Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 04.06.2010

In den folgenden drei Aufgaben betrachten wir ein positiv-definites Cliffordbündel $(E, \langle\ ,\ \rangle, \nabla^E)$ über einer *kompakten* Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und den dazu gehörigen Dirac-Operator $D := c \circ \nabla^E$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen unter Benutzung des Regularitätssatzes für elliptische Operatoren (Satz 2.22 der Vorlesung).

Aufgabe 16
Zeigen Sie für den Sobolevraum $H^1(E)$ und die stetige Fortsetzung des Dirac-Operators auf $H^1(E)$:

$$\begin{aligned} H^1(E) &= \mathrm{dom}(\bar{D}) \subset L^2(E) \\ D_1 &= \bar{D} \end{aligned}$$

4 P

Aufgabe 17
Zeigen Sie, dass die Kerne der folgenden Operatoren in $L^2(E)$ übereinstimmen:

$$\mathrm{Ker}\bar{D} = \mathrm{Ker}\bar{D}^2 = \mathrm{Ker}D = \mathrm{Ker}D^2.$$

4 P

Aufgabe 18
Für das Spektrum von $\bar{D}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{D}) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{ Es ex. Folge } (x_n) \subset \Gamma(E) \text{ mit } \|x_n\| = 1 \text{ und } Dx_n - \lambda x_n \to 0 \text{ in } L_2(E)\}, \\ \sigma_c(\bar{D}) &= \emptyset, \\ \sigma_{ess}(\bar{D}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Es gilt also $\sigma(\bar{D}) = \sigma_{disc}(\bar{D})$.

4 P

Insgesamt: **12 P**