



Übungsblatt 2

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 30.04.2010

Aufgabe 4

Wir identifizieren den Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ mit den hermiteschen (2×2) -Matrizen $\mathcal{H}(2)$ mittels der Abbildung

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{1,3} \mapsto X(x) := \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(2).$$

Die Abbildung $\varphi : \mathcal{H}(2) \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ bezeichne die inverse Abbildung zu X . Zeigen Sie dass die Abbildung

$$\lambda : \begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & SO^0(1, 3) \\ A & \longmapsto & \lambda(A) \end{array},$$

wobei $\lambda(A)x := \varphi(AX(x)\bar{A}^t)$ für $x \in \mathbb{R}^{1,3}$, eine universelle Überlagerung von $SO^0(1, 3)$ ist. 4 P

Aufgabe 5

Für welche Signaturen (p, q) ist die Gruppe $Spin^0(p, q)$ einfach zusammenhängend ? 4 P

Aufgabe 6

Es sei V ein komplexer Vektorraum. Eine *reelle Struktur auf V* ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\tau : V \rightarrow V$ mit $\tau^2 = Id_V$ und $\tau(iv) = -i\tau(v)$. Eine *quaternionische Struktur auf V* ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $q : V \rightarrow V$ mit $q^2 = -Id_V$ und $q(iv) = -iq(v)$.

Auf welchen Spinor-Moduln $\Delta_{p,q}$ existieren reelle bzw. quaternionische Strukturen, die zusätzlich $Spin(p, q)$ -äquivariant sind und mit der Clifford-Multiplikation kommutieren bzw. anti-kommutieren ? 4 P

Insgesamt: **12 P**