ definiert. Das Differential $d\omega = \frac{\partial f}{\partial s}\, ds \wedge dt$ ist dagegen nur dann horizontal, wenn ω geschlossen, d.h. $d\omega = 0$ ist.
Um diesen Nachteil zu beseitigen, ändern wir das Differential mit Hilfe des auf P gegebenen Zusammenhanges ab:

[1] Dabei bedeutet ein ˆ über einem Vektor, dass er beim Einsetzen weggelassen wird.

Definition Die lineare Abbildung $D_A : \ \Omega^k(P,V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(P,V)$

$$(D_A\omega)_p(t_0,\ldots,t_k) := d\omega(pr_h t_0,\ldots,pr_h t_k)$$

heißt das durch A definierte *absolute Differential* auf P.

Satz 3.9 *1.* $D_A : \ \Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)} \longrightarrow \Omega^{k+1}_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$

2. Für jede k-Form $\omega \in \Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$ *gilt*

$$D_A\omega \ = d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega,$$

wobei der 2. Summand durch

$$(\rho_*(A) \wedge \omega)(t_0,\ldots,t_k) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \ \rho_*(A(t_i))(\omega(t_0,\ldots,\hat{t}_i,\ldots,t_k))$$

definiert ist.

Beweis: Sei $\omega \in \Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$. Da für jeden vertikalen Vektor die Horizontalprojektion verschwindet, ist $D_A\omega$ horizontal. Wir müssen also nur die G-Invarianz überprüfen.

$$\begin{aligned}
(R_g^* D_A\omega)(t_0,\ldots,t_k) &= (D_A\omega)(dR_g t_0,\ldots,dR_g t_k) \\
&= d\omega(pr_h dR_g t_0,\ldots,pr_h dR_g t_k) \\
&= d\omega(dR_g pr_h t_0,\ldots,dR_g pr_h t_k) \\
&= (R_g^* d\omega)(pr_h t_0,\ldots,pr_h t_k) \\
&= d(R_g^*\omega)(pr_h t_0,\ldots,pr_h t_k) \\
&= d(\rho(g^{-1}) \circ \omega)(pr_h t_0,\ldots,pr_h t_k) \\
&= \rho(g^{-1}) \circ d\omega(pr_h t_0,\ldots,pr_h t_k) \\
&= \rho(g^{-1})((D_A\omega)(t_0,\ldots,t_k))
\end{aligned}$$

Die Form $D_A\omega$ ist also ebenfalls vom Typ ρ.
Da sich jeder Tangentialvektor $t_i \in T_pP$ in einen horizontalen und einen vertikalen Teil zerlegt, genügt es, die Formel in Behauptung 2. auf vertikalen bzw. horizontalen Vektoren t_i zu überprüfen.
Seien alle Vektoren t_i horizontal. Dann gilt die Behauptung wegen

$$(D_A\omega)(t_0,\ldots,t_k) = d\omega(t_0,\ldots,t_k) \quad \text{und} \quad A(t_i) = 0.$$

Seien nun mindestens zwei der Vektoren t_i vertikal und der Rest horizontal. Da ω und $D_A\omega$ horizontal sind, ist

$$(D_A\omega)(t_0,\ldots,t_k) = 0 \quad \text{und} \quad (\rho_*(A) \wedge \omega)(t_0,\ldots,t_k) = 0.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $d\omega(t_0,\dots,t_k)=0$ gilt. Einen vertikalen Vektor $t\in Tv_pP$ kann man durch ein fundamentales Vektorfeld fortsetzen , d.h es gilt $t=\tilde{X}(p)$ für ein $X\in\mathfrak{g}$. Der Kommutator von fundamentalen Vektorfeldern ist wegen $[\tilde{X},\tilde{Y}]=\widetilde{[X,Y]}$ wieder vertikal. Folglich wird in jeden Summanden bei der Berechnung von $d\omega$ ein vertikaler Vektor eingesetzt, sodass sich wegen der Horizontalität von ω Null ergibt. Als letztes überprüfen wir Behauptung 2., wenn genau einer der eingesetzten Vektoren vertikal und der Rest horizontal ist. Seien also t_0 vertikal und $t_1,\dots,t_k$ horizontal. Dann gibt es ein $X\in\mathfrak{g}$ mit $t_0=\tilde{X}(p)$ und Vektorfelder $V_1,\dots,V_k$ auf M mit $V_i^*(p)=t_i$. Wir erhalten in diesem Fall

$$\begin{aligned}(D_A\omega)(t_0,\dots,t_k) &= d\omega(pr_h t_0,t_1,\dots,t_k)=0\\ (\rho_*(A)\wedge\omega)(t_0,\dots,t_k) &= \rho_*(A(t_0))(\omega(t_1,\dots,t_k))=\rho_*(X)(\omega(t_1,\dots .t_k))\end{aligned}$$

und

$$(d\omega)(t_0,\dots,t_k)=\tilde{X}(\omega(V_1^*,\dots,V_k^*))(p)+\sum_{i=1}^k(-1)^i\omega([\tilde{X},V_i^*],V_1^*,\dots,\hat{V}_i^*,\dots,V_k^*)(p)$$

Nach Satz 3.5 gilt $[\tilde{X},V_i^*]=0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}d\omega(t_0,\dots,t_k) &= \tilde{X}(\omega(V_1^*,\dots,V_k^*))(p)\\ &= \frac{d}{dt}\Big(\omega(V_1^*(p\cdot\exp tX),\dots,V_k^*(p\cdot\exp tX))\Big)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Horizontale Lifte sind rechtsinvariant, somit ist

$$V_i^*(p\cdot\exp tX)=dR_{\exp tX}(V_i^*(p))=dR_{\exp tX}(t_i)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}d\omega(t_0,\dots,t_k) &= \frac{d}{dt}\Big(R^*_{\exp tX}\omega(t_1,\dots,t_k)\Big)\Big|_{t=0}\\ &= -\frac{d}{dt}\Big(\rho(\exp(-tX))\omega(t_1,\dots,t_k)\Big)\Big|_{t=0}\\ &= -\rho_*(X)(\omega(t_1,\dots,t_k)).\end{aligned}$$

□

Das absolute Differential D_A induziert eine entsprechende Abbildung d_A auf den k-Formen auf M mit Werten im Vektorbündel E

$$\begin{aligned}d_A:\ \Omega^k(M,E) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M,E)\\ \omega &\longmapsto d_A\omega\\ &\ \overline{d_A\omega}:=D_A\overline{\omega}\end{aligned}$$

wobei $\overline{\sigma}\in\Omega^k_{hor}(P,V)^{(G,\rho)}$ die $\sigma\in\Omega^k(M,E)$ entsprechende Differentialform ist. Die Identifizierung der Formenräume liefert

$$\begin{aligned}(d_A\omega)_x(t_0,\dots,t_k) &= [p,(D_A\overline{\omega})_p(t_0^*,\dots,t_k^*)]\\ &= [p,d\overline{\omega}_p(t_0^*.\dots,t_k^*)]\\ &= [s(x),(D_A\overline{\omega})_{s(x)}(ds(t_0),\dots,ds(t_k))],\end{aligned}$$

wobei $s : U \subset M \to P$ einen lokalen Schnitt um $x \in M$, p einen Punkt in der Faser P_x über x, t_i Vektoren in T_xM und $t_i^* \in T_pP$ ihre horizontalen Lifte bezeichnen.

Satz 3.10 *1. Das durch den Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(P)$ definierte absolute Differential*

$$d_A : \Omega^0(M,E) \longrightarrow \Omega^1(M,E)$$

ist eine kovariante Ableitung im assozierten Vektorbündel E.

2. Sei $e : U \subset M \longrightarrow E|_U$ ein lokaler Schnitt in E und sei e durch einen lokalen Schnitt $s : U \subset M \longrightarrow P|_U$ in P und eine glatte Funktion $v \in C^\infty(U,V)$ dargestellt, d.h.

$$e(x) = [s(x), v(x)] \quad \textit{für alle} \quad x \in U.$$

Dann gilt

$$(d_Ae)_x = [s(x), dv_x + \rho_*(A^s(\cdot))v(x)]$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Produktregel $d_A(fe) = df \otimes e + f d_A e$. Sei $X \in T_xM$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d_A(fe)_x(X) &= [p, d(\overline{fe})(X_p^*)] \\
&= [p, d(f \circ \pi)(X_p^*)\ \overline{e}(p) + (f(\pi(p)))\ d\overline{e}(X_p^*)] \\
&= [p, df_x(X)\ \overline{e}(p)] + f(x)\ [p, d\overline{e}(X_p^*)] \\
&= df(X) \cdot e(x) + f(x) \cdot (d_Ae)_x(X)
\end{aligned}$$

Sei nun e ein in der Form $e(x) = [s(x), v(x)]$ dargestellter lokaler Schnitt in E . Dann gilt $v(x) = \overline{e}(s(x))$ und wir erhalten mittels Satz 3.9

$$\begin{aligned}
(d_Ae)(X) &= [s(x), (D_A\overline{e})(ds(X))] \\
&= [s(x), d\overline{e}(ds(X)) + \rho_*(A(ds(X))\overline{e}(s(x))] \\
&= [s(x), d(\overline{e} \circ s)(X) + \rho_*(A^s(X))(\overline{e} \circ s)(x)] \\
&= [s(x), dv(X) + \rho_*(A^s(X))v(x)]
\end{aligned}$$

□

Wir nennen

$$\nabla^A := d_A|_{\Omega^0(M,E)} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

die *durch A induzierte kovariante Ableitung* auf E.

Abschließend beschreiben wir ∇^A noch durch die mittels A definierte Parallelverschiebung. Für eine Kurve γ in M mit dem Anfangspunkt $\gamma(0) = x$ sei

$$\mathcal{P}_{t,0}^{E,A} : E_{\gamma(t)} \longrightarrow E_{\gamma(0)}$$

die durch A in E definierte Parallelverschiebung entlang der inversen Kurve γ^-. Dann gilt

Satz 3.11 *Sei $s \in \Gamma(E)$ und $X \in T_xM$. Dann ist*

$$\Big(\nabla^A_X s\Big)(x) = \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{P}^{E,A}_{t,0}(s(\gamma(t)))\Big)|_{t=0},$$

wobei γ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = X$ ist.

Beweis: Sei γ^* der horizontale Lift von γ. Wir beschreiben die Parallelverschiebung durch die Verknüpfung der Faserisomorphismen

$$\mathcal{P}^{E,A}_{t,0} = [\gamma^*(0)] \circ [\gamma^*(t)]^{-1}.$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{P}^{E,A}_{t,0}(s(\gamma(t)))\Big)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big([\gamma^*(0)]([\gamma^*(t)]^{-1}(s(\gamma(t))\Big)|_{t=0} \\
&= [\gamma^*(0)] \cdot \frac{d}{dt}\Big([\gamma^*(t)]^{-1}(s(\gamma(t)))\Big)|_{t=0} \\
&= [\gamma^*(0)](d\overline{s}(\dot\gamma^*(0))) \\
&= [\gamma^*(0), d\overline{s}(\dot\gamma^*(0))] \\
&= [p, d\overline{s}(X^*_p)] \\
&= (d_A s)_x(X) \\
&= (\nabla^A_X s)(x)
\end{aligned}$$

□

3.5 Die Krümmung eines Zusammenhanges

In diesem Abschnitt definieren wir die Krümmungsform eines Zusammenhanges, die seine Abweichung vom kanonischen flachen Zusammenhang mißt. Im gesamten Abschnitt sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel mit fixiertem Zusammenhang Th und zugehöriger Zusammenhangsform A, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G und $E := P \times_G V$ das dazu assoziierte Vektorbündel über M.

