Aufgabe 8.1

Zu erst die erste Substitution $t \to \sin^2\phi \implies dt = 2\sin\phi\cos\phi$ und damit

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2(p-1)} \underbrace{\left(1-\sin(\phi)\right)^{2(q-1)}}_{(\cos\phi)^{2(q-1)}} \cdot 2\sin\phi\cos\phi\,d\phi$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}\,d\phi$$

Und die 2. Substitution mit $t \to r^2 \implies dt = 2r\,dr$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty r^{2x-2}e^{-r^2}\cdot 2r\,dr = 2\int_0^\infty r^{2x-1}e^{-r^2}\,dr$$

Das gesuchte Produkt ist dann

$$B(p,q)\cdot\Gamma(p+q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}\,d\phi \cdot 2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\,dr$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} 4\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\infty]} (\sin\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\,d\lambda_2$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (\sin\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\,d\phi\,dr$$

Nun findet ein Wechsel zwischen kartesischen zu Polarkoordinaten. Dazu sei $\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$ und damit

$$|\det\nabla\psi| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}\right| = |r\cos^2\phi + r\sin^2\phi| = r$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \underbrace{(\sin\phi)^{2p-1}(\cos\phi)^{2q-1}r^{2p+2q-2}e^{-r^2}}_{f}\cdot\underbrace{r}_{|\det\psi|}\,d\phi\,dr$$
$$\overset{\text{TraFo}}{=} 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \left(2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}\,dx\right)\left(2\int_0^\infty x^{2q-1}e^{-x^2}\,dy\right)$$

Rücksubstitution $x^2 \to t \implies x = \sqrt{t} \implies dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ und y entsprechend

$$= \left(2\int_0^\infty (\sqrt{t})^{2p}(\sqrt{t})^{-1}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\right)\left(2\int_0^\infty (\sqrt{t})^{2q}(\sqrt{t})^{-1}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\right)$$
$$= \left(\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt\right)\left(\int_0^\infty t^{q-1}e^{-t}\,dt\right)$$
$$= \Gamma(p)\Gamma(q)$$

$\square$

Aufgabe 8.2

(a) Sei nun $a < \operatorname{ess\,sup} f < \infty$ und $\mu(A) = 0$ mit $A := \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $A^C \in \mathcal{A}$, wobei

$$A^C = \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

ist. Nun ist aber auch

$$\sup_{x \in A^C} f(x) \leq a \Rightarrow \inf \sup f(x) =: \operatorname{ess\,sup} f \leq a \quad \text{Widerspruch!}$$

b) Zu zeigen ist also, dass das Infimum auch wirklich angenommen wird. Sei nun $a = \operatorname{ess\,sup} f < \infty$. Betrachte

$$A_n := \{x \in X : f(x) > a + \frac{1}{n}\}$$

Gilt nun $\mu(A_n) = 0$, ist $A_n \in \mathcal{A}$ und damit auch die abzählbare Vereinigung in $\mathcal{A}$ enthalten, deren Maß demensprechend ebenfalls 0 ist,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := A \in \mathcal{A} \ni A^C = \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

Was äquivalent ist zu:

$$\sup_{x \in A^C} f(x) = a = \operatorname{ess\,sup} f$$

Also wird das Infimum angenommen. Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass $\mu(A_n) = 0$ ist.

Annahme: $\mu(A_n) \neq 0$. Man betrachte dann eine beliebige andere Nullmenge $D \in \mathcal{A}$, daraus folgt $\mu(D^C \cap A_n) \neq 0$. Da aber auch $B^C \cap A_n \subset B^C$ ist, folgt daraus wiederum:

$$\operatorname{ess\,sup} f \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\ldots x \in B^C \cap A_n} f(x) \geq a + \frac{1}{n}$$

was im Widerspruch zur Annahme steht, dass $\operatorname{ess\,sup} f = a$ ist.

c) „⇒“ Da $0 = \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty$ ist, kann b) angewendet werden. Dann gibt es also eine Nullmenge $A \in \mathcal{A}$, so dass $\sup_{x \in A^C} |f(x)| = 0$ ist, damit ist aber auch sofort f auf diesen Mengen 0.

„⇐“ Da f außerhalb einer Nullmenge immer den Wert 0 annimmt, ist auch das Supremum von f und auch das Supremum von $|f|$ auf diesen Mengen 0, und damit ist auch das Infimum von $|f|$ der Suprema auf diesen Mengen 0, also $0 = \operatorname{ess\,sup} |f|$.

