Aufgabe 3.1

$\mathcal{R}_n$ muss gezeigt werden, dass

- $\emptyset \in \mathcal{R}_n$
- $A, B \in \mathcal{R}_n \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}_n \ni A \setminus B$

gilt, mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{q} Q_i \quad \text{mit disjunkten Quadern } Q_i \qquad \text{und} \quad B = \bigcup_{i=1}^{p} P_i \quad \text{mit disjunkten Quadern } P_i$$

.

- Es gilt offensichtlich $\emptyset \in \mathcal{R}_n$, da man $\emptyset$ als Vereinigung von leeren Quadern auffassen kann.
- $A \cap B \in \mathcal{R}_n$. Betrachte$N_{ij} := Q_i \cap \mathcal{P}_j \in \mathcal{R}_n$, mit $A \cap B = \bigcup_i \bigcup_j N_{ij}$, man schneide also jeden einzelnen, disjunkten Quader der Figuren A und B miteinander und vereinige alle so entstehenden Quader. Da die Quader Q_i bzw. P_j alle paarweise disjunkt sind, ist auch $N_{ij} \neq N_{kl}$ für $(i,j) \neq (k,l) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}_n$.
- $A \setminus B \in \mathcal{R}_n$. Sei C ein halboffener Quader mit $A, B \subset C$. Aus $C \setminus P_j \in \mathcal{R}_n$ (man kann die entstehende Menge als Vereinigung von disjunkten Quadern darstellen), folgt: $C \setminus B = C \setminus \bigcup_j P_j = \bigcap_j (C \setminus P_j) \in \mathcal{R}_n$, wie oben gezeigt wurde. Damit gilt wiederum: $A \setminus B = A \cap (C \setminus B) \in \mathcal{R}_n$.

$$\Longrightarrow A \cup B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{R}_n} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{R}_n} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}_n}$$

und da die einzelnen Mengen alle disjunkt sind, ist $A \cup B \in \mathcal{R}_n$, also ist $\mathcal{R}_n$ ein Ring. Nun ist zu zeigen, dass λ_n ein σ-endlicher σ-Inhalt auf $\mathcal{R}_n$ ist.

- Nach Definition ist $\lambda_n(\emptyset) = 0$, und für $A, B \in \mathcal{R}_n$ mit A, B disjunkt und wie oben ist λ_n auch additiv, da

$$\lambda_n(A \cup B) = \lambda_n(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j \cup \bigcup_{j=m+1}^{k} Q_j) = \lambda_n(\bigcup_{j=1}^{k} Q_j) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}(Q_j) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol} Q_j + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{vol} Q_j = \lambda_n(A) + \lambda_n(B).$$

Damit λ_n σ–endlich auf $\mathcal{R}_n$ ist, muss eine abzählbare Überdeckung des gesamten Raumes gefunden werden, deren einzelne Elemente alle endliches Maß haben. Wähle dazu den Einheitsquader im $\mathbb{R}^n$ und erzeuge durch Translation eine abzählbare Überdeckung (Die Translationen v sind aus $\mathbb{Z}^n$ und damit abzählbar viele). In Aufgabe 3.2 wird gezeigt, dass das Lebesgue–Maß translationsinvariant ist. Damit hat jeder einzelne Quader der Überdeckung das Maß 1. Also ist λ_n σ–endlich auf $\mathcal{R}_n$.

Aufgabe 3.2

a) Laut Definition gilt für abgeschlossene (und damit Borel–)Mengen F_i und eine beliebige Nullmenge N, dass

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff A = \underbrace{\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)}_{\mathcal{F}} \cup N$$

Für die lineare Abbildung $T(A) = v + A = \{v + x | x \in A\}$ gilt der Satz 47.4, nachdem $T(N) = v + N$ eine Nullmenge ist. Da λ_n ein Inhalt ist, gilt für disjunkte Mengen A, B, dass $\lambda_n(A \cup B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.