Definition: Die 2-Form

$$F^A := D_A A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$$

heißt *Krümmungsform* von A.

Aus Satz 3.9 folgt unmittelbar, dass die Krümmungsform horizontal und vom Typ Ad ist. Für einen lokalen Schnitt $s : U \subset M \to P$ bezeichne

$$F^s := s^* F^A = F^A(ds(\cdot), ds(\cdot)) \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$$

die *lokale Krümmungsform bzgl. s*. Sei $\tau : U \to P$ ein weiterer lokaler Schnitt und $\tau = s \cdot g$ für eine glatte Funktion $g : U \to G$. Benutzen wir die Formel

$$d\tau(X) = dR_g(ds(X)) + dL_{g^{-1}}\widetilde{dg}(X),$$

und die Invarianz von F^A, so erhalten wir die folgende Transformationsformel für die lokalen Krümmungsformen

$$F^\tau = Ad(g^{-1}) \circ F^s.$$

Für eine lineare Gruppe $G \subset GL(m, \mathbb{K})$ gilt spezieller

$$F^\tau = g^{-1} \circ F^s \circ g.$$

Da die Krümmungsform horizontal und von Typ Ad ist, können wir sie als 2-Form $F^A \in \Omega^2(M, Ad(P))$ auf M mit Werten im adjungierten Bündel auffassen. Entsprechend Satz 3.4 ist diese 2-Form im Punkt $x \in M$ durch

$$F^A_x = [s(x), F^s_x]$$

zu beschreiben, wobei $s : U \to P$ ein lokaler Schnitt um x ist.

Wie für kovariante Ableitungen auf Mannigfaltigkeiten ordnet man jeder kovarianten Ableitung $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ auf dem Bündel E einen Krümmungsendomorphismus

$$R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes End(E, E))$$

zu, der durch

$$R^\nabla(X, Y)\varphi := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\varphi$$

für $\varphi \in \Gamma(E),\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$ definiert ist. Wir wissen aus dem vorigen Abschnitt, dass der Zusammenhangsform A auf P eine kovariante Ableitung ∇^A auf dem Vektorbündel E entspricht. Wir überlassen dem Leser den Beweis des folgenden Satzes als Übungsaufgabe, der die Beziehung zwischen den Krümmungsformen von A und von ∇^A herstellt.

Satz 3.12 *Sei $p \in P_x$ ein Punkt in der Faser von P über x und $[p] : v \in V \to [p, v] \in E_x = P_x \times_G V$ der dadurch definierte Faserisomorphismus. Dann gilt für die Krümmungen*

$$R^{\nabla^A}_x(X, Y) = [p] \circ \rho_*(F^A_p(X^*, Y^*)) \circ [p]^{-1},$$

wobei $X, Y \in T_xM$ und $X^*, Y^* \in T_pP$ ihre horizontalen Lifte sind.

Um weitere Eigenschaften der Krümmungsform formulieren zu können, definieren wir den Kommutator von Lie-Algebra-wertigen Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit N mit Werten in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Wir fixieren dazu eine Basis

$(a_1, \ldots, a_r)$ in $\mathfrak{g}$ und stellen jede k-Form $\omega \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ und jede l-Form $\tau \in \Omega^l(N, \mathfrak{g})$ in dieser Basis dar

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega^i a_i \quad \text{und} \quad \tau = \sum_{i=1}^{r} \tau^i a_i.$$

Dann sind ω^i und τ^i gewöhnliche reelle Formen auf N und wir definieren

$$[\omega, \tau]^\wedge := \sum_{i,j} (\omega^i \wedge \tau^j) \otimes [a_i, a_j] \in \Omega^{k+l}(N, \mathfrak{g}).$$

Man überzeugt sich schnell davon, dass diese Definition nicht von der Wahl der Basis in $\mathfrak{g}$ abhängt und dass für den Kommutator

$$\begin{array}{rccc} [\cdot,\cdot]^\wedge : & \Omega^k(N, \mathfrak{g}) \times \Omega^l(N, \mathfrak{g}) & \longrightarrow & \Omega^{k+l}(N, \mathfrak{g}) \\ & (\omega, \tau) & \longmapsto & [\omega, \tau]^\wedge \end{array}$$

die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $[\omega, \tau]^\wedge = (-1)^{kl+1} [\tau, \omega]^\wedge$
2. $d[\omega, \tau]^\wedge = [d\omega, \tau]^\wedge + (-1)^k [\omega, d\tau]^\wedge$
3. Ist ω eine 1-Form, so gilt: $\frac{1}{2}[\omega, \omega]^\wedge (X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$.

Satz 3.13 *Die Krümmungsform $F^A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ erfüllt folgende Identitäten*

1. *Strukturgleichung:* $F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A]^\wedge$
2. *Bianchi-Identität:* $D_A F^A = 0$
3. *Für eine horizontale k-Form $\omega \in \Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$ vom Typ ρ gilt:*

$$D_A D_A \omega = \rho_*(F^A) \wedge \omega.$$

Die analogen Identitäten gelten für die entsprechenden Formen auf M mit Werten im Bündel $Ad(P)$ bzw. E.

Beweis: Zum Beweis der Strukturgleichung genügt es, diese Identität auf vertikalen bzw. horizontalen Vektoren $X, Y \in T_pP$ zu überprüfen. Sind X und Y horizontal, so gilt $A(X) = A(Y) = 0$ und $F^A(X, Y) = (D_A A)(X, Y) = dA(X, Y)$, was die Behauptung zeigt. Sei X horizontal und Y vertikal. Dann ist $F^A(X, Y) = 0$, da F^A horizonal ist. Wir setzen X durch einen horizontalen Lift und Y durch ein fundamentales Vektorfeld fort, d.h. es sei $X = V^*(p)$ und $Y = \tilde{T}(p)$ für ein $V \in \mathcal{X}(M)$ und ein $T \in \mathfrak{g}$. Nach Satz 3.5 gilt $[V^*, \tilde{T}] = 0$. Da $A(V^*) = 0$ und $A(\tilde{T}) = T$ konstant sind, gilt $dA(X, Y) = 0$. Dies zeigt die Strukturgleichung für diesen Fall.

Seien nun X und Y vertikal und $X = \tilde{T}(p), Y = \tilde{S}(p)$ für $T, S \in \mathfrak{g}$. Dann gilt $F^A(X,Y) = 0$ und

$$\begin{aligned} dA(X,Y) &= X(A(\tilde{S})) - Y(A(\tilde{T})) - A([\tilde{T},\tilde{S}]) \\ &= -A(\widetilde{[T,S]}) = -[T,S] = -[A(\tilde{T}(p)), A(\tilde{S}(p))] \\ &= -[A(X), A(Y)]. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Bianchi-Identität differenzieren wir die Strukturgleichung

$$dF^A = ddA + \frac{1}{2}d[A,A]^\wedge = \frac{1}{2}\Big([dA,A]^\wedge - [A,dA]^\wedge\Big) = [dA,A]^\wedge$$

und erhalten daraus

$$D_A F^A = dF^A \circ pr_h = [dA \circ pr_h, A \circ pr_h]^\wedge = 0.$$

Beweisen wir nun die 3. Behauptung. Da ω und $D_A\omega$ horizontal und vom Typ ρ sind, folgt aus Satz 3.9

$$\begin{aligned} D_A(D_A\omega) &= d(d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega) + \rho_*(A) \wedge (d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega) \\ &= dd\omega + d(\rho_*(A)) \wedge \omega - \rho_*(A) \wedge d\omega + \rho_*(A) \wedge d\omega + \rho_*(A) \wedge \rho_*(A) \wedge \omega \\ &= \rho_*(dA) \wedge \omega + \rho_*(A) \wedge \rho_*(A) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} (\rho_*(A) \wedge \rho_*(A))(X,Y) &= \rho_*(A(X)) \circ \rho_*(A(Y)) - \rho_*(A(Y)) \circ \rho_*(A(X)) \\ &= [\rho_*(A(X)), \rho_*(A(Y))]_{\mathfrak{gl}(V)} \\ &= \rho_*([A(X), A(Y)]_{\mathfrak{g}}) \\ &= \frac{1}{2}\rho_*([A,A]^\wedge(X,Y)) \end{aligned}$$

folgt

$$D_A D_A \omega = \rho_*(dA + \frac{1}{2}[A,A]^\wedge) \wedge \omega = \rho_*(F^A) \wedge \omega.$$

□

Die Krümmung eines Zusammenhanges A mißt also, inwieweit $d_A \circ d_A$ von Null abweicht. Der nächste Satz zeigt, dass die Krümmung die vertikale Komponente des Kommutators horizontaler Vektorfelder beschreibt.

Satz 3.14 *Seien X und Y horizontale Vektorfelder auf P. Dann gilt*

1. $F^A(X,Y) = -A([X,Y])$
2. $pr_v([X,Y]) = -\widetilde{F^A(X,Y)}$

Beweis: Da X und Y horizontal sind, gilt

$$F^A(X,Y) = dA(X,Y) = X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X,Y]) = -A([X,Y]).$$

Nach Definition von A folgt daraus $pr_v([X,Y]) = -\widetilde{F^A(X,Y)}$. □

Die im letzten Satz beschriebene Eigenschaft der Krümmung hat weitere Konsequenzen. Um diese zu erläutern, erinnern wir an den Satz von Frobenius.[2]
Eine Distribution $\mathcal{D} \subset TN$ auf einer Mannigfaltigkeit N heißt *involutiv*, falls für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ der Kommutator $[X,Y]$ ebenfalls in $\Gamma(\mathcal{D})$ liegt. Eine *Integral-Mannigfaltigkeit von* $\mathcal{D}$ ist eine immergierte Untermannigfaltigkeit[3] $Q \subset N$, so dass $T_qQ = \mathcal{D}_q$ für alle $q \in Q$ gilt. Eine Distribution $\mathcal{D} \subset TN$ heißt *vollständig integrierbar*, falls es durch jeden Punkt $x \in N$ eine maximale zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von $\mathcal{D}$ gibt. Der Satz von Frobenius besagt, dass eine Distribution $\mathcal{D}$ genau dann vollständig integrierbar ist, wenn sie involutiv ist.

