ATT SKRIVA EN MATEMATISK TEXT

OLOF BERGVALL

Innehåll

1. Introduktion 1
2. Uppbyggnad 2
3. Ordval och språk 3
4. Symboler och formler 4

Denna text är tänkt att vara en introduktion till hur man presenterar matematik i text. Den är absolut inte tänkt att vara uttömmande och det är nästan ofrånkomligt att den på många håll snarare reflekterar mina personliga åsikter än allmänna sanningar. Jag hoppas dock att denna text kan ge vissa ledtrådar kring hur man presenterar matematik på ett bra sätt. Vissa delar av texten är inspirerade av Steven Kleimans artikel "Writing a Math Phase Two Paper", publicerad i *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1992, vol. 1, p. 195-206.

1. Introduktion

Det är egentligen inte så stor skillnad på att skriva matematiska texter och att skriva mer vardagligt. Orden stavas fortfarande likadant, man böjer dem på samma sätt som annars och meningar avslutas fortfarande med punkt. Detta kan tyckas självklart, men många verkar faktiskt tro att man använder språket på något nytt och konstigt sätt bara för att man skriver om matematik och detta leder ofta till att man upplever matematiken som mycket svårare och krångligare än den behöver vara. Det finns dock två sätt som matematiska texter skiljer sig från sina mer vardagliga motsvarigheter:

(1) Man måste vara mycket mer försiktig med ordvalen i en matematisk text. Många ord har väldigt precis mening inom matematiken och använder man dem på fel sätt uppstår lätt missförstånd.
(2) I matematiska texter vill man ofta använda sig av symboler, vilket ju inte är så vanligt i mer vardagliga texter.

Vi kommer att återvända till dessa punkter lite senare.

2. Uppbyggnad

Börja från början, sade kungen allvarligt, *och fortsätt därefter tills du når slutet; sluta sedan.* (Lewis Carroll, "Alice i underlandet").

Precis som när man skriver vilken text som helst är det viktigt att tänka igenom vad man vill presentera i sin text. Vet man inte detta kommer man att ha mycket svårt att ens få ned något vettigt på papper och om man, mot förmodan, skulle lyckas med det är det inte så troligt att en läsare kommer att förstå vad man skrivit.

När man väl kommit fram till vad man vill tala om för sin läsare måste man reda ut vad som är början och vad som är slutet. I matematiska texter ska man ofta beskriva hur man har löst ett problem och då är det naturligt att börja med att förklara vilket problem man arbetat med. Slutet är, förhoppningsvis, någon form av lösning av problemet. Mellan dessa två punkter presenterar man sin tankegång och sina argument. Det är ofta i detta som den största svårigheten ligger.

Det blir ibland lite lättare om man har sin tänkta läsare klar för sig. Många som är lite ovana att skriva matematiska texter brukar, medvetet eller omedvetet, antingen välja sin läsare till ett allvetande orakel eller en person som aldrig har sett ett plustecken förut. Båda varianterna gör texten mer eller mindre oläsbar, i det första fallet för att läsaren förväntas ta intellektuella sjumilakliv och i det senare fallet för att detaljnivån är så outhärdligt hög att man aldrig kommer någonstans. Den gyllene medelvägen är, som oftast, det bästa alternativet. Har man inte en klar publik för sig är det oftast bäst att tänka sig en läsare på ungefär samma matematiska nivå som en själv. Ska man lösa ett problem där ett av stegen är att lösa en andragradsekvation bör man fråga sig: "Är min läsare van vid att lösa andragradsekvationer?". Om svaret är ja kan man sedan skriva något i stil med "Vi löser nu denna ekvation med hjälp av kvadratkomplettering och får då att $x = \ldots$". Är svaret nej får man istället visa läsaren hur man kvadratkompletterar.

Nu har vi kommit fram till vad som är början, vad som är slutet och vilka steg vi vill presentera emellan. Det är nu "bara" att presentera dem i kronologisk ordning. Ofta är det bra att ha ett eget stycke för varje steg så att det blir extra tydligt för läsaren när man börjar med något nytt, men ibland är stegen så korta att texten blir väldigt fult styckindelad om man väljer att göra på detta sätt. Man kan då baka ihop flera kortare steg eller ett kort med ett lite längre, men man måste i sådana fall tänka på att vara lite extra tydlig språkligt med att det är två olika steg.

