Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 18.06.2010

Das Ziel dieses Zettels ist es, das Spektrum des Dirac-Operators auf dem flachen Torus für jede seiner Spin-Strukturen zu bestimmen.
Sei $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n})$ der Euklidische Raum, $(a_1, \dots, a_n)$ eine fixierte Basis des $\mathbb{R}^n$,

$$\Gamma := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} m_j a_j \mid m_j \in \mathbb{Z} \Big\}$$

das von dieser Basis aufgespannte Gitter im $\mathbb{R}^n$, sowie

$$\Gamma^* := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, \gamma\rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{Z} \;\text{ für alle } \gamma \in \Gamma \Big\}$$

das duale Gitter. Γ wirkt eigentlich diskontinuierlich und isometrisch auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\gamma, x) & \longmapsto & x + \gamma. \end{array}$$

Wir betrachten den Torus $T^n_\Gamma := \mathbb{R}^n/\Gamma$ mit der durch die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ induzierten Riemannschen Metrik. $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n_\Gamma$ sei die kanonische Projektion.

Zeigen Sie:

1. Sei $\Delta_0 : C^\infty(T^n_\Gamma, \mathbb{C}) \to C^\infty(T^n_\Gamma, \mathbb{C})$ der Laplace-Operator auf den komplexwertigen Funktionen:
$$\Delta_0 f = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad} f.$$
Dann besteht das Spektrum von Δ_0 nur aus Eigenwerten und es gilt
$$\mathrm{spec}(\Delta_0, T^n_\Gamma) = \{4\pi^2 \|y\|^2 \mid y \in \Gamma^*\}.$$
Die Dimension der Eigenraumes $E_\lambda(\Delta_0, T^n_\Gamma)$ zum Eigenwert $4\pi^2\|y\|^2$ ist gegeben durch
$$\mathrm{dim} E_\lambda(\Delta_0, T^n_\Gamma) = \mathrm{card}\{\tilde{y} \in \Gamma^* \mid \|y\| = \|\tilde{y}\|\}.$$

2. Sei $P = T^n_\Gamma \times SO(n)$ das Reperbündel von T^n_Γ. Die Spin-Strukturen von T^n_Γ kann man durch Tupel
$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n),\ \delta_j \in \{0,1\},$$
beschreiben. Für ein solches Tupel δ sei $\chi_\delta : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ der Homomorphismus
$$\chi_\delta\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j a_j\Big) := (-1)^{\sum_j m_j \delta_j}.$$
Dann ist die zu δ gehörende Spin-Struktur (Q_δ, f_δ) gegeben durch
$$Q_\delta := \mathbb{R}^n \times_{\chi_\delta} Spin(n)$$

mit der Äquivalenzrelation $(x,a) \sim (x+\gamma, \chi_\delta(\gamma)a)$, und

$$f_\delta[x,a] = (\pi(x), \lambda(a)) \in P.$$

Das Tupel $\delta = (0,\dots,0)$ entspricht offensichtlich der trivialen Spin-Struktur.

3. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \epsilon_\delta : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \sum_j r_j a_j & \longmapsto & e^{\pi i \sum_j r_j \delta_j}. \end{array}$$

Sei S_0 das triviale Spinorbündel und S_δ das zur Spin-Struktur (Q_δ, f_δ) gehörende Spinorbündel. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S_0 \simeq T^n_\Gamma \times \Delta_n & \longrightarrow & S_\delta \simeq \mathbb{R}^n \times_{\chi_\delta} \Delta_n \\ (z,v) & \longmapsto & [x, \epsilon_\delta(x)v] \quad \text{mit } \pi(x) = z \end{array}$$

ein Isomorphismus der Spinorbündel.

4. Wir identifizieren S_0 mit S_δ und betrachten den Dirac-Operator D_0 zur trivialen Spin-Struktur sowie den Dirac-Operator D_δ zur durch δ gegebenen Spin-Struktur als Operatoren auf den glatten Funktionen $C^\infty(T_\Gamma, \Delta_n)$. Dann gilt

$$D_\delta = D_0 + \pi i \sum_j \delta_j a_j^* \bullet,$$

wobei $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ die zu $(a_1,\dots,a_n)$ 'duale' Basis ist, d.h.

$$\langle a_j^*, a_l \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{jl}.$$

5. Das Spektrum von D_δ besteht nur aus Eigenwerten und es gilt:

$$\operatorname{spec}(D_\delta, T^n_\delta) = \Big\{ \pm 2\pi \Big\| y + \frac{1}{2} \sum_j \delta_j a_j^* \Big\| \mid y \in \Gamma^* \Big\}.$$

Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert $\pm 2\pi \|y + \frac{1}{2}\sum_j \delta_j a_j^*\|$ ist jeweils

$$2^{[n/2]-1} \operatorname{card} \{\tilde{y} \in \Gamma^* \mid \|y\| = \|\tilde{y}\|\}.$$

Insgesamt: **20 P**