Satz 3.15 *1. Das vertikale Tangentialbündel $T_vP \subset TP$ ist involutiv.*

2. Das horizontale Tangentialbündel $T_hP \subset TP$ ist genau dann involutiv, wenn $F^A = 0$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt, da für fundamentale Vektorfelder $[\tilde{T}, \tilde{S}] = \widetilde{[T,S]}$ gilt. Der Kommutator vertikaler Vektorfelder ist also immer vertikal. Für zwei horizontale Vektorfelder X und Y auf P ist nach dem vorigen Satz die vertikale Komponente des Kommutators durch $pr_v[X,Y] = -\widetilde{F^A(X,Y)}$ gegeben. Folglich ist $[X,Y]$ genau dann horizontal, wenn $F^A(X,Y) = 0$ gilt. Die Involutivität des Zusammenhanges Th ist also äquivalent zum Verschwinden der Krümmung F^A. □

Das Verschwinden der Krümmung F^A bedeutet also, dass es durch jeden Punkt von P eine maximale, zu den Fasern des Bündels transversale immergierte Untermannigfaltigkeit $H \subset P$ mit dem Tangentialbündel $TH = ThP|_H$ gibt. Betrachten wir speziell das triviale G-Hauptfaserbündel $P_0 = M \times G$ über M und den kanonischen flachen Zusammenhang ThP_0 mit der Zusamenhangsform A_0. Dann gilt $F^{A_0} = 0$. Die maximale Integral-Mannigfaltigkeit von ThP_0 durch den Punkt (x,g) ist die Untermannigfaltigkeit $M \times \{g\} \subset M \times G$.

[2]Einen Beweis dieses Satzes findet man in F.W.Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

[3]Unter einer immergierten Untermannigfaltigkeit $Q \subset N$ verstehen wir das Bild einer injektiven Immersion einer glatten Mannigfaltigkeit in N mit der durch diese Immersion übertragenen glatten Struktur. Insbesondere ist die Inklusionsabbildung $i : Q \to N$ glatt.

Definition: Eine Zusammenhangsform A auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ nennen wir *flach*, wenn es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ von M gibt, so dass die Teilbündel (P_{U_i}, A) isomorph zum trivialen G-Hauptfaserbündel über U_i mit kanonischem flachen Zusammenhang sind.

Nach Satz 3.8 ist A genau dann flach, wenn es in jedem der Teilbündel P_{U_i} einen horizontalen globalen Schnitt gibt, und auch genau dann, wenn die Parallelverschiebung in jedem Teilbündel P_{U_i} unabhängig vom Weg ist.

Satz 3.16 *Ein Zusammenhang A ist genau dann flach, wenn $F^A = 0$.*

Beweis: Sei A flach. Dann gibt es um jeden Punkt $x \in M$ einen Hauptfaserbündel-Isomorphismus $\Phi : P_U \longrightarrow P_{0U} = U \times G$ mit $\Phi^* A_0 = A|_U$. Es folgt $F^A|_U = \Phi^* F^{A_0} = 0$. Sei andererseits $F^A = 0$. Dann ist die durch A definierte horizontale Distribution $ThP \subset TP$ involutiv. Nach dem Satz von Frobenius existiert durch jeden Punkt $p \in P$ eine maximale Integral-Mannigfaltigkeit $H(p) \subset P$ von Th, d.h. $T_q(H(p)) = Th_q P$ für alle $q \in H(p)$. Wir definieren dann einen lokalen horizontalen Schnitt um $x = \pi(p) \in M$ durch

$$\begin{array}{rcl} s: U(x) & \longrightarrow & P \cap H(p), \\ y & \longmapsto & \gamma_p^*(1) \end{array}$$

wobei $U(x)$ eine Normalenumgebung von x (bzgl. einer beliebig fixierten Riemannschen Metrik auf M), γ die radiale Geodäte von x nach y und γ_p^* der horizontale Lift von γ mit dem Anfangspunkt p ist. □

Satz 3.17 *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein Hauptfaserbündel mit Zusammenhangsform A über einem einfach zusammenhängenden Raum M. Dann gilt $F^A = 0$ genau dann, wenn (P, A) isomorph zum trivialen Bündel mit dem kanonischen flachen Zusammenhang ist.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Parallelverschiebung in P im Falle verschwindender Krümmung und einfach-zusammenhängendem Basisraum nicht vom Weg abhängt. Seien x und y zwei Punkte in M und $\gamma, \delta : I \longrightarrow M$ zwei Wege, die x mit y verbinden. Da M einfach-zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie $F : I \times I \longrightarrow M$ mit fixiertem Anfangspunkt x und Endpunkt y zwischen γ und δ. Wir betrachten die Kurve der Endpunkte $F(1, s)^*$ der horizontalen Lifts der Kurvenschar $F(\cdot, s)$ dieser Homotopie und zeigen, dass diese konstant ist. Dazu zerlegen wir $I \times I$ in so kleine Kästchen K_i, dass $P|_{F(K_i)}$ trivial ist. Dann hängt die Parallelverschiebung in diesen Teilbündeln nicht vom Weg ab. Setzt man diese lokale Information zusammen, so erhält man, dass $F(1, s)^*$ lokal konstant, also konstant ist. □

Abschließend sehen wir uns noch an, wie sich Zusammenhänge und Krümmungen unter Isomorphismen von Hauptfaserbündeln verhalten.

Definition: Eine *Eichtransformation* im Bündel $(P, \pi, M; G)$ ist ein Diffeomorphismus $f : P \longrightarrow P$, der faserteu und G-äquivariant ist, d.h. für den

1. $\pi \circ f = f$ und
2. $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ für alle $p \in P$ und $g \in G$ gelten.

$\mathcal{G}(P)$ bezeichne die Gruppe der Eichtransformationen des Bündels P.

Wir beschreiben zwei weitere Interpretationen der Gruppe der Eichtransformationen. Bezeichne $\alpha : G \longrightarrow Aut(G)$ die durch die innereren Automorphismen $\alpha(g)a = gag^{-1}$ gegebene Wirkung und

$$\alpha(P) := P \times_\alpha G$$

das assoziierte Faserbündel. Nach Satz 2.8 kann man die Schnitte im Bündel $\alpha(P)$ als glatte G-äquivariante Funktionen auf P mit Werten in G interpretieren

$$\Gamma(\alpha(P)) = C^\infty(P, G)^G = \{\mu : P \to G \mid \mu(pg) = g^{-1}\mu(p)g,\ \mu \text{ glatt}\}.$$

Die Identifizierung der Gruppe der Eichtransformationen mit den G-äquivarianten Abbildungen $C^\infty(P, G)^G$ ist durch die Zuordnung $f \in \mathcal{G}(P) \longmapsto \mu \in C^\infty(P, G)^G$, wobei

$$f(p) = p \cdot \mu(p) \qquad \text{für } p \in P$$

gegeben. Dann gilt der folgene Satz, den wir dem Leser als Übungsaufgaben überlassen

Satz 3.18 *Sei $A \in \mathcal{C}(P)$ eine Zusammenhangsform im Hauptfaserbündel P und $f \in \mathcal{G}(P)$ eine Eichtransformation. Dann gilt*

1. $f^*A \in \mathcal{C}(P)$
2. $f^*A = Ad(\mu(\cdot)^{-1}) \circ A + \mu^*\theta_G$
3. $f \circ \mathcal{P}_\gamma^{f^*A} = \mathcal{P}_\gamma^A \circ f$
4. $D_{f^*A} = f^* \circ D_A \circ f^{*-1}$
5. $F^{f^*A} = f^*F^A = Ad(\mu(\cdot)^{-1}) \circ F^A$.

3.6 Zusammenhänge auf S^1-Hauptfaserbündeln

In diesem Abschnitt wollen wir uns als Beispiel die Zusammenhänge eines S^1-Hauptfaserbündels genauer ansehen. Hier wird die Situation besonders einfach, da S^1 abelsch ist. Im folgenden sei also $(P, \pi, M; S^1)$ ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe S^1.

1. Die Lie-Algebra und die kanonische 1-Form von S^1
Wir betrachten die Sphäre S^1 als Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1. Eine Kurve durch $1 \in S^1$ ist dann zu schreiben als $\gamma(t) = e^{i\delta(t)}$, wobei $\delta(0) = 0$. Jeder Tangentialvektor an S^1 im 1-Element hat also die Form $\dot{\gamma}(0) = i\dot{\delta}(0) \in i\mathbb{R}$. Wir identifizieren deshalb die Lie-Algebra von S^1 im folgenden mit dem reellen Vektorraum $i\mathbb{R}$. Die komplexe Koordinate auf $\mathbb{C}$ sei z. Wir bezeichnen mit $\theta = \theta_{S^1}$ die kanonische 1-Form von S^1. Dann gilt

$$\theta_z = \frac{dz}{z}.$$

Sei nämlich $X \in T_z S^1$ und γ eine glatte Kurve in S^1 mit $\gamma(0) = z$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann gilt nach Definition der kanonischen 1-Form

$$\theta_z(X) = dL_{z^{-1}}X = \frac{d}{dt}\Big(L_{z^{-1}}(\gamma(t))\Big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(z^{-1} \cdot \gamma(t)\Big)\Big|_{t=0} = \frac{1}{z}X = \frac{1}{z}dz(X).$$

2. Die Eichtransformationen des S^1-Bündels P
Für die Gruppe der Eichtransformationen von P gilt

$$\mathcal{G}(P) = C^\infty(M, S^1) :$$

Einer Eichtransformation $f \in \mathcal{G}(P)$ entspricht die S^1-äquivariante Abbildung $\tilde{\mu} \in C^\infty(P, S^1)^{S^1}$, die durch die Bedingung $f(p) = p\tilde{\mu}(p)$ definiert ist. Da S^1 abelsch ist, folgt aus der Invarianzbedingung $\tilde{\mu}(pz) = z^{-1}\tilde{\mu}(p)z = \tilde{\mu}(p)$. $\tilde{\mu}$ ist also rechtsinvariant und somit mit einer Abbildung $\mu : M \to S^1$ zu identifizieren.