3. Ordval och språk

De två viktigaste aspekterna att ha i åtanke vid ordval när man skriver en text som någon annan ska förstå är klarhet och precision, och detta gäller kanske mer än någonsin när man presenterar matematik. När man skriver vardagligare texter väljer man ofta en "precisionsnivå" som är en kompromiss mellan hur viktigt det är att läsaren förstår exakt vad man menar och hur lättläst texten ska bli. Samma sak gäller när man skriver matematiska texter, men här väger ofta exaktheten väldigt tungt. Detta betyder absolut inte att man ska acceptera att ens text blir ogenomträngligt svårläst utan snarare att man måste vara lite klurigare rent språkligt och använda andra trick för att göra texten läsbar. Detta är otroligt viktigt: om texten består av långa och konstigt uppbyggda meningar med massor av konstiga ord och märkliga analogier kommer din läsare att haka upp sig ofta och, så småningom, tröttna och sluta läsa. Å andra sidan, en flytande text med lagom långa och smart uppbyggda meningar och bra ordval, klokt valda analogier och lagom svåra exempel kan få din läsare att förstå hur du tänkt när du löst ditt problem. För att uppnå det senare scenariot krävs ofta att man skriver och skriver om, både en och flera gånger.

Att vara precis innebär två saker. Till att börja med måste man använda ord med rätt innebörd. Detta är dock lite svårare än man kan tro. För att göra saker värre måste man ibland välja bland synonymer, och det val man gör har ofta konsekvenser. Dels har läsaren ofta lagt till olika värdering vid synonymerna. Till exempel betyder orden "tillräcklig" och "adekvat" i stort sett samma sak men har lite olika klang. Dels används synonymer ofta för att variera en text och göra den mindre enformig. Detta är lite farligt om det är väldigt viktigt att vara precis eftersom det är ganska sällsynt med "exakta synonymer". Att vara precis innebär också att ge tillräckliga, specifika och konkreta detaljer i varje situation. Här är det viktigt att tänka på att ge rätt detaljer snarare än alla detaljer. Om man ger fel detaljer (eller rätt detaljer, men vid fel tillfälle) kommer läsaren att bli förvirrad. Ger man för många detaljer blir texten tråkig och svår att följa. Om man trots allt är tvungen att lista en rad detaljer är det ofta klokt att följa upp denna lista med ett enkelt exempel som illustration.

En klar och tydlig text är en text utan tvetydigheter. Ofta kan läsaren reda ut tvetydigheter från sammanhanget, men varje tvetydighet stoppar läsningens flöde och skapar onödig irritation. Ett första steg är att undvika syftningsfel. Ett klassiskt exempel är det om den skrytande jägaren: *Idag sköt jag en hare med gevär på hundra meter!* Som meningen står skriven har jägaren skjutit en hare med ett väldigt långt gevär, men man kan ju också välja att tolka meningen som att haren var väldigt lång eller helt enkelt befann sig väldigt långt bort. Ett mer vardagligt exempel är instruktionen

Samtliga säkerhetsbrytare får ej stängas av. Meningen säger oss nu att vi inte får stänga av alla säkerhetsbrytare samtidigt, men personen som skrev meningen menade antagligen att man inte får stänga av en enda säkerhetsbrytare. Ett sätt att bli av syftningsfel och tvetydigheter är att använda punktuation på ett bra sätt. Tyvärr måste man nog i detta sammanhang påpeka att eftersom syftningsfel är så vanligt förekommande att det ibland inte spelar så stor roll om man syftar rätt eller inte då läsaren ändå kommer att välja den "troligaste" tolkningen. Man får helt enkelt se till att skriva det man menar och förtydliga om det finns risk för felaktiga tolkningar.

Två problem som ofta förekommer i matematiska texter är att man ofta använder svåra ord utan att förklara dem tillräckligt och att vanliga ord används på ovanliga sätt. Exempelvis spelar det ingen roll hur precis och klar min text är om jag inte förklarar vad ordet "ortogonal" betyder när jag vill använda det (om jag inte med gott samvete kan anta att min läsare är en person som vet vad "ortogonal" betyder). På samma sätt kan jag inte utan vidare använda den matematiska termen "slät" trots att det är ett ord som finns i de flestas ordförråd. Här är det återigen viktigt att identifiera sin läsare. Om man inte förklarar orden man använder tillräckligt kommer läsaren inte att förstå, men förklarar man för många ord blir texten lång och svårtläst och man riskerar att läsaren känner sig dumförklarad.

Ett annat problem som du säkert stött på är att många texter är onödigt tillkrånglade och gammalmodiga. Ibland blir man tvungen att använda lite krånglig meningsuppbyggnad för att uppnå önskad precision och klarhet, men ofta kan man hitta på lite smartare formuleringar som undviker detta. Man ska alltid eftersträva en så lättförstådd och lättläst text som möjligt! Man bör också försöka vara så kortfattad som möjligt, så länge man inte måste göra avkall på precision och klarhet.