Ist die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \ni A = \mathcal{F} \cup N$ messbar, so gilt für alle $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\lambda_n(E) = \lambda_n($$

Sei also $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F} \cup N$ wie oben. Sollte $N \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, dann wähle $N' = N \setminus \mathcal{F} \subset N$, was damit immer noch eine Nullmenge ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda_n(v + A) &= \lambda_n(v + (\mathcal{F} \cup N)) = \lambda_n((v + \mathcal{F}) \cup (v + N)) \\ &\overset{\text{Inhalt}}{=} \lambda_n(v + \mathcal{F}) + \lambda_n(v + N) \overset{47.4}{=} \lambda_n(v + \mathcal{F}) \\ &\overset{(*)}{=} \lambda_n(\mathcal{F}) \overset{\text{Nullmenge}}{=} \lambda_n(\mathcal{F}) + \lambda_n(N) \overset{\text{Inhalt}}{=} \lambda_n(\mathcal{F} \cup N) \\ &= \lambda_n(A)\end{aligned}$$

wobei $(*)$ also die gesuchte Eigenschaft für Borelmengen ist, die bereits in der Übung gezeigt wurde.

b) Das Ziel ist zunächst, das Maß eines Quaders $\bigotimes_{k=1}^n [0, \frac{1}{q_k})$ mit $q_k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen.

$$(*)[0,1) = \bigcup_{i=0}^{q_k-1} Q_i^{(k)} \quad \text{mit} \quad Q_i^{(k)} = [\tfrac{i}{q_k}, \tfrac{i+1}{q_k}) \quad \text{und damit} \quad Q_i^{(k)} = \{\tfrac{i}{q_k} + [0, \tfrac{1}{q_k})\}$$

Damit gilt für den gesamten Einheitsquader

$$[0,1)^n = \bigcup_{i=0}^{q_1-1} Q_i^{(1)} \times \ldots \times \bigcup_{i=0}^{q_k-1} Q_i^{(k)} \times \ldots \times \bigcup_{i=0}^{q_n-1} Q_i^{(n)} = \bigcup_{k,i} \bigotimes_{k,i} Q_i^{(k)} \quad \text{mit} \quad 0 \le i \le q_k - 1 \quad \text{und} \quad 1 \le k \le n$$

das sind $\nu = \prod_{k=1}^n q_k$ Vereinigungen von jeweils n Kreuzprodukten. Es gilt daher

$$\alpha = \mu([0,1)^n) = \mu\left(\bigcup_{k,i} \bigotimes_{k,i} Q_i^{(k)}\right) = \sum_{k,i} \underbrace{\mu\left(\bigotimes_{k,i} Q_i^{(k)}\right)}_{\nu \text{ Summanden}} \overset{(*)}{=} \prod_{k=1}^n q_k \mu(\bigotimes_k Q_0^{(k)}) \iff \frac{\alpha}{\nu} = \mu(\bigotimes_k Q_0^{(k)}).$$

Das entspricht dem natürlichen Quadermaß, denn

$$\lambda_n(\bigotimes_k Q_0^{(k)}) = \prod_k \frac{1}{q_k} = \nu = \mu(\bigotimes_k Q_0^{(k)})/\alpha$$

Durch die Translationsinvarianz(TI) kann ein beliebiger Quader mit rationalen Eckpunkten gemessen werden. Es gilt mit $p_k, q_k, t_k, s_k \in \mathbb{N} \forall k$ und $\frac{s_k}{t_k} > \frac{p_k}{q_k}$

$$\mu(\bigotimes_k [\frac{p_k}{q_k}, \frac{s_k}{t_k})) = \mu(\frac{p}{q} + \bigotimes_k [0, \frac{s_k}{t_k} - \frac{p_k}{q_k})) \overset{\text{TI}}{=} \mu(\bigotimes_k [0, \frac{s_k q_k - p_k t_k}{t_k q_k})) \overset{\text{Add.}}{=} \prod_k (s_k q_k - p_k t_k) \mu(\bigotimes_k [0, \frac{1}{t_k q_k}))$$

Das entspricht ebenfalls genau dem allgemeinen Quadermaß und damit ist für rationale Eckpunkte die Beziehung $\mu(Q) = \alpha\lambda_n(Q)$ bereits gezeigt.

