Aufgabe 4.1

a) Nach Korollar 48.8 sind $|f| = h \circ f$, h die Normfunktion und $f^2 = h \circ f$, h als Quadratfunktion messbare Funktionen, da sie Kompositionen von einer messbaren mit einer stetigen Funktion sind. Mit Hilfe der *Apollonius-Identität*

$$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

ist dann auch $f \cdot g$ eine messbare Funktion, da es eine Komposition von messbaren Funktionen ist. Da die Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ von den Intervallen $(-\infty, a), (-\infty, a]$, bzw.$(a, \infty), [a, \infty)$ erzeugt werden, reicht es zu zeigen, dass die Urbilder

$$(\min\{f,g\})^{-1}((-\infty, a)) \quad \text{bzw.} \quad (\max\{f,g\})^{-1}((a, \infty))$$

messbar sind.

Da f und g messbar sind, gilt

$$\begin{aligned} & f^{-1}((-\infty,a)), f^{-1}((a,\infty)) \quad \text{und} \quad g^{-1}((-\infty,a)), g^{-1}((a,\infty)) && \text{sind messbar} \\ \Longrightarrow \quad & (\min\{f,g\})^{-1}((-\infty,a)) = f^{-1}((-\infty,a)) \cup g^{-1}((-\infty,a)) && \text{bzw.} \\ & (\max\{f,g\})^{-1}((a,\infty)) = f^{-1}((a,\infty)) \cup g^{-1}((a,\infty)) && \text{sind messbar.} \end{aligned}$$

Für $(-\infty, a]$ bzw. $[a, \infty)$ entsprechend. Also sind $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ messbar, da die σ-Algebra auch unter Schnitt–Bildung abgeschlossen ist.

b) Da $f_k = p_k \circ f$ gilt, mit p_k die Projektion, also $p_k \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = f_k$, sind auch die einzelnen Komponentenfunktionen f_k messbar, da die Pojektion p_k stetig ist (damit folgt dann Messbarkeit der einzelnen f_k nach Korollar 48.4).

c) Offensichtlich ist $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}} -f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n = -\limsup_{n\to\infty} -f_n$, wobei die Messbarkeit von $-f_n$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ mit $g_n := -f_n$bereits gezeigt wurde.

d) Es gilt:

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \le a\right\} = \left\{x \in X : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \le a\right\} = \left\{x \in X : \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \ge b < a\right\}$$

mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = b$

$$= \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < a\}$$

Aufgabe 4.2

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gilt für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ das Cauchykriterium, wodurch die Menge E wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0\ |f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{1}{k} \right\} \\ &= \underbrace{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq n_0}}_{\text{abzählbar}} \underbrace{\left\{ x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{1}{k} \right\}}_{\text{offen}} \end{aligned}$$

Damit ist E eine Kombination von Borelmengen durch Operationen, die nicht aus den Borelmengen herausführen. Also ist E messbar.

Aufgabe 4.3

a) Sei E die Menge $\mathbb{R} \setminus N$. Damit ist $\mathbb{R}$ die disjunkte Vereinigung von N und E. f ist messbar auf E, da f dort stetig ist. Damit ist $f_{|E}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist $f_{|N|}$ auch auch messbar und damit für alle $B \in \mathcal{B}$ $f_{|N}^{-1}(B) \subset N$ und damit $\mu(f_{|N}^{-1}(B)) = 0$ also $f_{|N}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Für beliebiges $B \in \mathcal{B}$ gilt dann

$$f^{-1}(B) = f_{|E}^{-1}(B) \cup f_{|N}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Also ist f messbar.

b) Es genügt zu zeigen, dass die Urbilder von $[-\infty, r]$ mit $r \in \mathbb{R}$ messbar sind, da dieses System ganz $\mathbb{R}$ erzeugt (Satz 48.2).

Da f monoton wächst, ist $f^{-1}([-\infty, r]) = [-\infty, a] \in \mathcal{B}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit ist bereits die Messbarkeit von f gezeigt.

c)

Aufgabe 4.4

Es soll die folgende Äquivalenz gezeigt werden:

$$f \text{ ist } \bar{\mathcal{A}}\text{–messbar} \iff \exists E = A \cup N \text{ disjunkt mit } A \in \mathcal{A} \text{ und } \bar{\mu}(N) = 0 \text{ und damit } f_{|A}\ \mathcal{A}\text{–messbar}$$

„⇒“ Es ist bekannt, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch das abzählbare Erzeugendensystem $\mathcal{S} = \{[p,q)|p,q \in \mathbb{Q}\}$ erzeugt wird.
Da $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\bar{\mathcal{A}}$–messbar und $\bar{\mathcal{A}}$ vollständig, gibt es für alle p,q ein $A_{p,q} \in \mathcal{A}$ und ein $N_{p,q} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N_{p,q}) = 0$, so dass

$$f^{-1}([p,q)) = A_{p,q} \cup N_{p,q} \subset E$$

und außerdem

$$E = f^{-1}\left(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S\right) = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} (A_{p,q} \cup N_{p,q})$$

Nun sei

$$A := \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q} \setminus \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} N_{p,q} \in \mathcal{A}$$

Dann ist $E \setminus A \subset \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} N_{p,q}$ und daher $\mu(E \setminus A) \leq \sum_{p,q \in \mathbb{Q}} \mu(N_{p,q}) = 0$.
Es gilt weiterhin

$$(f_{|A})^{-1}([p,q)) = f^{-1}([p,q)) \cap A = (A_{p,q} \cup N_{p,q}) \cap A = A_{p,q} \cap A \in \mathcal{A}_A$$

Es ist also $(f_{|A})^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}_A$. Nach Satz 48.2(i) ist damit $(f_{|A})^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}_A$, also $f_{|A}$ $\mathcal{A}$–messbar.

„⇐“ Es ist nach Voraussetzung $\mu(E \setminus A) = 0$ und damit wegen Satz 48.2(iv) $f_{|E\setminus A}$ messbar. Da $f_{|A}$ $\mathcal{A}$–messbar ist, folgt aus dem gleichen Satz daher auch, dass f $\bar{\mathcal{A}}$–messbar ist.