



Übungsblatt 4

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 14.05.2010

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass ein linearer Differentialoperator 2. Ordnung $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ genau dann vom Laplace-Typ ist, wenn es eine Metrik g auf der Basis M von E gibt, so dass

$$P(f^2\varphi) + f^2P\varphi - 2fP(f\varphi) = -2g(df, df)\varphi$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ und Schnitte $\varphi \in \Gamma(E)$.

2 P

Aufgabe 11

Sei $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein Operator vom Dirac-Typ und ∇^E die kovariante Ableitung in der Weitzenböckformel von D^2 . Zeigen Sie, dass für alle Vektorfelder X auf der Basis von E und alle Schnitte $\varphi \in \Gamma(E)$ gilt:

$$2\nabla_X^E\varphi = -D(X \cdot \varphi) - X \cdot D\varphi - \operatorname{div}(X)\varphi + d(X^b) \cdot \varphi.$$

4 P

Aufgabe 12

Sei (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten den Operator $A := d + \delta : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$. Zeigen Sie:

1. A ist ein Operator vom Dirac-Typ zur Metrik g .
2. Bestimmen Sie die durch A definierte Clifford-Wirkung c auf dem Bündel der alternierenden Formen $\Lambda^*(T^*M)$.
3. Sei ∇^g die durch den Levi-Civita-Zusammenhang induzierte kovariante Ableitung auf $\Lambda^*(T^*M)$. Zeigen Sie, dass ∇^g ein Clifford-Zusammenhang auf $\Lambda^*(T^*M)$ ist.
4. Zeigen Sie, dass $A = c \circ \nabla^g$.

6 P

Insgesamt: 12 P