3. Die Zusammenhänge auf dem S^1-Bündel P
Die Menge der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ ist ein affiner Raum, dessen Vektorraum durch die 1-Formen $\Omega^1(M, i\mathbb{R})$ gegeben ist. Um dies einzusehen, bemerken wir, dass im Falle abelscher Lie-Gruppen die Adjungierte Darstellung als Identität auf der Lie-Algebra wirkt. Folglich ist jede 1-Form $\tilde{\eta} \in \Omega^1_{hor}(P, i\mathbb{R})^{(S^1, Ad)}$ horizontal und rechtsinvariant und projeziert sich somit zu einer 1-Form $\eta \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$. Zwei Zusammenhangsformen unterscheiden sich also durch eine 1-Form auf M mit Werten in $i\mathbb{R}$.
Ist $f \in \mathcal{G}(P)$ eine Eichtransformation von P mit der zugehörigen Abbildung $\mu \in C^\infty(M, S^1)$ und $A \in \mathcal{C}(P)$ eine Zusammenhangsform auf P. Dann erhalten wir aus Satz 3.18

$$f^*A = A + \pi^*\mu^*\theta_{S^1}.$$

4. Die Krümmungsform eines S^1-Zusammenhanges und die 1. Chern-Klasse von P

Da S^1 abelsch ist, ist die Krümmung eines S^1-Zusammenhanges eichinvariant, d.h.

$$f^*F^A = F^A \quad \text{für } f \in \mathcal{G}(P),\ A \in \mathcal{C}(P).$$

Die Krümmungsform F^A eines S^1-Zusammenhanges $A \in \mathcal{C}(P)$ kann man als geschlossene 2-Form in $\Omega^2(M, i\mathbb{R})$ auffassen: Zum einen folgt aus der Strukturgleichung und der Kommutativität von S^1, daß

$$F^A = D_A A = dA + \frac{1}{2}[A, A]^\wedge = dA.$$

Insbesondere ist F^A geschlossen. Zum anderen ist $F^A \in \Omega^2(P, i\mathbb{R})$ horizontal und rechtsinvariant, also mit einer geschlossenen 2-Form in $\Omega^2(M, i\mathbb{R})$ zu identifizieren. Sind A und $\tilde{A}$ zwei Zusammenhangsformen auf P mit der Differenz $\tilde{A} - A = \eta \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$, so gilt für die Krümmungsformen

$$F^{\tilde{A}} = F^A + d\eta$$

Insbesondere ist

$$c_1(P) := [-\frac{1}{2\pi i} F^A] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$$

eine von der Zusammenhangsform A unabhängige DeRham-Kohomologieklasse.
Die Kohomologieklasse $c_1(P) \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ heißt *1. reelle Chern-Klasse von P.*

Der folgende Satz zeigt, daß man jedes Element der 1. Chern-Klasse von P durch die Krümmungsform eines Zusammenhanges auf P realisieren kann.

Satz 3.19 *Sei $\omega \in c_1(P)$ ein Element der 1. Chern-Klasse von P. Dann existiert eine Zusammenhangsform $A \in \mathcal{C}(P)$ so dass*

$$\omega = -\frac{1}{2\pi i} F^A.$$

Beweis: Sei A_0 eine beliebig fixierte Zusammenhangsform auf P. Dann liegen die 2-Formen ω und $\tilde{\omega} := -\frac{1}{2\pi i} F^{A_0}$ in $c_1(P)$. Es gibt also eine 1-Form $\eta \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$ so daß $\omega - \tilde{\omega} = d\eta$. Wir definieren nun eine neue Zusammenhangsform auf P durch

$$A := A_0 - 2\pi i\, \eta.$$

Dann gilt $F^A = F^{A_0} - 2\pi i\, d\eta = F^{A_0} - F^{A_0} - 2\pi i\, \omega = -2\pi i\, \omega$ und somit

$$\omega = -\frac{1}{2\pi i} F^A.$$

□

3.7 Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 1. Es sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur (k,l) und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von (M,g). Für einen lokalen Schnitt $s = (s_1, ..., s_n) : U \subset M \longrightarrow O(M,g)$ im Hauptfaserbündel der orthonormalen Repere definieren wir die folgende 1-Form auf U mit Werten in der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(k,l)$ der Strukturgruppe von $O(M,g)$:

$$Z^s := \sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j \, g(\nabla s_i, s_j) E_{ij}.$$

Hierbei bezeichnet $\varepsilon_i = g(s_i, s_j) = \pm 1$ und $(E_{ij}, i < j)$ die Standard-Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(k,l)$:

$$E_{ij} = \varepsilon_i B_{ji} - \varepsilon_j B_{ij},$$

wobei B_{ij} die Matrix ist, die nur in der i.-Zeile und j.-Spalte eine 1 hat und sonst aus Nullen besteht.
Beweisen Sie: Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von lokalen Schnitten, die M überdecken. Dann definiert die Familie der lokalen 1-Formen $\{(Z^s, s)\}_{s \in \mathcal{S}}$ einen Zusammenhang im Hauptfaserbündel $O(M,g)$ der orthonormalen Repere von (M,g).

Aufgabe 2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie:
Die Menge der kovarianten Ableitungen auf M steht in bijektiver Beziehung zur Menge der Zusammenhänge im Reperbündel $GL(M)$ von M.

Aufgabe 3. Es sei $M = G/H$ ein homogener Raum, $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G, $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H und $\xi = (G, \pi, G/H; H)$ das homogene Hauptfaserbündel über dem homogenen Raum M. Beweisen Sie:

1. Ist der homogene Raum M reduktiv, d.h. existiert ein Unterraum $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ und $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, dann definiert die Zuordnung

   $$g \in G \longrightarrow Th_g G := dL_g(\mathfrak{m}) \subset T_g G$$

   einen Zusammenhang auf ξ, der zusätzlich linksinvariant ist. Die zugehörige Zusammenhangsform $Z : TG \longrightarrow \mathfrak{h}$ ist gegeben durch

   $$Z := pr_{\mathfrak{h}} \circ \theta_G,$$

   wobei θ_G die kanonische 1-Form von G ist und $pr_{\mathfrak{h}}$ die Projektion auf die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ bezeichnet.

2. Existiert auf dem homogenen Hauptfaserbündel ξ ein linksinvarianter Zusammenhang, so ist der homogene Raum $M = G/H$ reduktiv.

Aufgabe 4. Wir betrachten das Hopfbündel $(S^3, \pi, \mathbb{C}P^1; S^1)$ über $\mathbb{C}P^1$. Die Lie-Algebra der Lieschen Gruppe S^1 sei mit $i\mathbb{R}$ identifiziert. Die Sphäre S^3 betrachten

wir als Teilmenge des komplexen Vektorraumes $\mathbb{C}^2$.
Beweisen Sie, daß die 1-Form $A : TS^3 \longrightarrow i\mathbb{R}$

$$A_{(w_1,w_2)} := \frac{1}{2}\{\overline{w}_1 dw_1 - w_1 d\overline{w}_1 + \overline{w}_2 dw_2 - w_2 d\overline{w}_2\}$$

eine Zusammenhangsform im Hopfbündel H definiert.

Hinweis: Betrachten wir $T_{(w_1,w_2)}S^3 \subset T\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{C}^2$, so bezeichne dw_i und $d\overline{w}_i$ die 1-Formen $dw_i(X_1, X_2) := X_i$ und $d\overline{w}_i(X_1, X_2) := \overline{X}_i$, wobei $X_i \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5. Es sei (E, ∇) ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇. Sei γ eine Kurve in M mit dem Anfangspunkt $\gamma(a) = x$, $e \in E_x$ ein Punkt der Faser über x und bezeichne φ_e den eindeutig bestimmten Schnitt in E über entlang der Kurve γ, für den $\frac{\nabla \varphi_e}{dt} \equiv 0$ und $\varphi_e(a) = e$ gilt. Dann ist durch

$$\mathcal{P}_\gamma^\nabla : e \in T_{\gamma(a)}E \longrightarrow \varphi_e(b) \in T_{\gamma(b)}E$$

eine Parallelverschiebung im Vektorbündel E definiert.
Sei nun $E = P \times_G V$ zu einem G-Hauptfaserbündel P und einer Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ assoziiert und ∇^A die durch eine Zusammenhangsform A auf P induzierte kovariante Ableitung. Zeigen Sie, dass die durch A und ∇^A definierten Parallelverschiebungen in E übereinstimmen:

$$\mathcal{P}_\gamma^{\nabla^A} = \mathcal{P}_\gamma^{E,A}$$

Aufgabe 6. Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $(P, \pi, M; G)$ ein glattes Hauptfaserbündel mit Zusammenhangsform A, und B eine nichtausgeartete, Ad-invariante symmetrische Bilinearform auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.
Beweisen Sie:

1. $h := \pi^* g + B(A(\cdot), A(\cdot))$ ist eine semi-Riemannsche Metrik auf P.
2. Die Rechtstranslationen $R_a : P \longrightarrow P$, $a \in G$, sind Isometrien bzgl. der Metrik h auf P.

Aufgabe 7. Es sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel. Ist A eine Zusammmenhangsform auf P und σ eine 1-Form auf M mit Werten im Adjungierten Bündel $Ad(P)$, so ist $A + \sigma$ ebenfalls eine Zusammenhangsform auf P (siehe Abschnitt 3.2). Weiterhin sei $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G und $E := P \times_\rho V$ das assoziierte Vektorbündel. Beweisen Sie folgende Beziehungen:

1. Für alle p-Formen ω auf M mit Werten in E gilt:

$$d_{A+\sigma}\,\omega = d_A\,\omega + \rho_*(\sigma) \wedge \omega.$$

2. Für die Krümmungsformen gilt:

$$F^{A+\sigma} = F^A + d_A\,\sigma + \frac{1}{2}[\sigma, \sigma].$$

Aufgabe 8. Es sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel. A sei eine Zusammenhangsform in P, F^A die Krümmungsform von A und $\mathcal{P}^A_\gamma$ die durch A definierte Parallelverschiebung in P. Weiterhin bezeichne f eine Eichtransformation auf P und $\mu \in C^\infty(P; G)^G$ die durch

$$f(p) = p \cdot \mu(p), \qquad p \in P,$$

definierte Abbildung von P in die Liesche Gruppe G.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. f^*A ist eine Zusammenhangsform auf P.
2. $(f^*A)_p = Ad(\mu(p)^{-1}) \circ A_p + dL_{\mu(p)^{-1}}\,d\mu_p\,, \quad p \in P$.
3. $f \circ \mathcal{P}^{f^*A}_\gamma = \mathcal{P}^A_\gamma \circ f$.
4. $D_{f^*A} = f^* \circ D_A \circ f^{*-1}$.
5. $F^{f^*A} = f^*F^A = Ad(\mu(\cdot)^{-1}) \circ F^A$.

Aufgabe 9. Es sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine G-Darstellung und $E = P \times_G V$ das assoziierte Vektorbündel. Sei A eine Zusammenhangsform auf P, $F^A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ die Krümmungsform von A, ∇^A die von A induzierte kovariante Ableitung in E und R^A der durch ∇^A definierte Krümmungsendomorphismus

$$R^A(X, Y) := \nabla^A_X \nabla^A_Y - \nabla^A_Y \nabla^A_X - \nabla^A_{[X,Y]} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

Beweisen Sie die folgende Beziehung zwischen den Krümmungen:

$$R^A(X, Y)e = [p, \rho_*(F^A_p(X^*, Y^*))v], \quad \text{wobei} \quad e = [p, v] \in E_{\pi(p)}.$$

Aufgabe 10. Es sei M^n eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und P das $GL(n, \mathbb{R})$-Reperbündel von M. A sei eine fixierte Zusammenhangsform auf P und ∇ die zu A gehörende kovariante Ableitung auf M. Wir betrachten die folgende 1-Form $\theta \in \Omega^1(P, \mathbb{R}^n)$

$$\theta_p(X) := [p]^{-1} d\pi_p(X) \qquad p \in P,\ X \in T_pP.$$

Die 2-Form $\Theta^A := D_A\theta \in \Omega^2(P, \mathbb{R}^n)$ heißt *Torsionsform von A*. Beweisen Sie:

1. θ ist eine horizontale 1-Form vom Typ ρ ($\rho =$ Matrixwirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^n$).

