24. Sommerschule
Lust auf Mathematik

Berliner Netzwerk

mathematisch-naturwissenschaftlich

profilierter Schulen

07. Juni bis 12. Juni 2026

im

Jugendbildungszentrum

Blossin e.V.

Waldweg 10 15754 Blossin

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT · ZU BERLIN ·

Die Sommerschule „Lust auf Mathematik“ findet bereits zum 24. Mal statt und setzt damit eine sehr fruchtbare Form der Zusammenarbeit zwischen Schule und Hochschule fort. Etwa 45 Schülerinnen und Schüler der elften Klassen beschäftigen sich in Kleingruppenarbeit intensiv mit einem mathematischen Thema, das Bezug zum Schulstoff hat, aber über dessen Rahmen hinausweist. Sie werden von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern zu weitgehend selbstständiger Arbeit angeleitet. In Vorträgen vor dem Plenum stellen die Gruppen ihre Ergebnisse dar. Am Ende der Woche legen sie einen schriftlichen Bericht darüber vor. Die Berichte werden gesammelt, gebunden und allen Teilnehmern übergeben.

Am Mittwochabend wird Prof. Dr. Jürg Kramer (HU Berlin) einen Vortrag zum Thema *„Rationale Lösungen polynomialer Gleichungen“* halten.

Themen der Gruppenarbeit

Helga Baum (HU Berlin)
Was sind Minimalflächen?

Fedir Fedorov und Johann Fried (TU Berlin)
Martingale – Warum man bei Münzwürfen nicht gewinnen kann

Christoph Lieben (HU Berlin)
Bézierkurven und -flächen in der Computergrafik

Robert Löwe (Käthe-Kollwitz-Gymnasium Berlin)
Schatten von Polyedern

Christian Thielecke (Andreas-Gymnasium Berlin)
Siebtheorie und das Rätsel der Primzahlzwillinge

Diese Sommerschule wird gefördert vom Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, dem Berlin Mathematics Research Center MATH+ und dem SFB TRR 388 „Rough analysis, stochastic dynamics and related fields“.

Zeitplan 24. Sommerschule 2026

	Sonntag 07.Juni	Montag 08.Juni	Dienstag 09.Juni	Mittwoch 10.Juni	Donnerstag 11.Juni	Freitag 12.Juni
07.40 - 08.20		Frühstück	Frühstück	Frühstück	Frühstück	Frühstück
09:00 - 12:00	Ankunft aus Friedersdorf	Gruppenarbeit	Gruppenarbeit	Gruppenarbeit	Gruppenarbeit Präsentation 1 Präsentation 2	Räumen der Zimmer Abschlusstreffen 10:00 Uhr Losgehen
12.10 - 12.50	Mittagessen	Mittagessen	Mittagessen	Mittagessen	Mittagessen	
13:00 - 15:00	Anmeldung Eröffnung	Freizeit	Treffpunkt 13:30 Uhr Hafen ab 14:00 Uhr Wasserwanderung	Freizeit	Freizeit Präsentation 3 Präsentation 4	
15:00 - 18:00	Gruppenarbeit	Gruppenarbeit	Freizeit	Gruppenarbeit	Gruppenarbeit Präsentation 5	
18.10 - 18.50	Abendessen	Abendessen		Abendessen	Abendessen	
ab 19:00	Freizeit	"Känguru-Speedwettbewerb" mit Malte Lundschien	Grillabend	Vortrag: Prof. Jürg Kramer	Präsentation 6 Fertigstellen der Berichte	

Anreise: 07.06.2026, 10.50 Uhr Transfer des Gepäcks ab Bahnhof Friedersdorf, Fußweg ca. 45 min. Treffpunkt zur Gepäckübergabe auf dem Bahnsteig.
Eigene Anreise bis Friedersdorf z. B. ab Königs Wusterhausen mit dem RB36 Richtung Frankfurt (Oder). Falls es zu Unregelmäßigkeiten im Bahnverkehrt kommen sollte, wird eine Alternative kurzfristig über die Lehrkräfte mitgeteilt.
Schülerinnen und Schüler, die einen Bustransfer ab Friedersdorf dringend benötigen, melden dies bitte ihrer Lehrkraft.

Abreise: 12.06.2026, ca. 09.30 Uhr Fußweg nach Friedersdorf, Gepäcktransfer ab Blossin nach Bahnhof Friedersdorf.