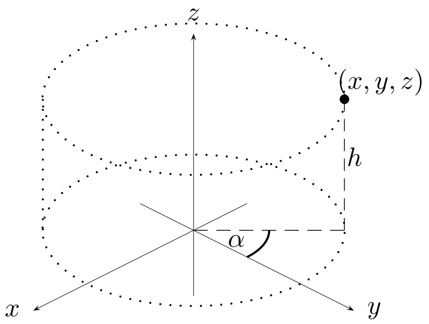
Aufgabe 8.3

(a) Der Zylinder Z ist eine Rotationsfläche aus 8.4a mit $f(z) = 1$ (und damit $f(z) \in \mathcal{C}^\infty((a,b), \mathbb{R}_+)$. Damit ist bereits gezeigt, dass Z eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

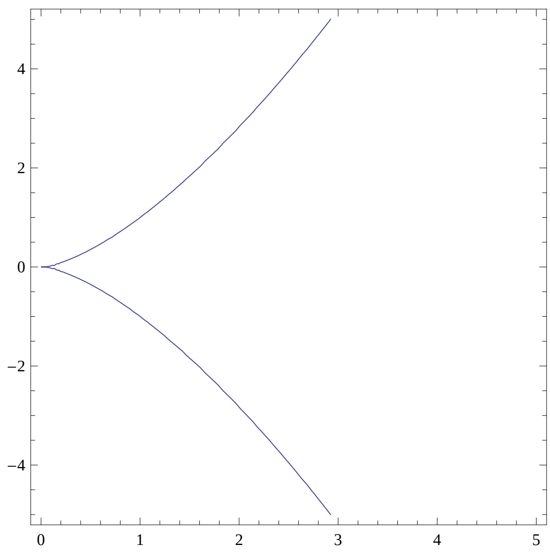
Eine mögliche Parametrisierung wäre

$$\gamma : [-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to Z \quad \text{mit} \quad \gamma : (\alpha, h) \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha, h) \quad \text{und} \quad \nabla\gamma = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit offensichtlich $rang\, \nabla\gamma = 2$. Die Parametrisierung sieht dann so aus:



(b) Die Neilsche Parabel hat die Form



Mathematica 7: `ContourPlot[x^3 == y^2, {x, 0, 5}, {y, -5, 5}]`

Wie man sieht, ist der einzige kritische Punkt der Koordinatenursprung $(0,0)$. Jede stetig diffbare Parametrisierung hat nun an dieser Stelle eine Singularität, sodass die Neilsche Parabel keine Mannigfaltigkeit der Ordnung 2 ist. Anschaulich kann man es sich so erklären, dass der Vektor der Ableitung an der Stelle $(0,0)$ ßpringt"bzw. sich umkehrt, sodass es keine nichtreguläre, stetig diffbare Parametrisierung geben kann. Ähnlich kann man auch für die Nullstellenmenge der Funktion F argumentieren, deren Elemente lokale Lösungen der Gleichungen sind.

Aufgabe 8.4

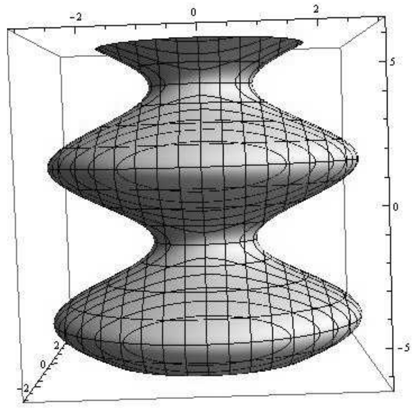
(a) Nach Definition 52.1 ist die Menge M^2 eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2, wenn es zu jedem $(x, y, z) \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z) \in U$ gibt und eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, so dass

$$F^{-1}(0) \cap U = M^2 \cap U \quad \text{mit} \quad rang(F'(x, y, z) = 1$$

Sei nun $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z)^2$. Dann ist offenbar $M^2 = F^{-1}(0)$. Es kann sogar $U = \mathbb{R}^3$ gesetzt werden. Des weiteren gilt

$$F'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2f(z)f'(z) \end{pmatrix}$$

Da $f \in \mathcal{C}^\infty$, ist diese Funktion wohldefiniert. Für $f(z) = \sin(z) + 2$, was die geforderten Bedingungen erfüllt, sieht die Untermannigfaltigkeit wie rechts dargestellt aus.



Mathematica 7:
`ContourPlot3D[x^2 + y^2 == F[z]^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -2*Pi, 2*Pi}]`

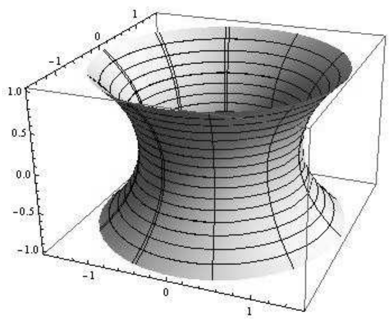
(b) Es ist leicht zu sehen, dass der gegebene Kathenoid genau ein Rotationskörper von $f(z) = \cosh(z)$ ist. Dann gilt

$$M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$$

Da $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ gilt und weiterhin

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad & \big(\cosh(z)\big)^{(2k)} = \cosh(z) \\ \text{und} \quad & \big(\cosh(z)\big)^{(2k+1)} = \sinh(z) \end{aligned}$$

ist diese Funktion unendlich oft stetig differenzierbar. Außerdem besteht sie nur aus positiven Funktionen, ist also selbst auch positiv. Damit sind alle Eigenschaften von (a) erfüllt und M^2 ist wie behauptet eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.



Mathematica 7:
`ParametricPlot3D[{Cosh[u]*Cos[v], Cosh[u]*Sin[v], u}, {v, -5, 5}, {u, -1, 1}]`