



# Übungsblatt 5

## VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 21.05.2010

### Aufgabe 13

Es sei  $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  ein Operator vom Dirac-Typ und  $D^2 = \Delta^{\nabla^E} + H$  die Weitzenböckformel von  $D^2$ . Ist  $V : E \rightarrow E$  ein Bündelhomomorphismus, so ist  $D + V$  ebenfalls vom Dirac-Typ.

Bestimmen Sie das Potential des Operators  $(D + V)^2$ . Diskutieren Sie anhand der allgemeinen Formel insbesondere die Fälle

- a)  $\nabla^E$  ist ein Clifford-Zusammenhang,
- b)  $V$  ist parallel bzgl  $\nabla^E$ , d.h.,  $\nabla_X^E(V) := \nabla_X^E \circ V - V \circ \nabla_X^E = 0$  für alle Vektorfelder  $X$ .

**6 P**

### Aufgabe 14

Sei  $E$  ein Cliffordmodul-Bündel über einer  $n$ -dimensionalen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine Bündelmetrik und  $\nabla^E$  ein metrischer Clifford-Zusammenhang auf  $E$ . Die Clifford-Wirkung  $c$  sei symmetrisch bzw. schiefssymmetrisch. Für jeden Schnitt  $\varphi \in \Gamma(E)$  definieren wir ein Vektorfeld  $X_\varphi$  auf  $M$  durch

$$g(X_\varphi, Y) := \begin{cases} i \langle Y \cdot \varphi, \varphi \rangle & \text{falls } c \text{ schiefssymmetrisch,} \\ -\langle Y \cdot \varphi, \varphi \rangle & \text{falls } c \text{ symmetrisch.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld  $X_\varphi$  für einen Schnitt  $\varphi$  im Kern des Dirac-Operators  $D := c \circ \nabla^E$  divergenzfrei ist, d.h.,

$$D\varphi = 0 \implies \operatorname{div}(X_\varphi) = 0.$$

**4 P**

### Aufgabe 15

Wir betrachten das Bündel  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla^E)$  aus Aufgabe 14. Außer dem Dirac-Operator  $D := c \circ \nabla^E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  betrachten wir den Operator

$$P := \operatorname{proj}_{\operatorname{Ker} c} \circ \nabla^E : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Ker} c),$$

wobei  $\operatorname{proj}_{\operatorname{Ker} c}$  die orthogonale Projektion auf den Kern der Clifford-Wirkung  $c : T^*M \otimes E \rightarrow E$  bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:
  - a)  $P\varphi = 0$ .
  - b) Für alle Vektorfelder  $X$  auf  $M$  gilt:  $\nabla_X^E \varphi = -\frac{1}{n} X \cdot D\varphi$ .
  - c) Für alle Vektorfelder  $Y, Z$  auf  $M$  gilt:  $Y \cdot \nabla_Z^E \varphi + Z \cdot \nabla_Y^E \varphi = +\frac{2}{n} g(Y, Z) D\varphi$ .
2. Zeigen Sie: Liegt der Schnitt  $\varphi$  im Kern des Operators  $P$ , so ist  $X_\varphi$  ein konformes Vektorfeld.

**6 P**

Insgesamt: **16 P**