Weitere Informationen und Hinweise

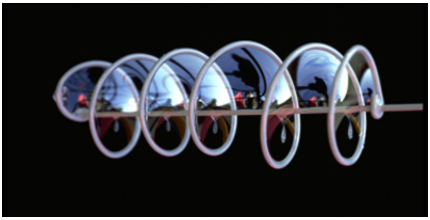
- Am Dienstag, dem 09.06.2026, findet von 14 bis 17 Uhr die traditionelle Wasserwanderung mit Kanadiern statt. Gegen 19 Uhr treffen sich alle beim Grillabend. An diesem Tag gibt es kein Abendbrot in der Mensa.
- Die Unterbringung erfolgt in der Regel in Drei- oder Vierbettzimmern. Bettwäsche und Handtücher brauchen nicht mitgebracht zu werden. Seife ist auf den Zimmern nicht vorhanden. Badetücher für den Strand sind sinnvoll.
- Wie in der Nähe von Seen üblich, gibt es Mücken (und Sonne).
- Vor Ort können Sportgeräte ausgeliehen werden.
- Jeder mitgebrachte eigene Laptop erleichtert die Arbeit enorm. Als Textverarbeitungssystem wird LaTeX verwendet.
- Download-Möglichkeit für LaTeX: https://www.latex-project.org/get/

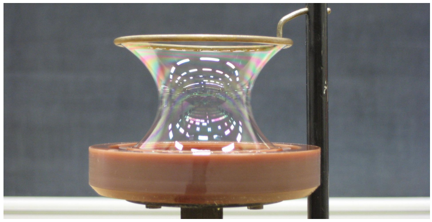
  Bitte auf den eigenen Laptops installieren und testen. In den meisten Gruppen wird auch overleaf verwendet, https://www.overleaf.com.

Die Themen der Gruppenarbeit

Was sind Minimalflächen?

Taucht man ein geschlossenes Drahtgestell in eine Seifenlauge ein, so bildet sich nach Herausziehen ein in diesen Draht eingespanntes Seifenhäutchen. Solche Seifenhäutchen haben die physikalische Eigenschaft, sich möglichst klein zusammenzuziehen, um ihre potentielle Energie zu minimieren.

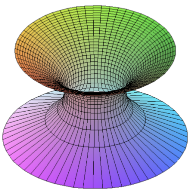




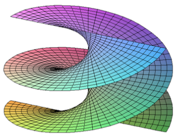
Schon früh haben sich Mathematiker gefragt, welches die kleinste Fläche ist, die in eine vorgegebene geschlossene Randkurve eingespannt werden kann. Dieses Problem wird *Plateau-Problem* genannt, nach dem belgischen Physiker Joseph Plateau (1801-1883), der interessante Experimente dazu durchgeführt hat. Es ist analytisch schwer zu behandeln. Man hat aber festgestellt, dass die gesuchten Flächen eine bestimmte *geometrische* Eigenschaft haben: Sie sind in jedem Punkt gleichmäßig in beide Seiten der Tangentialebene gekrümmt: ihre *mittlere Krümmung* ist in jedem Punkt Null. Diese Eigenschaft läßt sich leicht nachrechnen. Man kann Flächen mit mittlerer Krümmung Null mit Hilfe von komplex-analytischen Funktionen auch konstruieren. Man nennt solche Flächen *Minimalflächen.* Sie haben nicht notwendigerweise minimalen Flächeninhalt unter allen in die gleiche Randkurve eingespannten Flächen. Ihr Flächeninhalt wird aber größer, wenn man sie in kleinen Bereichen deformiert.

Anwendung findet dies z.B. in der Architektur. Ein Beispiel ist das Dach des Münchener Olympiastadiums, entworfen vom deutschen Architekten Frei Otto, gebaut 1968-1972. Dieses Dach besteht aus Minimalflächen und gewährleistet somit einen möglichst geringen Verbrauch von Baumaterial bei einer gleichzeitig sehr hohen Belastbarkeit. In der Tat entstanden die ersten Modelle des Daches, und auch weitere Dachkonstruktionen von Frei Otto sowie anderer Architekten, mit Hilfe von Drähten und Seifenlauge.

