Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 1

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 23.04.2010

Aufgabe 1
Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Clifford-Algebren:

1. Sei $\phi : (V, f) \to (\hat{V}, \hat{f})$ eine Isometrie zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit symmetrischer Bilineraform. Dann läßt sich ϕ auf eindeutige Weise zu einem Isomorphismus der Clifford-Algebren $\mathrm{Cliff}(V, f)$ und $\mathrm{Cliff}(\hat{V}, \hat{f})$ fortsetzen.

2. Sei $(V, f) = (V_1, f_1) \oplus (V_2, f_2)$ die direkte Summe zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume mit symmetrischer Bilinearform. Dann gilt
$$\mathrm{Cliff}(V, f) \simeq \mathrm{Cliff}(V_1, f_1) \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{Cliff}(V_2, f_2),$$
wobei $\widehat{\otimes}$ das $\mathbb{Z}_2$-graduierte Tensorprodukt bezeichnet.

3. Sei (V, f) ein reller Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform. Dann gilt für die Komplexifizierung
$$\mathrm{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, f^{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Cliff}(V, f)^{\mathbb{C}}.$$

6 P

Aufgabe 2
Sei (V, f) ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform f, $\mathrm{Cliff}(V, f)$ die Clifford-Algebra von (V, f) und $\mathrm{Cliff}^0(V, f)$ ihr gerader Teil. Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{Cliff}(V, f)$ und $\mathrm{Cliff}^0(V, f)$, d.h.

$$\begin{aligned} Z(\mathrm{Cliff}(V, f)) &:= \{\, u \in \mathrm{Cliff}(V, f) \ \mid u \cdot a = a \cdot u \ \ \forall\, a \in \mathrm{Cliff}(V, f) \,\} \\ Z(\mathrm{Cliff}^0(V, f)) &:= \{\, u \in \mathrm{Cliff}^0(V, f) \mid u \cdot a = a \cdot u \ \ \forall\, a \in \mathrm{Cliff}^0(V, f) \,\} \end{aligned}$$

4 P

Aufgabe 3
Geben Sie die Clifford-Algebren der Euklidischen Räume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$, sowie der Minkowski-Räume $\mathbb{R}^{1,2}$ und $\mathbb{R}^{1,3}$ in Form von Matrizenalgebren an. **4 P**

Insgesamt: **14 P**