2. Ist $U \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld auf M, $U^* \in \Gamma(TP)$ das zugehörige horizontale Vektorfeld auf P und $\overline{U} \in C^\infty(P, \mathbb{R}^n)^{GL(n,\mathbb{R})}$ die dem glatten Schnitt U entsprechende invariante Abbildung. Dann gilt:
$$\theta(U^*) = \overline{U}.$$
3. Für alle Vektorfelder X, Y auf P gilt:
$$\Theta^A(X,Y) = d\theta(X,Y) + A(X)\theta(Y) - A(Y)\theta(X).$$
4. Für den Torsionstensor T von ∇
$$T(U,V) := \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \qquad U, V \in \Gamma(TM)$$
gilt:
$$T_x(X,Y) = [p] \circ \Theta^A_p(X^*, Y^*),$$
wobei $p \in P_x,\ X, Y \in T_xM,\ X^*, Y^* \in Th_pP$ die entsprechenden horizontalen Lifte und $[p]$ die durch $p \in P$ definierte Faserisomorphie bezeichnet.

Aufgabe 11. $(P, \pi, M; G)$ sei ein Hauptfaserbündel mit *abelscher* Strukturgruppe G. Dann gilt:

1. Die Krümmungsformen zweier eichäquivalenter Zusammenhänge sind gleich.
2. Ist M zusätzlich einfach-zusammenhängend, so gilt die Umkehrung:
Sind die Krümmungsformen zweier Zusammenhänge gleich, so sind diese Zusammenhänge eichäquivalent.

Aufgabe 12. Sei $\xi = (S^3, \pi, \mathbb{C}P^1; S^1)$ das Hopfbündel über $\mathbb{C}P^1$ und bezeichne ξ^* das S^1-Hauptfaserbündel, das aus der Hopffaserung entsteht, wenn man die Liesche Gruppe S^1 von rechts auf S^3 mittels
$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^1 & \longrightarrow & S^3 \\ ((w_1, w_2), z) & \longmapsto & (w_1 \cdot z^{-1}, w_2 \cdot z^{-1}) \end{array}$$
wirken läßt. Beweisen Sie, dass für die 1. Chern-Klassen von ξ und ξ^* gilt:
$$c_1(\xi) = -1 \qquad \text{und} \qquad c_1(\xi^*) = 1,$$
wobei $H^2_{dR}(\mathbb{C}P^1, \mathbb{R})$ durch die Zuordnung $[\omega] \in H^2_{dR}(\mathbb{C}P^1, \mathbb{R}) \to \int\limits_{\mathbb{C}P^1} \omega \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert ist.
Welche Chern-Klassen entstehen, wenn man das Hopfbündel ξ mittels des Homomorphismus $\varphi : z \in S^1 \to z^k \in S^1$ zu einem S^1-Hauptfaserbündel ξ_k über $\mathbb{C}P^1$ erweitert? ($k \in \mathbb{Z}$).

Kapitel 4

Holonomietheorie

In diesem Kapitel betrachten wir Liesche Gruppen, die durch Parallelverschiebung entlang geschlossener Wege entstehen, die sogenannten Holonomiegruppen. Es wird sich zeigen, dass man die Strukturgruppe eines Hauptfaserbündels auf diese Gruppen reduzieren kann, ohne die durch den Zusammenhang gegebene Differentialrechnung zu verändern.

4.1 Reduktion und Erweiterung von Zusammenhängen

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst, wie sich Zusammenhänge bei Reduktion und Erweiterung von Bündeln verhalten.

Satz 4.1 *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel, $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und (Q, f) eine λ-Reduktion von P. Sei weiterhin $A \in \mathcal{C}(Q)$ ein Zusammenhang in Q. Dann existiert genau ein Zusammenhang $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$, so daß*

$$df_q(Th^A_q Q) = Th^{\tilde{A}}_{f(q)} P. \qquad (*)$$

Für die Zusammenhangs- und Krümmungsformen gilt

$$\begin{aligned} f^*\tilde{A} &= \lambda_* \circ A \\ f^*F^{\tilde{A}} &= \lambda_* \circ F^A. \end{aligned}$$

Definition: Der Zusammenhang $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$ mit (*) heißt die *λ-Erweiterung von $A \in \mathcal{C}(Q)$*. Der Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(Q)$ mit (*) heißt die *λ-Reduktion von $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$*.

Beweis von Satz 4.1: Sei $p \in P$ ein Element in der Faser über $x \in M$. Wir wählen einen Punkt $q \in Q_x$ und betrachten das Element $g \in G$ mit $f(q)g = p$. Wir definieren

$$Th_p P := dR_g df_q(Th^A_q Q) \subset T_p P$$

und zeigen, daß dies einen Zusammenhang auf P liefert. Zunächst überzeugen wir uns, daß die Definition korrekt, d.h. unabhängig von der Auswahl von q ist. Ist

$p = f(\tilde{q})\tilde{g}$, so gilt $\tilde{q} = qh$ für ein $h \in H$. Dann folgt $p = f(qh)\tilde{g} = f(q)\lambda(h)\tilde{g} = f(q)g$. Da G einfach-transitiv auf der Faser P_x wirkt, ist $g = \lambda(h)\tilde{g}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} dR_{\tilde{g}} df_{\tilde{q}}(Th^A_{\tilde{q}}Q) &= dR_{\tilde{g}} df_{\tilde{q}}(dR_h(Th^A_q Q)) \\ &= dR_{\tilde{g}} dR_{\lambda(h)} df_q(Th^A_q Q) \\ &= dR_g df_q(Th^A_q Q) \end{aligned}$$

Die Zuordnung $Th : p \in P \to Th_pP \subset T_pP$ ist rechtsinvariant, da

$$dR_a(Th_pP) = dR_a dR_g df(Th^A_q Q) = dR_{ga} df_q(Th^A_q Q) = Th_{pa}P.$$

Der Unterraum $Th_pP \subset T_pP$ ist komplementär zum vertikalen Tangentialraum Tv_pP, da $(df \circ d\pi)|_{Th_qQ} = d\tilde{\pi}|_{Th_qQ}$ ein Isomorphismus von Th_qQ auf T_xM und $df_q : Th_qQ \to Th_{f(q)}P$ surjektiv ist. Die Glattheit von ThP folgt aus der Glattheit von Th^AQ und f. Damit ist bewiesen, dass ThP ein Zusammenhang auf P ist. Die Invarianzeigenschaften eines Zusammenhanges liefern die Eindeutigkeit von ThP.

Sei $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$ die zu ThP gehörende Zusammenhangsform. Wir zeigen $f^*\tilde{A} = \lambda_* \circ A$: Für einen horizontalen Vektor $X \in Th^A_q Q$ gilt

$$\lambda_*(A(X)) = 0 \quad \text{und} \quad (f^*\tilde{A})(X) = \tilde{A}(df(X)) = 0.$$

Für einen vertikalen Vektor $\tilde{Y}(q) \in Tv_qQ$ mit $Y \in \mathfrak{h}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_*(A(\tilde{Y}(q)) &= \lambda_* Y \quad \text{und} \\ (f^*\tilde{A})(\tilde{Y}(q)) &= \tilde{A}(df(\tilde{Y}(q))) = \tilde{A}(\widetilde{\lambda_* Y}(f(q))) = \lambda_* Y. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Formel $\lambda_* \circ F^A = f^* F^{\tilde{A}}$ benutzen wir die Strukturgleichung für die Krümmungsform eines Zusammenhanges (siehe Satz 3.13) und erhalten

$$\begin{aligned} f^*F^{\tilde{A}} &= f^* d\tilde{A} + \frac{1}{2} f^*[\tilde{A}, \tilde{A}]^\wedge \\ &= d(f^*\tilde{A}) + \frac{1}{2}[f^*\tilde{A}, f^*\tilde{A}]^\wedge \\ &= d(\lambda_* \circ A) + \frac{1}{2}[\lambda_* \circ A, \lambda_* \circ A]^\wedge \\ &= \lambda_* \circ dA + \frac{1}{2}\lambda_*[A, A]^\wedge \\ &= \lambda_* F^A \end{aligned}$$

□

Während eine λ-Erweiterung eines Zusammenhanges immer existiert, ist dies für die λ-Reduktion nicht der Fall. Wir geben im nächsten Satz ein Kriterium für die Reduzierbarkeit eines Zusammenhanges eines G-Hauptfaserbündels auf eine Untergruppe $H \subset G$ an. Wir beschränken uns dabei auf spezielle Paare (G, H).

Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe G, $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Wir erinnern daran, dass der homogene Raum G/H *reduktiv* heißt, falls es eine Vektorraum-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ gibt, so daß $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ gilt.

Satz 4.2 *Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und G/H ein reduktiver homogener Raum. Sei P ein G-Hauptfaserbündel und $Q \subset P$ eine H-Reduktion von P. Ist $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$ eine Zusammenhangsform auf P, so ist*

$$A := pr_{\mathfrak{h}} \circ \tilde{A}|_{TQ} : TQ \longrightarrow \mathfrak{h}$$

eine Zusammenhangsform auf Q. Nimmt insbesondere die Zusammenhangsform $\tilde{A} \in \mathcal{C}(P)$ ihre Werte in $\mathfrak{h}$ an, so ist $A := \tilde{A}|_{TQ}$ eine Zusammenhangsform auf Q.

Beweis: Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. □

4.2 Das Holonomiebündel

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die "kleinste" Reduktion eines G-Hauptfaserbündels mit gegebenem Zusammenhang zu finden. Die Untergruppen von G, auf die wir in diesem Abschnitt reduzieren werden, sind i.a. nicht abgeschlossen. Wir betrachten deshalb immergierte Liesche Untergruppen:

Definition: Sei G eine Liesche Gruppe. Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt *immergierte Liesche Untergruppe* von G, falls H eine immergierte Untermannigfaltigkeit von G ist und die Gruppenoperationen bzgl. der auf H gegebenen Mannigfaltigkeitsstruktur glatt sind.

Für immergierte Liesche Untergruppen ist die Inklusionsabbildung $i : H \hookrightarrow G$ offensichtlich ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Wir benutzen im Folgenden den Satz von Freudenthal/Yamabe, der ein Kriterium dafür angibt, wann eine Untergruppe eine immergierte Liesche Untergruppe ist.

Satz 4.3 (Satz von Freudenthal/Yamabe) *Sei G eine Liesche Gruppe und $H \subset G$ eine algebraische Untergruppe. Zu jedem $h \in H$ existiere ein stückweis glatter Weg $\omega : [0,1] \to G$, der vollständig in H liegt und h mit dem trivialen Element e verbindet. Dann ist H eine immergierte Liesche Untergruppe von G.*

Beweis: Wir geben hier nur die Beweisidee an.[1] Sei $S \subset T_eG = \mathfrak{g}$ der Teilraum

$$S := \{X \in T_eG \mid X = \dot{\gamma}(0) \text{ für } \gamma : [0,1] \to G \text{ Weg mit } \gamma(0) = e \text{ und } \mathrm{Im}\gamma \subset H\}.$$

[1]Einen Beweis dieses Satzes findet man in S. Kobayashi und K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Volume I, Anhang 4.