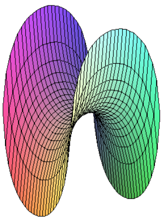
In diesem Sommerkurs werden wir uns mit verschiedenen Krümmungseigenschaften von Flächen im Euklidischen Raum beschäftigen. Wir werden diese Krümmungen mathematisch beschreiben, sie geometrisch interpretieren und sie auch berechnen. Insbesondere wollen wir Flächen mit mittlerer Krümmung Null, d. h. *Minimalflächen*, kennenlernen. Dazu gehören z. B. folgende Flächen:



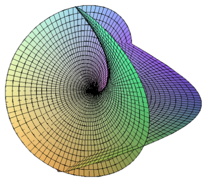
Katenoid



Wendelfläche



Scherksche Minimalfläche

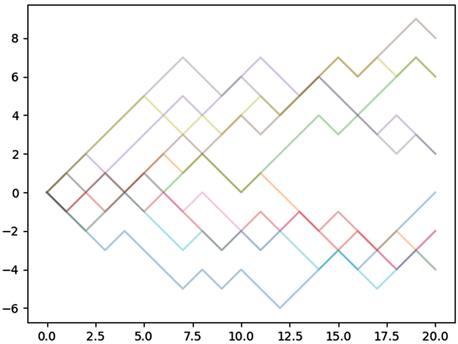


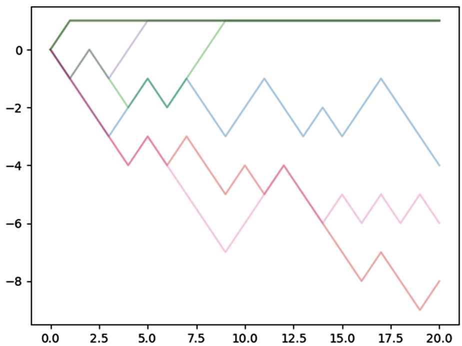
Ennerperfläche

Martingale – Warum man bei Münzwürfen nicht gewinnen kann

Seit langer Zeit stellen sich Menschen die Frage, wie man nicht deterministische Prozesse mathematisch modellieren kann. Ob in der Physik, im Finanz- und Versicherungswesen oder bei Glücksspielen, überall ist man mit Zufall konfrontiert.

Gemeinsam wollen wir uns intensiv mit Wahrscheinlichkeitstheorie befassen. Dabei werden wir bei den Grundlagen beginnen und uns Stück für Stück voranarbeiten. Eine unserer leitenden Motivationen wird dabei das Münzwurfspiel sein: Jemand bietet euch an, eine Münze zu werfen - bei Kopf verdoppelt ihr euren Einsatz und bei Zahl verliert ihr alles. Klingt gut? Würdet ihr spielen? Was wäre dabei eure Strategie?





In diesem Kurs werden wir uns mathematische Werkzeuge anschauen, um solche Fragen präzise anzugehen und zu beantworten. Um eine Intuition für Zufallsprozesse zu erhalten, wird der Kurs durch eine Einführung in Python und insbesondere die Simulation von Zufallsexperimenten enthalten.

Mit sogenannten Monte-Carlo-Methoden kann man viele Vermutungen und Strategien zunächst testen bevor man sie mathematisch analysiert. In den Graphiken sieht man mögliche Verläufe des Münzwurfspiels. Was könnten die Strategien gewesen sein?

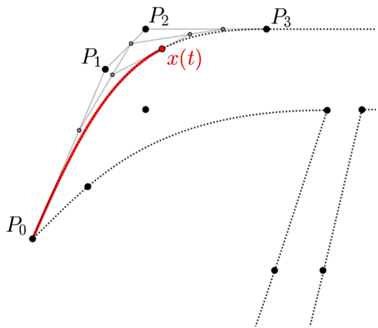
Bézierkurven und -flächen in der Computergrafik

Bézierkurven sind in der Computergrafik allgegenwärtig. So ist beispielsweise jedes Schriftzeichen dieses Textes im Wesentlichen eine Aneinanderreihung von Bézierkurven. Ihre weite Verbreitung liegt wohl nicht zuletzt daran, dass sie auf interessante Weise mathematische Eleganz mit visueller Gefälligkeit verbinden.

Die Parametrisierung

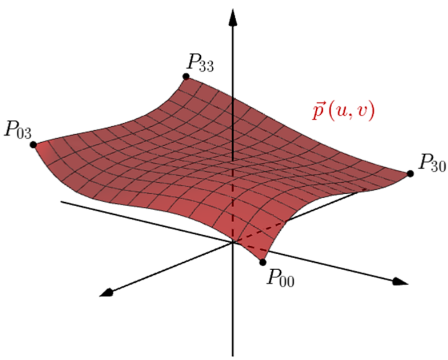
$$\vec{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i \,(1-t)^{n-i} \cdot \vec{p}_i$$

liefert eine durch die Punkte $\vec{p}_0, \ldots, \vec{p}_n$ gut zu kontrollierende, skalierbare und glatte Kurve. Die Gewichtung der Kontrollpunkte mit den sogenannten Bernstein-Polynomen entspricht dabei einer geometrischen Konstruktion, dem Algorithmus von de Casteljau, mit dem sich die Kurve zeichnen lässt.



