Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 9

VL Dirac-Operatoren und Spin-Geometrie - SS 2010

Abgabe 25.06.2010

Aufgabe 22
Sei (M^n, g) eine n-dimensionale semi-Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit fixierter Spin-Struktur und S ihr Spinorbündel. Wir betrachten den Twistor-Operator P_g auf dem Spinorbündel, d.h. den Operator

$$P_g := \mathrm{proj}_{\mathrm{Ker}\, c} \circ \nabla^S : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes S),$$

wobei $\mathrm{proj}_{\mathrm{Ker}\, c}$ die orthogonale Projektion auf den Kern der Clifford-Wirkung $c : T^*M \otimes S \to S$ bezeichnet. Zeigen Sie:

1. P_g hat folgende lokale Form (siehe Aufgabe 15):

$$P_g\, \varphi = \sum_{j=1}^{n} \sigma^j \otimes \big(\nabla^S_{s_j} + \frac{1}{n} s_j \bullet D\big)\varphi,$$

   wobei $(s_1, \ldots, s_n)$ eine lokale ON-Basis und $(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ die dazu duale Basis ist.

2. P_g ist ein konform-kovarianter Operator vom Bigrad $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, d.h. für alle Metriken g und alle positiven Funktionen λ gilt bei kanonischer Identifizierung der Spinorbündel zu konform-äquivalenten Metriken

$$P_{\lambda^2 g} = \lambda^{-\frac{1}{2}}\, P_g\, \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

4 P

Aufgabe 23 (*Cahen-Wallach-Räume*)
Sei $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ein n-Tupel von Null verschiedener reeller Zahlen. Wir betrachten die Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^{n+2}, g_c)$, wobei g_c die Metrik

$$(g_c)_{(t,s,x)} = 2dtds + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 ds^2 + \sum_{j=1}^{n} dx_j^2$$

bezeichnet. Zeigen Sie:

1. $M_c := (\mathbb{R}^{n+2}, g_c)$ ist ein Lorentz-symmetrischer Raum.
2. Bestimmen Sie den Ricci-Tensor von M_c.
3. Bestimmen Sie alle parallelen Spinoren von M_c.
4. Für welche Parameter c ist M_c konform flach ?

16 P

Insgesamt: **20 P**