Dann zeigt man, daß S eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und die Distribution

$$x \in G \longmapsto S_x = dL_x(S) \subset TgG$$

involutiv ist. Offensichtich ist $T_hH = T_hS$ für alle $h \in H$. Nach dem Satz von Frobenius trägt dann H die Struktur einer immergierten Untermannigfaltigkeit. $\square$

Im folgenden sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M und $A \in \mathcal{C}(P)$ eine fixierte Zusammenhangsform auf P. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}^A_\gamma : P_{\gamma(0)} \to P_{\gamma(1)}$ die durch A definierte Parallelverschiebung entlang des Weges γ in P. [2] Für $x \in M$ bezeichne

$$\begin{aligned} \Omega(x) &:= \{\gamma \mid \gamma \text{ in } x \text{ geschlossener Weg in } M \ \} \\ \Omega_0(x) &= \{\gamma \mid \gamma \text{ in } x \text{ geschlossener und null-homotoper Weg in } M\}. \end{aligned}$$

Definition: Sei $p \in P_x$ ein Element in der Faser von P über $x \in M$. Die Gruppe

$$Hol_p(A) := \{g \in G \mid \exists\, \gamma \in \Omega(x) \text{ mit } \mathcal{P}^A_\gamma(p) = pg\} \subset G$$

heißt *Holonomiegruppe von A in $p \in P$*. Die Gruppe

$$Hol_p(A)_0 := \{g \in G \mid \exists\, \gamma \in \Omega_0(x) \text{ mit } \mathcal{P}^A_\gamma(p) = pg\} \subset G$$

heißt *reduzierte Holonomiegruppe von A in $p \in P$*. Das Element $g_\gamma \in G$ mit $\mathcal{P}^A_\gamma(p) = pg_\gamma$ heißt *Holonomie des Weges γ bzgl. p*.

Für den horizontalen Lift γ^*_p eines Weges γ mit Anfangspunkt $p \in P$ gilt $\gamma^*_{pa} = \gamma^*_p \cdot a$. Daraus folgt für die Holonomie von Wegen $\gamma, \delta \in \Omega(x)$, dass $g_{\gamma * \delta} = g_\gamma \cdot g_\delta$. Insbesondere sind also $Hol_p(A)$ und $Hol_p(A)_0$ tatsächlich Untergruppen von G. Für $\gamma \in \Omega(x)$ und $\gamma_0 \in \Omega_0(x)$ ist $\gamma^- * \gamma_0 * \gamma \in \Omega_0(x)$ und somit $g_\gamma^{-1} g_{\gamma_0} g_\gamma \in Hol_p(A)_0$. D.h. $Hol_p(A)_0$ ist ein Normalteiler in $Hol_p(A)$. Aus der G-Äquivarianz der Parallelverschiebung folgt sofort, dass die Holonomiegruppen zu verschiedenen Referenzpunkten konjugiert sind:

$$Hol_{pa}(A) = a^{-1} \cdot Hol_p(A) \cdot a \qquad \text{falls } p \in P_x \text{ und } a \in G.$$

Wir zeigen nun, dass die Holonomiegruppe eine immergierte Liesche Untergruppe von G ist.

Satz 4.4 *Die Holonomiegruppe $Hol_p(A)$ ist eine immergierte Liesche Untergruppe von G. Die reduzierte Holonomiegruppe $Hol_p(A)_0$ ist die Zusammenhangskomponente des 1-Elementes von $Hol_p(A)$. Insbesondere ist die Holonomiegruppe $Hol_p(A)$ genau dann zusammenhängend, wenn M einfach-zusammenhängend ist.*

[2] Wir erinnern daran, daß wir unter einem Weg immer eine stückweis glatte Abbildung verstehen

Beweis: Wir beweisen zunächst, dass die reduzierte Holonomiegruppe $Hol_p(A)_0$ eine zusammenhängende immergierte Liesche Untergruppe von G ist. Wir benutzen dazu den Satz von Freudenthal-Yamabe und zeigen, daß sich jedes Element $g \in Hol_p(A)_0$ mit dem neutralen Element $e \in G$ durch einen vollständig in $Hol_p(A)_0$ liegenden Weg verbinden läßt. Sei $\gamma \in \Omega_0(x)$ und $\mathcal{P}^A_\gamma(p) = pg$. Wir wählen eine Homotopie aus Wegen $H_s \in \Omega_0(x)$ zwischen dem in x konstanten Weg H_0 und $H_1 = \gamma$. Seien H_s^* die horizontalen Lifte von H_s mit dem Anfangspunkt $p \in P_x$ und $\mathcal{P}^A_{H_s}(p) = pg_s = H_s^*(1)$. Da die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen glatt von der Anfangsbedingung abhängt, ist $s \in [0,1] \mapsto g_s \in G$ ein stückweis glatter Weg in G mit Bild in $Hol_p(A)_0$, der e und g verbindet. Folglich ist $Hol_p(A)_0$ eine immergierte Liesche Untergruppe.
Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F:\ \pi_1(M,x) &\longrightarrow Hol_p(A)/Hol_p(A)_0 \\ [\gamma] &\longmapsto g_\gamma \mod Hol_p(A)_0 \end{aligned}$$

Dies ist ein korrekt definierter surjektiver Gruppenhomomorphismus. Aus der Topologie weiß man, daß die Fundamentalgruppe einer glatten Mannigfaltigkeit abzählbar ist. Also ist der Faktorraum $Hol_p(A)/Hol_p(A)_0$ abzählbar. Insbesondere ist die Gruppe $Hol_p(A)$ die Vereinigung höchstens abzählbar vieler disjunkter Orbits der Form $g_n \cdot Hol_p(A)_0$ mit $g_n \in Hol_p(A)$. Überträgt man die glatte Struktur von $Hol_p(A)_0$ auf alle diese Orbits, so wird $Hol_p(A)$ eine immergierte Untermannigfaltigkeit in G. Alle Gruppenoperationen sind bzgl. dieser Differentialstruktur glatt. $Hol_p(A)$ ist also eine immergierte Liesche Untergruppe von G. Die reduzierte Holonomiegruppe $Hol_p(A)_0$ ist dann per Definition die Zusammenhangskomponente des 1-Elementes. Insbesondere ist $Hol_p(A)$ zusammenhängend, wenn $\pi_1(M) = 0$.
□

Der nächste Satz zeigt, daß sich jeder Zusammenhang eines G-Hauptfaserbündels auf seine Holonomiegruppe reduzieren läßt.

Satz 4.5 (Reduktionssatz der Holonomietheorie) *Sei $(P,\pi,M;G)$ ein G-Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhangsform $A \in \mathcal{C}(P)$ und $u \in P$ ein fixierter Punkt. Bezeichne*

$$P^A(u) := \{p \in P \mid \textit{es existiert ein } A\textit{-horizontaler Weg von } u \textit{ nach } p.\}$$

Dann gilt:

1. *$(P^A(u),\pi,M)$ ist ein Hauptfaserbündel über M mit der Strukturgruppe $Hol_u(A)$.*

2. *(P,A) reduziert sich auf $P^A(u)$.*

Wir zeigen zunächst zwei Hilfssätze über Reduktionen des G-Hauptfaserbündels P, die wir im Beweis von Satz 4.5 benutzen werden.

Lemma 4.1 *Sei $H \subset G$ eine immergierte Liesche Untergruppe und $Q \subset P$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften*

1. *Die Projektion $\tilde{\pi} := \pi|_Q : Q \longrightarrow M$ ist surjektiv.*
2. *$R_h(Q) = Q$ für alle $h \in H$.*
3. *Sind $q, \tilde{q} \in Q_x := Q \cap P_x$ und gelte $q = \tilde{q} \cdot g$. Dann ist $g \in H$.*
4. *Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U(x) \in M$ und ein glatter Schnitt $s : U(x) \longrightarrow P$ mit $s(U) \subset Q$.*

Dann ist $Q \subset P$ eine immergierte Untermannigfaltigkeit und $(Q, \tilde{\pi}, M; H)$ ein H-Hauptfaserbündel, das zusammen mit der Inklusion $\iota : Q \hookrightarrow P$ eine Reduktion von P auf H ergibt.

Beweis: Sei $s : U \to P$ ein lokaler Schnitt in P mit $s(U) \subset Q$ und ψ_U die zugehörige Bündelkarte

$$\begin{array}{rccl} \psi_U : & P_U & \longrightarrow & U \times G \\ & p = s(\pi(p))g & \longmapsto & (\pi(p), g). \end{array}$$

Wegen der Voraussetzungen 1.-4. ist $\phi_U := \psi|_{Q_U} : Q_U := P_U \cap Q \longrightarrow U \times H$ bijektiv. Die Menge Q läßt sich durch solche Karten ϕ_{U_i} überdecken, die Kartenübergänge $\phi_{U_j} \circ \phi_{U_i}^{-1}$ sind glatt. Wir übertragen die Topologie und die Mannigfaltigkeitsstruktur von M und H wie in Kapitel 2.1 erläutert mittels dieser Karten auf Q. Dadurch wird $(Q, \tilde{\pi}, M; H)$ ein H-Hauptfaserbündel über M und die Inklusion $\iota : Q \hookrightarrow P$ ist nach Konstruktion glatt. Das Paar (Q, ι) ist offensichtlich eine Reduktion von P auf H. □

Lemma 4.2 *Sei Q eine Reduktion von P auf eine immergierte Liesche Untergruppe $H \subset G$ und gelte für den durch die Zusammenhangsform $A \in \mathcal{C}(P)$ definierten Zusammenhang*

$$Th_q^A P \subset T_q Q \qquad \textit{für alle } q \in Q.$$

Dann reduziert sich A zu einer Zusammenhangsform $A' := A|_{TQ}$ auf Q.

Beweis: Die Zuordung $Th : q \in Q \to Th_q Q := Th_q^A P \subset T_q Q$ ist ein Zusammenhang auf Q und für die zugehörige Zusammenhangsform A' gilt $A' = A|_{TQ}$. □

Beweis von Satz 4.5: Um diesen Satz zu beweisen, genügt es nun, für die Menge der von $u \in P$ ausgehenden horizontalen Wege

$$P^A(u) := \{p \in P \mid \text{es existiert ein } A\text{-horizontaler Weg von } u \text{ nach } p.\}$$

die Bedingungen aus den Lemmata 4.1 und 4.2 zu überprüfen.

- Sei $x = \pi(u)$ und $y \in M$ ein beliebiger Punkt. Da M zusammenhängend ist, gibt es einen glatten Weg $\gamma : [0, 1] \to M$, der x mit y verbindet. Dann liegt der Endpunkt des bei u beginnenden horizontalen Lifes γ_u^* in $P^A(u)$ und es gilt $\pi(\gamma_u^*(1)) = y$. Folglich ist $\pi|_{P^A(u)}$ surjektiv.