Digitale Schriftzeichen wie dieses π bestehen meist aus Bézierkurven.

Dieses Prinzip lässt sich auf sogenannte Tensorprodukt-Bézierflächen erweitern, mit denen sich dann auch dreidimensionale Objekte modellieren lassen.



Eine bikubische Tensorprodukt- Bézierfläche

Auf diese Weise konnte der namensgebende Ingenieur Pierre Bézier schon in den 1960er-Jahren Karosserieteile gestalten und darstellen.

Wir werden uns die zentralen Ideen hinter den Objekten zunächst intuitiv erarbeiten, sie anschließend mithilfe der geeigneten Begriffe aus der analytischen Geometrie und Differentialrechnung formalisieren und dabei auch einige interessante Eigenschaften beweisen. Schließlich werden wir mit GeoGebra und Python eigene Bézierkurven und -flächen zeichnen.

Darüber hinaus können wir die Theorie der Freiformflächen durch Betrachtung von dreieckigen Bézierflächen in baryzentrischen Koordinaten vertiefen oder einen Exkurs in die Theorie und Anwendung von Splines unternehmen.

Schatten von Polyedern

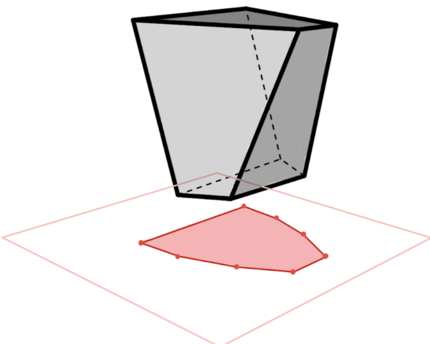
Als *Polyeder* bezeichnet man konvexer Körper in $\mathbb{R}^3$ mit endlich vielen Ecken. Beispiele aus der Schulgeometrie sind etwa Würfel, Pyramiden oder Prismen. Jedes Polyeder lässt sich algebraisch als Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen beschreiben. Damit spielen Polyeder eine zentrale Rolle in der *Linearen Optimierung*, d. h. der Suche nach dem Minimum oder Maximum einer linearen Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen.

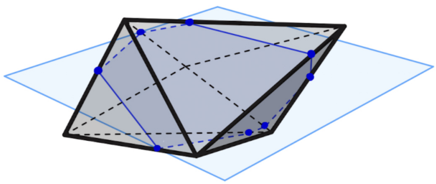
Ein berühmtes Verfahren zur Lösung solcher Optimierungsprobleme ist der sogenannte *Shadow-Vertex-Simplex-Algorithmus* Gass+Saaty_1955 [4]. Hierbei projiziert man ein hochdimensionales Polyeder auf eine geeignete zweidimensionale Ebene und verfolgt dort einen Weg entlang der Ecken des entstehenden *Schattenpolygons*, um eine optimale Lösung zu finden.

Wie viele Ecken ein Schattenpolygon besitzen kann, ist daher nicht nur eine anschauliche geometrische Frage, sondern spielt auch für die Analyse von Optimierungsalgorithmen eine wichtige Rolle. Bereits in den 1960er Jahren formulierte Leo Moser MOSER_1991 [8] die grundlegende Frage:

> *Was ist die größte Zahl $f(n)$, sodass jedes Polyeder mit n Ecken ein Schattenpolygon mit $f(n)$ Ecken besitzt?*

Die Antwort auf diese Frage ist bis heute nicht vollständig bekannt – ihre Untersuchung sowie die verwandter Fragen führt mitten in die moderne diskrete Geometrie und aktuelle Forschung Lagarias+Luo+Padrol_2013 [7].





Im Workshop werden wir einige grundlegende mathematische Werkzeuge kennenlernen, mit denen sich dieses Problem untersuchen lässt. Dazu gehören verschiedene Beschreibungen von Polyedern und linearen Programmen sowie von linearen Abbildungen und orthogonale und kombinatorischen Projektionen. Außerdem werden wir das Problem mithilfe geeigneter mathematischer Software experimentell untersuchen.