Reelle Quader sind leicht durch Erweiterung der rationalen Quader zu bekommen. Zu jedem reellen Quader lässt sich rationaler Quader finden, der nur um eine Nullmenge abweicht, da jede der Intervallgrenzen (wegen $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$) beliebig gut durch rationale Grenzen angenähert werden kann. (Unterhalbstetigkeit)

Auf Figuren, also Vereinigungen disjunkter Quader lässt sich das ebenso leicht erweitern. Das Maß der disjunkten Vereinigungen kann durch Maßeigenschaften aufgeteilt werden in eine Summe, das Verhältnis $\mu = \alpha\lambda_n$ bleibt damit auch erhalten.

Aufgabe 3.3

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist E_{ij}^{α} sicher eine lineare Abbildung mit Determinante $\neq 0$. Nach Satz 47.5(ii), der ausführlich in der Vorlesung bewiesen wurde, ist damit $\lambda_n(E_{ij}^{\alpha} \cdot A) = |\det E_{ij}^{\alpha}|\lambda_n(A)$. Da E_{ij}^{α} eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist (je nachdem, ob $i < j$ oder umgekehrt). Damit ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also 1. Also ist die Aussage gezeigt.

b) Sind alle Einträge von D ungleich null, so wieder mit Satz 47.5(ii) aus der Vorlesung die gesuchte Aussage hergeleitet werden. Ist mindestens einer der Einträge 0, so werden alle Elemente aus A an einer Stelle 0 gesetzt. Daher kann bei der Überdeckung, die für das Lebesgue–Maß gebraucht wird, in dieser Richtung die Quaderlänge gegen 0 laufen lassen zeige so, dass das Maß 0 ist.

   Daher ist $\lambda_n(D \cdot A) = 0 = |\det D|$.

c)

Aufgabe 3.4

a) Eine Hyperebene ist ein $n-1$ dimensionaler affiner Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$. Daher gibt es eine orthonormale Basis $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ aus $n-1$ linear unabhängigen, normierten und paarweise orthogonalen Vektoren. Diese bilden den Einheitsquader und können durch Translation leicht eine abzählbare Überdeckung der gesamten Hyperebene bilden.

Da auch der $\mathbb{R}^n$ eine orthonormale Basis hat, existiert ein weiterer Vektor b_n, der zu allen anderen orthogonal ist, damit den Einheitsquader im $\mathbb{R}^n$ aufspannt. Es gilt mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ dem entsprechenden Translationsvektor

$$
\begin{aligned}
U &\subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{v_i + [0, |b_1|) \times \ldots \times [0, |b_{n-1}|) \times [0, \varepsilon|b_{n-1}|)\} \\
\overset{\text{Monot.}}{\Longrightarrow} \lambda_n(U) &\leq \lambda_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{v_i + [0, |b_1|) \times \ldots \times [0, |b_{n-1}|) \times [0, \varepsilon|b_{n-1}|)\}\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n\left(\{v_i + [0, |b_1|) \times \ldots \times [0, |b_{n-1}|) \times [0, \varepsilon|b_{n-1}|)\}\right) \\
&\overset{3.2}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n\left(\{[0, |b_1|) \times \ldots \times [0, |b_{n-1}|) \times [0, \varepsilon|b_{n-1}|)\}\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

b) Wäre nun $\overline{B} \subsetneq \overline{A}$, so müsste ein $x \in \overline{A} \backslash \overline{B}$ existieren und eine offene Kugel mit Radius ρ darum, mit $K_\rho(x) \cap \overline{B} = \emptyset$ und $K \subset A$. Damit gilt wegen Additivität des Maßes:

$$
\lambda_n(B) + \lambda_n(K) = \lambda_n(K \cup B) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \lambda_n(A)
$$

Da K aber keine Nullmenge ist, gilt daher $\lambda_n(B) < \lambda_n(A)$, womit ein Widerspruch zu den Voraussetzungen erzeugt wurde.