Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 3

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 07.05.2010

Aufgabe 7
Es sei $\lambda : Spin(2m) \to SO(2m)$ die universelle Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe, $m > 1$. Wir betrachten die Gruppe $SU(m)$ als Untergruppe von $SO(2m)$. Zeigen Sie, dass es einen Lie-Gruppen-Homomorphismus $\widetilde{\lambda} : SU(m) \to Spin(2m)$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & Spin(2m) \arrow[d, "\lambda"] \\ SU(m) \arrow[ur, "\widetilde{\lambda}"] \arrow[r, "\iota"] & SO(2m) \end{tikzcd}$$

4 P

Aufgabe 8
Der Vektorraum-Isomorphismus $\Lambda^*(\mathbb{R}^{p,q})^* \overset{\langle\,,\rangle_{p,q}}{\simeq} \Lambda^*\mathbb{R}^{p,q} \overset{P}{\simeq} Cl_{p,q}$ definiert eine Multiplikation von k-Formen und Spinoren: Ist σ eine k-Form auf $\mathbb{R}^{p,q}$ und $\varphi \in \Delta_{p,q}$ ein Spinor, so sei

$$\sigma \cdot \varphi := \kappa_{p,q}(P(\sigma))\,\varphi.$$

Wir betrachten den 4-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit seiner positiven Orientierung und die selbst-dualen bzw. die anti-selbstdualen 2-Formen $\Lambda^2_+(\mathbb{R}^4)^*$ bzw. $\Lambda^2_-(\mathbb{R}^4)^*$. Zeigen Sie, dass

$$\Lambda^2_+(\mathbb{R}^4)^* \cdot \Delta_4^- = 0 \qquad \text{und} \qquad \Lambda^2_-(\mathbb{R}^4)^* \cdot \Delta_4^+ = 0.$$

4 P

Aufgabe 9
Wir betrachten den Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,n-1} = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{1,n-1})$ und den Spinormodul $\Delta_{1,n-1}$ mit dem indefiniten $Spin^0(1, n-1)$-invarianten hermiteschen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Delta$ aus der Vorlesung. Für einen Spinor $\varphi \in \Delta_{1,n-1}$ definieren wir den Vektor $x_\varphi \in \mathbb{R}^n$ durch die Bedingung

$$\langle x_\varphi, y\rangle_{1,n-1} = -\langle y \cdot \varphi, \varphi\rangle_\Delta \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Beweisen Sie:

1. Durch (1) ist tatsächlich ein reeller Vektor $x_\varphi \in \mathbb{R}^n$ definiert.
2. Es gilt $x_\varphi = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$.
3. Der Vektor x_φ ist zeitartig oder isotrop, d.h.: $\langle x_\varphi, x_\varphi\rangle_{1,n-1} \leq 0$.
4. x_φ ist genau dann isotrop, wenn $x_\varphi \cdot \varphi = 0$.
5. Ist x_φ isotrop, so gilt $\langle\varphi,\varphi\rangle_\Delta = 0$.

6 P

Insgesamt: **14 P**