Literatur

[1] Nina Amenta and Günter M. Ziegler. Deformed products and maximal shadows of polytopes. In *Advances in discrete and computational geometry. Proceedings of the 1996 AMS-IMS-SIAM joint summer research conference on discrete and computational geometry: ten years later, South Hadley, MA, USA, July 14–18, 1996*, pages 57–90. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[2] Karl Heinz Borgwardt. A sharp upper bound for the expected number of shadow vertices in LP-polyhedra under orthogonal projection on two-dimensional planes. *Math. Oper. Res.*, 24(3):544–603, 1999.

[3] Bernard Chazelle, Herbert Edelsbrunner, and Leonidas J. Guibas. The complexity of cutting complexes. *Discrete Comput. Geom.*, 4(2):139–181, 1989.

[4] S. Gass and T.L. Saaty. The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2:39, 1955.

[5] Branko Grünbaum, Victor Klee, Günter M. Ziegler, and Volker Kaibel. *Convex polytopes.* Graduate texts in mathematics 221. Springer, New York [etc, 2nd ed. / prep. by volker kaibel, victor klee, and günter m. ziegler edition, 2003.

[6] Michael Joswig and Thorsten Theobald. *Polyhedral and Algebraic Methods in Computational Geometry / Michael Joswig, Thorsten Theobald.* Universitext. Springer, London, UK, 2013.

[7] Jeffrey C. Lagarias and Yusheng Luo. Moser's shadow problem. *ArXiv*, abs/1310.4345, 2013.

[8] William O.J. Moser. Problems, problems, problems. *Discrete Applied Mathematics*, 31(2):201–225, 1991.

[9] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer programming.* Wiley-Interscience, 1986.

[10] Geoffrey C. Shephard. Twenty problems on convex polyhedra. I. *Math. Gaz.*, 52:136–147, 1968.

[11] Csaba D. Tóth. Convex subdivisions with low stabbing numbers. *Period. Math. Hung.*, 57(2):217–225, 2008.

[12] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152 of *Grad. Texts Math.* Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Siebtheorie und das Rätsel der Primzahlzwillinge

Schon seit der Antike faszinieren Primzahlen die Menschheit. Sie sind die Atome der Zahlenwelt und das Fundament moderner Verschlüsselungstechnik. Doch während wir wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, verbirgt sich dahinter eines der größten ungelösten Rätsel der Mathematik:

Die Primzahlzwillings-Vermutung:

Gibt es unendlich viele Paare wie $(3, 5)$, $(11, 13)$ oder $(59, 61)$, deren Abstand genau 2 beträgt?

Das Sieb des Eratosthenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

`Ausgesiebte Primzahlzwillinge 1-40, dargestellte Menge` $\mathcal{A}_3$

In diesem Seminar tauchen wir tief in die Welt der **Siebtheorie** ein. Wir werden Methoden entwickeln, um Primzahlen aus der Menge der natürlichen Zahlen herauszusieben und ihre Dichte mathematisch zu beschreiben.

Die Etappen des Seminars:

1. **Die Grundlagen** – Wir lernen das klassische *Sieb des Eratosthenes* kennen und erfahren, warum der Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ die Welt der Zahlen regiert.
2. **Arithmetische Werkzeuge** – Wir entdecken die Möbiusfunktion $\mu(n)$ und den Chinesischen Restsatz, um Ordnung ins Chaos der Teiler zu bringen.
3. **Bruns-Sieb** – Wir untersuchen das *Sieb von Viggo Brun* und beweisen einen verblüffenden Satz: Die Summe der Kehrwerte aller Primzahlzwillinge konvergiert!
4. **Selbergs moderne Methode** – Wir optimieren unsere Siebe mit quadratischen Formen, um noch schärfere Abschätzungen zu erhalten.
5. **Die Hardy-Littlewood-Vermutung** – Wir blicken an die Front der Forschung. Warum glauben wir, dass es unendlich viele Zwillinge gibt, und wie nah sind wir dem Beweis?

Kontakt:

Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
10099 Berlin

Prof. Dr. Andreas Filler
Tel.: 2093-45360
E-Mail: filler@math.hu-berlin.de

Jugendbildungszentrum Blossin e.V.
Waldweg 10
15754 Blossin
Tel.: 033767-75-0
Fax: 033767-75-100
E-Mail: info@blossin.de
Internet: www.blossin.de