4. Symboler och formler

Eftersom matematiska texter ofta innehåller många abstrakta symboler och en hel del formella argument uppstår vissa problem som man inte stöter på när man skriver till vardags. Denna sektion innehåller lite tips om hur man undviker att begå några av de vanligaste misstagen.

Jämfört med löpande text är formler ofta relativt svåra att förstå eftersom de kräver att läsaren tar en paus och ordentligt går igenom vad varje term betyder. Detta innebär inte att man inte ska använda formler eftersom alternativet är ofta betydligt värre (försök att beskriva lösningen av en andragradsekvation utan att använda formler så förstår du vad jag menar). Det innebär däremot att man inte bara kan lista en lång radda formler utan att tala om varför man ställer upp dem. Istället bör man lägga till kommentarer där de behövs (och de behövs ofta!), se till att förklara varför man

gör som man gör och helst förklara för läsaren vad det slutgiltiga målet är. Om du introducerar nya termer eller gör variabelbyten måste du förklara varför. Du måste också förklara vilka antaganden du gör på vägen (delar du med x antar du antagligen att x inte är noll) och du bör motivera alla påståenden.

Små, korta formler som bara är mellansteg på vägen kan man ofta ha inbakade i den löpande texten utan att läsbarheten blir allt för lidande. Viktiga eller långa formler bör däremot få en egen rad. Man bör även undvika radbrytning i formler, så långt det är möjligt. Det är väldigt vanligt bland nybörjare att glömma bort att de vanliga relgerna kring punktuation även gäller när meningarna innehåller formler: om en mening slutar med en formel ska man sätta en punkt där formeln tar slut, även om formeln står på en egen rad. För att undvika förvirring och förbättra läsbarheten ska man undvika att börja en mening med en formel och man får ALDRIG avsluta en mening med en formel för att påbörja nästa mening med en ny formel.

Slutligen, den viktigaste och mest chockerande poängen av dem alla: man bör (ofta) undvika symboler, formler och beräkningar när så är möjligt! Många tror att matematik handlar om formler och uträkningar men i själva verket handlar det om att argumentera utifrån givna regler. Formler och beräkningar är bara ett sätt att uttrycka vissa argument. Många gånger kan man emellertid på ett enkelt sätt uttrycka samma sak med ord och det blir då ofta mycket mer klart och konceptuellt och läsaren kommer ofta att ha lättare att förstå dig. När jag själv började skriva matematiska texter valde jag att strunta i detta av två anledningar. Den första är att jag var lat: det är ofta konsist att bara stapla en massa symboler på varandra och därmed lasta över en massa arbete på läsaren. Den andra är att när man börjar studera matematik stöter man på en massa nya symboler som man gärna vill använda själv. Dock måste man komma ihåg att det är en sak att skriva på en svart tavla under en föreläsning och en annan att presentera matematik i en text och att man inte kan använda samma sätt att uttrycka sig vid båda tillfällena. Här kommer några exempel som illustration:

1. En text blir lätt svårläst om man inte har ord mellan olika formler. På föreläsningar måste man dock vara mer sparsam med vad man skriver.

   Föreläsning: Betrakta $x^n, n = 1, \ldots, 5$.

   Text: Betrakta x^n för $n = 1, \ldots, 5$.

2. Använd inte symboler såsom $\exists$, $\forall$, $\wedge$, $\Rightarrow$ och $\in$ i löpande text.

   Föreläsning: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, r \in \mathbb{R} |\ nr < 1 < (n+1)r$.

   Text: För varje positivt heltal n finns ett reellt tal r sådant att nr är mindre än 1, men $(n+1)r$ är större än 1.

3. Börja inte en mening med en symbol.

   Föreläsning: $ax^2 + bx + c$ har reella nollställen om $b^2 - 4ac \geq 0$.

   Text: Det kvadratiska polynomet $ax^2 + bx + c$ har reella nollställen om $b^2 - 4ac \geq 0$.

4. Gör inte för mycket på samma gång.

   Föreläsning: Om $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, så är rötterna reella.

   Text: Definiera $\Delta = b^2 - 4ac$. Om $\Delta \geq 0$ så är rötterna reella.

Det finns ytterligare två, liknande misstag som dock inte blir förlåtna bara för att man står vid en svart tavla. För det första måste man vara konsekvent med sin notation. Om man introducerar variabeln x_i på ett ställe kan den inte utan vidare byta namn till x_k en bit längre ned. För det andra bör man inte ha krångligare notation än nödvändigt. Om man klarar sig med variabeln x, varför ska man kalla den x_i? Det enda i:et tillför är extra arbete för författaren och större risk att läsaren blir förvirrad.