- Sei $p \in P^A(u)$ und $h \in Hol_u(A)$. Dann existiert ein horizontaler Weg δ von u nach p und ein Weg $\mu \in \Omega(x)$ mit $\mathcal{P}^A_\mu(u) = uh$. Der Weg $\delta h * \mu_u^*$ ist horizontal und verbindet u mit ph. Folglich gilt $R_h(P^A(u)) \subset P^A(u)$ für alle $h \in Hol_u(A)$.

- Seien $p, \tilde{p} \in P^A(u) \cap P_x$ und $p = \tilde{p}g$. Bezeiche δ einen horizontalen Weg von u nach p und $\tilde{\delta}$ einen horizontalen Weg von u nach $\tilde{p}$. Dann ist $\mu = \pi(\tilde{\delta}^-) * \pi(\delta) \in \Omega(x)$ und der horizontale Lift von μ mit dem Anfangspunkt u hat den Endpunkt ug. Folglich ist $g \in Hol_u(A)$.

- Sei $x \in M$. Um einen lokalen Schnitt um x zu definieren, betrachten wir eine Normalenumgebung $U(x)$ um x (bezgl. einer fest gewählten Riemanschen Metrik auf M) und definieren $s : U(x) \to P^A(u)$ durch die Parallelverschiebung $s(y) := \mathcal{P}^A_{\gamma_{xy}}(u)$, wobei γ_{xy} die eindeutig bestimmte radiale Geodäte in $U(x)$ von x nach y ist.

- Sei $q \in P^A(u)$ und $X \in Th^A_q P$ ein horizontaler Vektor. Dann gibt es eine in $\pi(q)$ beginnende Kurve γ in M, so daß $X = \dot{\gamma}_q^*(0)$. Da q mit u durch einen horizontalen Weg verbindbar ist, liegt das Bild von γ_q^* in $P^A(u)$. Folglich ist $X \in T_q P^A(u)$.

Wir haben damit bewiesen, dass $(P^A(u), \pi, M, Hol_u(A))$ ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe $Hol_u(A)$ ist, auf das sich das G-Hauptfaserbündel P einschließlich seines Zusammenhanges A reduziert. □

Definition: Sei $(P, \pi, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Wir nennen einen Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(P)$ *irreduzibel*, falls sich (P, A) nicht auf eine echte immergierte Untergruppe reduzieren läßt.

Das Holonomiebündel $P^A(u)$ ist die “kleinst mögliche “ Reduktion von (P, A) (siehe Übungsaufgabe 2, Kapitel 4). Nach Satz 4.2 ist ein Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(P)$ folglich genau dann irreduzibel, wenn $P = P^A(u)$ und $G = Hol_u(A)$ für alle $u \in P$ gilt.
Wir wollen nun ein Kriterium für die Irreduzibilität herleiten und außerdem sehen , wie “groß“ die Holonomiegruppe ist.

Satz 4.6 (Holonomietheorem von Ambrose und Singer) *Sei* (P, π, M, G) *ein G-Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M und $A \in \mathcal{C}(P)$ eine Zusammenhangesform auf P mit der Krümmungsform $F^A = D_A A$. Dann gilt für die Lie-Algebra $\mathfrak{hol}_u(A)$ der Holonomiegruppe von A bzgl. $u \in P$*

$$\mathfrak{hol}_u(A) = span\{F^A_p(X, Y) \mid p \in P^A(u), X, Y \in T_p P\} \subset \mathfrak{g}.$$

Ist insbesondere G zusammenhängend und M einfachzusammenhängend, so ist (P,A) genau dann irreduzibel, wenn

$$\mathfrak{g} = span\{F^A_p(X,Y) \mid p \in P^A(u),\ X,Y \in T_pP\}.$$

Beweis: Wir können oBdA annehmen, daß $G = Hol_u(A)$ und $P = P^A(u)$. Andernfalls reduzieren wir zuerst (P,A) auf das Holonomiebündel $(P^A(u), Hol_u(A))$. Sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{m} := span\{F^A_p(X,Y) \mid p \in P,\ X,Y \in T_pP\}$$

Wir müssen $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ zeigen. Wir beweisen zunächst, das $\mathfrak{m}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. Sei $F^A_p(X,Y) \in \mathfrak{m}$ und $W \in \mathfrak{g}$. Aus der Invarianzeigenschaft der Krümmungsform erhalten wir für die Ableitung der in $\mathfrak{m}$ liegenden Kurve $t \to (R^*_{\exp tW}F^A)_p(X,Y) \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(F^A_{p\exp tW}(dR_{\exp tW}X, dR_{\exp tW}Y)\Big)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big(Ad(\exp(-tW))(F^A_p(X,Y))\Big)\Big|_{t=0} \\
&= -ad(W)(F^A_p(X,Y)) \\
&= [F^A_p(X,Y), W]
\end{aligned}$$

Folglich ist $[F^A_p(X,Y), W] \subset \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Wir betrachten nun die glatte Distribution

$$E : p \in P \longrightarrow E_p := Th_pP \oplus \{\tilde{W}(p) \mid W \in \mathfrak{m} \subset T_pP\}$$

und zeigen, daß sie involutiv ist. Ist X ein horizontales Vektorfeld auf P und $\tilde{W}$ ein von $W \in \mathfrak{m}$ erzeugtes fundamentales Vektorfeld, so ist nach Satz 3.5 der Kommutator $[X, \tilde{W}]$ ebenfalls horizontal. Für zwei Vektorfelder $\tilde{W}, \tilde{V}$ mit $W, V \in \mathfrak{m}$ gilt $[\tilde{W}, \tilde{V}] = \widetilde{[W,V]}$ und $[W,V] \in \mathfrak{m}$. Sind X, Y zwei horizontale Vektorfelder auf P, so gilt nach Satz 3.13 für die vertikale Komponente des Kommutators $[X,Y]$

$$[X,Y]^v = -\widetilde{F^A(X,Y)} \in \mathfrak{m}$$

Folglich liegt auch dieser Kommutator in $\Gamma(E)$. Somit ist E involutiv. Nach dem Satz von Frobenius existiert eine maximale zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit $Q \subset P$ von E durch $u \in P$. Ein Punkt $q \in P$ liegt genau dann in Q, wenn es einen Weg $\gamma : [0,1] \to P$ zwischen u und q gibt mit $\dot{\gamma}(t) \in E_{\gamma(t)}$ für jeden Parameter $t \in [0,1]$. Da $ThP \subset TQ$, folgt dann aus der Definition von $P^A(u)$, dass $P = P^A(u) \subset Q$. Folglich gilt $P = Q$ und damit $E = TP$. Dies bedeutet aber, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. □

Für Vektorbündel E mit gegebener kovarianter Ableitung ∇ kann man auf analoge Weise eine Holonomiegruppe definieren. Sei $x \in M$ und $\gamma \in \Omega(x)$ ein in x geschlossener Weg. Dann ist die durch ∇ definierte Parallelverschiebung $\mathcal{P}^\nabla_\gamma \in GL(E_x)$ ein linearer Isomorphismus auf der Faser E_x (siehe Aufgabe 5, Kapitel 3).

Definition: Die Gruppe

$$Hol_x(\nabla) := \{\mathcal{P}_\gamma^\nabla \mid \gamma \in \Omega(x)\} \subset GL(E_x)$$

heißt *Holonomiegruppe von* ∇ *bzgl.* x. Die Gruppe

$$Hol_x(\nabla)_0 := \{\mathcal{P}_\gamma^\nabla \mid \gamma \in \Omega_0(x)\} \subset GL(E_x)$$

heißt *reduzierte Holonomiegruppe von* ∇ *bzgl.* x.

Die Beziehung zwischen den so definierten Holonomiegruppen für Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln und für kovariante Ableitungen in Vektorbündeln ist durch die Beziehung zwischen den Parallelverschiebungen gegeben.

Satz 4.7 *Sei P ein Hauptfaserbündel über M, $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G und $E = P \times_G V$ das assoziierte Vektorbündel. Sei weiterhin A eine Zusammenhangsform auf P und ∇^A die assoziierte kovariante Ableitung in E. Dann gilt für die Holonomiegruppen*

$$Hol_x(\nabla^A) = [p] \circ \rho_*(Hol_p(A)) \circ [p]^{-1}$$

wobei $x \in M$ und $p \in P_x$.

4.3 Holonomiegruppen und parallele Schnitte

In diesem Abschnitt betrachten wir ein reelles oder komplexes Vektorbündel $(E, \pi, M; \mathbb{K}^r)$ über einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit fixierter kovarianter Ableitung ∇^E und den Raum aller parallelen Schnitte

$$Par(E, \nabla^E) := \{\varphi \in \Gamma(E) \mid \nabla^E \varphi = 0\}.$$

Wir wollen Bedingungen dafür angeben, daß $Par(E, \nabla^E) \neq \emptyset$.

Ein Teilbündel $F \subset E$ nennen wir ∇^E-invariant, falls

$$\nabla_X^E \, \Gamma(F) \subset \Gamma(F) \qquad \text{für alle } X \in \mathcal{X}(M).$$

Für ein invariantes Teilbündel $F \subset E$ induziert ∇^E eine kovariante Ableitung $\nabla^F := \nabla^E \Big|_{\Gamma(T^*M \otimes F)}$ auf F.

Satz 4.8 *Sei $F \subset E$ ein ∇^E-invariantes Teilbündel, ∇^F die induzierte kovariante Ableitung auf F und gelte für deren Krümmungsendomorphismus $R^{\nabla^F} = 0$. Dann ist*

$$\dim Par(E, \nabla^E) \geq rang(F).$$

Beweis: Sei $x \in M$ ein fixierter Punkt und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis in F_x. Wir definieren Schnitte φ_i in F durch Parallelverschiebung der v_i

$$\varphi_i : \ y \in M \longrightarrow \varphi_i(y) := \mathcal{P}^{\nabla^F}_{\gamma_{xy}}(v_i) \in F_y,$$

wobei γ_{xy} ein Weg in M ist, der x mit y verbindet. Wir zeigen zunächst, daß diese Definition nicht von der Wahl des Weges γ_{xy} abhängt. Wir betrachten dazu das zu F assoziierte $Gl(r,\mathbb{K})$-Hauptfaserbündel P und die zu ∇^F gehörende Zusammenhangsform A auf P (siehe Kapitel 2.4 und 3.4). Dann gilt $F = P \times_{Gl(r,\mathbb{K})} \mathbb{K}^r$. Der Krümmungsendomorphismus R^{∇^F} läßt sich durch die Krümmungsform Ω^A von A in der folgenden Form ausdrücken

$$[p]^{-1} \circ R^{\nabla^F}(X,Y) \circ [p] = F^A_p(X^*, Y^*) \qquad \text{falls} \ \ p \in P_x,$$

wobei X^* und Y^* die horizontalen Lifte von X bzw. Y bezeichnen. Da nach Voraussetzung $R^{\nabla^F} = 0$ ist, folgt $F^A = 0$. Da außerdem die Basis-Mannigfaltigkeit M einfach-zusammenhängend ist, ist die durch A definierte Parallelverschiebung $\mathcal{P}^A$ in P unabhängig vom Weg (siehe Satz 3.17). Nun gilt aber per Definition für die Parallelverschiebung in F

$$\mathcal{P}^{\nabla^F}_\gamma \circ [p] = [\mathcal{P}^A_\gamma(p)].$$

Somit ist die Parallelverschiebung $\mathcal{P}^{\nabla^F}$ in F unabhängig vom Weg und φ_i ein korrekt definierter Schnitt in F. Die Glattheit des Schnittes folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen von den Anfangsbedingungen. Wir zeigen nun, daß die Schnitte φ parallel sind. Dazu benutzen wir die Beziehung zwischen kovarianter Ableitung und Parallelverschiebung aus Satz 3.11. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla^F_X \varphi_i\Big)(y) &= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{P}^{\nabla^F}_{\gamma(t),y}\left(\varphi_i(\gamma(t))\right)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{P}^{\nabla^F}_{\gamma(t),y}\, \mathcal{P}^{\nabla^F}_{x,\gamma(t)}\left(\varphi_i(x)\right)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\mathcal{P}^{\nabla^F}_{x,y}\left(\varphi_i(x)\right)\Big|_{t=0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_{a,b}$ die Parallelverschiebung längs eines Weges von a nach b bezeichnet. $\square$

Eine Möglichkeit, parallele Schnitte in E zu finden, besteht also darin, ein möglichst großes invariantes flaches Teilbündel F von E zu finden. Eine andere Möglichkeit erhält man durch Betrachtung der Holonomiegruppe.

Sei P ein G-Hauptfaserbündel über einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhangsform $A \in \mathcal{C}(P)$, $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Lieschen Gruppe G und $E = P \times_G V$ das dazu assoziierter Vektorbündel mit der durch A definierten kovarianten Ableitung ∇^E. Dann gilt

Satz 4.9 *Der Raum der parallelen Schnitte in E ist gegeben durch die Menge der Holonomie-invarianten Vektoren in V*

$$\begin{aligned} Par(E, \nabla^E) &\equiv \{v \in V \mid \rho(Hol_u(A))\, v = v\} \\ &= \{v \in V \mid \rho_*(\mathfrak{hol}_u(A))\, v = 0\}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $x = \pi(u)$ und zur Abkürzung $H = Hol_u(A)$. Sei zunächst $v \in V$ mit $\rho(H)v = v$. Dann definieren wir einen Schnitt φ_v in E durch

$$\varphi_v : y \in M \longrightarrow \varphi_v(y) = [\mathcal{P}^A_\gamma(u), v] \in E_x,$$

wobei γ ein Weg in M von x nach y ist. Wir zeigen, daß φ_v unabhängig vom gewählten Weg ist. Sei μ ein weiterer Weg in M von x nach y. Dann ist $\mu^- * \gamma \in \Omega(x)$ und

$$\mathcal{P}^A_{\mu^- * \gamma}(u) = \mathcal{P}^A_{\mu^-}((\mathcal{P}^A_\gamma(u)) = uh$$

für ein $h \in H$. Es folgt $\mathcal{P}^A_\gamma(u) = \mathcal{P}^A_\mu(uh) = \mathcal{P}_\mu(u)h$ und deshalb

$$[\mathcal{P}^A_\gamma(u), v] = [\mathcal{P}^A_\mu(u)h, v] = [\mathcal{P}^A_\mu(u), \rho(h)v] = [\mathcal{P}^A_\mu(u), v].$$

Die Glattheit und Parallelität von φ_v folgt wie im Beweis von Satz 4.8.
Sei nun andererseits $\varphi \in \Gamma(E)$ ein paralleler Schnitt. Entsprechend dem Holonomietheorem (Satz 4.6) reduziert sich (P, A) auf das Holonomiebündel $P^A(u)$. Nach Satz 2.14 gilt

$$E = P \times_G V = P^A(u) \times_H V.$$

Wir können φ also in der Form

$$\varphi(\pi(p)) = [p, \overline{\varphi}(p)] = [q, \overline{\psi}(q)]$$

für Funktionen $\overline{\varphi} \in C^\infty(P, V)^G$ und $\overline{\psi} \in C^\infty(P^A(u), V)^H$ darstellen, wobei $\overline{\varphi}|_{P^A(u)} = \overline{\psi}$. Für die kovariante Ableitung von φ gilt

$$(\nabla^E_X \varphi)(\pi(p)) = [p, d\overline{\varphi}(X^*(p))] = [p, X^*(\overline{\varphi})(p))],$$

wobei X^* der horizontale Lift von X ist (Satz 3.9). Folglich ist φ genau dann parallel, wenn die Funktion $\overline{\varphi}$ konstant entlang horizontaler Kurven in P ist. Also gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\overline{\psi} = \overline{\varphi}|_{P^A(u)} \equiv v$. Aus der Invarianzeigenschaft für $\overline{\psi} \in C^\infty(P^A(u), V)^H$ folgt

$$\overline{\psi}(qh) = v = \rho(h)^{-1}\overline{\psi}(q) = \rho(h^{-1})v \qquad \text{für alle } h \in H$$

Also gilt $\rho(H)v = v$. Aus der Definition von v folgt außerdem, daß $\varphi_v = \varphi$. $\square$

4.4 Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 1. Es sei H eine zusammenhängende Liesche Untergruppe einer Lieschen Gruppe G und G/H ein reduktiver homogener Raum. Weiterhin sei P ein G-Hauptfaserbündel über M und $Q \subset P$ eine H-Reduktion von P. Dann gilt:
Ist $A : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ ein Zusammenhang auf P, so ist

$$\widetilde{A} := pr_{\mathfrak{h}} \circ A\,|_{TQ}\colon\ TQ \longrightarrow \mathfrak{h}$$

ein Zusammenhang auf Q.
Insbesondere gilt: Nimmt die Zusammenhangsform A nur Werte in $\mathfrak{h}$ an, so reduziert sich A auf Q.

Aufgabe 2. Es sei (P, A) ein G-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang und $(Q, \hat{A})$ eine Reduktion von (P, A) auf eine immergierte Liesche Untergruppe von G. ($Q \subset P$ sei dabei als immergierte Untermannigfaltigkeit betrachtet). Dann gilt für das Holonomiebündel $P^A(u)$ von A bzgl. u :

1. $P^A(u) \subset Q$ für alle $u \in Q$.
2. $\hat{A}\,|_{TP^A(u)} = A\,|_{TP^A(u)}$, d.h. $\hat{A}$ reduziert sich auf den durch den Zusammenhang A auf dem Holonomiebündel gegebenen Zusammenhang.

In diesem Sinne ist das Holonomiebündel die kleinst mögliche Reduktion von (P, A).

Aufgabe 3. Es seien $(P, \pi, M; G)$ ein Hauptfaserbündel mit zusammenhängender Strukturgruppe und zusammenhängender Basis und A ein Zusammenhang auf P. Weiterhin sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Dann gilt für die Lie-Algebra der Holonomiegruppe $Hol_u(A)$:

$$\mathfrak{hol}_u(A) \subset \mathfrak{h} \text{ für ein } u \in P \quad \Longleftrightarrow \quad F^A : TP \times TP \longrightarrow \mathfrak{h},$$

wobei F^A die Krümmungsform von A bezeichnet.

Aufgabe 4. Sei (M^n, g) eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Die Gruppen

$$\begin{aligned} Hol_x(M,g) &:= \{\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} \mid \gamma \in \Omega(x)\} \subset O(T_xM, g_x) \\ Hol_x(M,g)_0 &:= \{\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} \mid \gamma \in \Omega_0(x)\} \subset O(T_xM, g_x) \end{aligned}$$

heißen *Holonomiegruppe bzw. reduzierte Holonomiegruppe von* (M, g) *bzgl* $x \in M$. Beweisen Sie:

1. Ist $O(M, g)$ das Bündel der orthonormalen Repere von (M, g), A der Levi-Civita-Zusammenhang auf $O(M, g)$ und u eine orthonormale Basis in T_xM. Dann gilt für die Holonomiegruppen

$$Hol_u(A) = Hol_x(M,g) \quad \text{und} \quad Hol_u(A)_0 = Hol_x(M,g)_0.$$

2. Die Holonomiegruppen $Hol_x(M,g)$ und $Hol_y(M,g)$ für verschiedene Punkte einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sind konjugiert. Die Konjugation ist durch die Parallelverschiebung entlang einer x und y verbindenden Kurve gegeben.

3. Identifiziert man $Hol_x(M,g)$ durch Wahl einer orthonormalen Basis in (T_xM, g_x) mit einer Untergruppe von $O(n)$, so sind alle entstehenden Untergruppen von $O(n)$ zueinander konjugiert. (In diesem Sinne betrachtet man die Holonomiegruppe $Hol(M,g)$ als Klasse konjugierter Untergruppen von $O(n)$ und schreibt kurz auch $Hol(M,g) \subset O(n)$.)

Aufgabe 5. Es sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $O(M,g)$ das Hauptfaserbündel der orthonormalen Repere von (M,g). Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. (M^n, g) ist eine hermitische Mannigfaltigkeit, dh. es existiert eine orthogonale fast-komplexe Struktur J auf (M,g).

2. Die Dimension n der Mannigfaltigkeit M ist gerade ($n = 2m$) und das Bündel $O(M,g)$ reduziert sich auf ein $U(m)$-Hauptfaserbündel Q.

Dabei sei $U(m)$ auf Standardweise als Untergruppe von $O(2m)$ aufgefaßt (vergessen die komplexe Struktur von $\mathbb{C}^m$).

Aufgabe 6. Sei (M^{2m}, g, J) eine hermitische Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Beweisen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. (M,g,J) ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit, dh. $\nabla J = 0$.

2. Der Levi-Civita-Zusammenhang des Bündels $O(M,g)$ der orthonormalen Repere reduziert sich auf die $U(m)$-Reduktion Q aus Aufgabe 5.

3. Für die Holonomiegruppe von (M,g) gilt: $Hol(M,g) \subset U(m)$.

(Benutzen Sie die Aufgaben 1 und 2).

Aufgabe 7. Es sei (M,g,J) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für den Ricci-Tensor von (M,g) gilt: $Ric = 0$.

2. Für die reduzierte Holonomiegruppe von (M,g) gilt: $Hol(M,g)_0 \subset SU(m)$.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 3 und beweisen Sie zunächst, daß für den Krümmungs- und den Ricci-Tensor einer Kähler-Mannigfaltigkeit gilt:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= Ric(JX,JY) \\ Ric(X,Y) &= \frac{1}{2} Trace(J \circ R(X,JY)). \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] R. Sulanke, P. Wintgen: *Differentialgeometrie auf Faserbünden.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry.* Volume I, II. John Wiley and Sons, Inc. 1963, 1969.

[3] G. L. Naber: *Topology, Geometry, and Gauge Fields.* Springer-Verlag, 2000.

[4] D. Husemoller: *Fibre Bundles.* 3. ed., Springer-Verlag, 1994.

[5] N. Steenrood: *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[6] D. Bleeker: *Gauge Theory and Variational Principles.* Addison-Wesley, 1981.

[7] J. Baez, J.P. Muniam: *Gauge Fields, Knots and Gravity.* World Scientific, 1994.