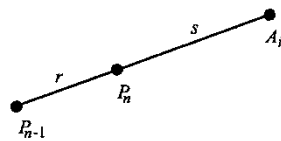


Affine Abbildungen und Zufallsfolgen¹

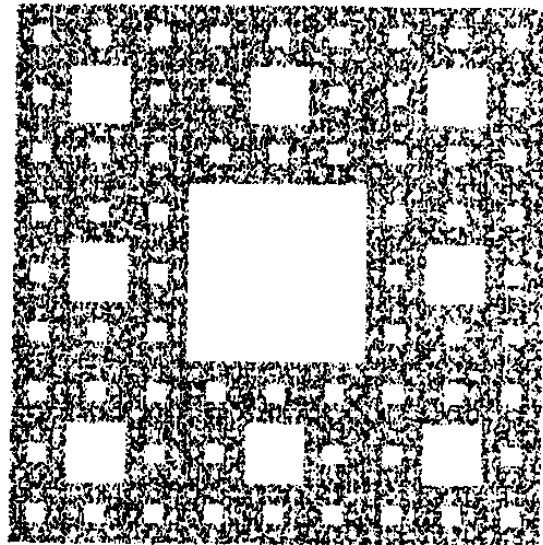
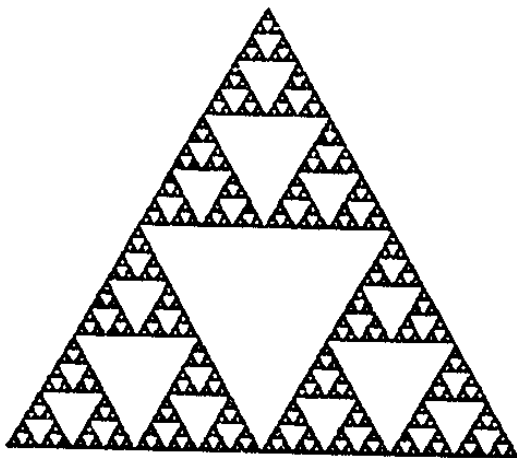
1 Fraktale – nur scheinbar zufällig

Der folgende, leicht programmierbare Algorithmus erzeugt eine Punktfolge, die oft zu ästhetisch ansprechenden Figuren führt:

Man wähle m Punkte A_1, \dots, A_m des \mathbb{I}^2 und ein festes Teilverhältnis $r:s$. Dann wird die Punktfolge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt definiert: P_0 ist beliebig. P_n entsteht aus P_{n-1} , indem man zufällig eine der Ecken A_1, \dots, A_m , etwa A_i , „würfelt“ und als P_n denjenigen Punkt der Strecke $P_{n-1}A_i$ wählt, für den $\overline{P_{n-1}P_n} : \overline{P_{n-1}A_i} = r : s$ gilt.



Wählt man z. B. $m = 3$, A_1, A_2, A_3 als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und $r = s = 1$, so zeigt sich nach einigen Tausend Wiederholungen des Algorithmus approximativ das Fraktal, das als „Sierpinski-Dreieck“ bekannt ist, auf dem Bildschirm. Im folgenden, linken Bild sind hierfür 50.000 Punkte gezeichnet worden. Wählt man $m = 8$, A_1, \dots, A_8 als Ecken und Seitenmitten eines Quadrates und $r : s = 2 : 1$, so zeigt sich bald der „Sierpinski-Teppich“. Im folgenden Bild rechts wurden ebenfalls 50.000 Punkte gezeichnet (vgl. auch [5]²).



Einige weitere schöne Beispiele zeigen die Fig. 4 bis 11 auf der nächsten Seite, es sind jeweils 20.000 Punkte gezeichnet; Eckenkoordinaten sind gewählt bezüglich VGA-Graphik).

Diese Methode, Fraktale zu erzeugen, wurde wohl zuerst von *Barnsley* unter dem Stichwort „Random Iterated Function Systems“ (kurz „IFS“) beschrieben (vgl. [1; 8]). Erste Vorschläge für den Einsatz im Unterricht finden sich in [3; 5; 6; 7]. Die Darstellung in diesem Abschnitt ist für die Behandlung mit Oberstufenschülern gedacht, die eine interessante Anwendung af-

¹ Überarbeitung des Beitrags: H.-W. Henn: Fraktale und Zufallsfolgen. –In: Praxis der Mathematik 5/35, 1993, S. 193 – 199

² Die Literaturangaben stehen am Ende des Abschnitts

finer Abbildungen kennen lernen sollen. Die Möglichkeit, durch einfache Computer-Programme selbst mit den Figuren experimentieren zu können, erhöht den Reiz der Beschäftigung mit diesem Thema. Diesen Weg kann man weiter gehen und hochaktuelle Methoden der Bildkompression studieren, die weitere Motivationen für affine Abbildungen sein können (für einen ersten Zugang vgl. [8] und die Internet-Enzyklopädie WIKIPEDIA).

Das Auftreten von Fraktalen hat aber nichts mit „Zufall“ zu tun, sondern damit, dass durch die Wahl der Startpunkte A_1, \dots, A_m und des Teilverhältnisses $r : s$ eine gewisse Punktmenge $\mathfrak{R} \subset \square^2$ definiert ist. Jede Zufallsfolge, unabhängig vom Startpunkt P_0 , approximiert diese Menge \mathfrak{R} , in der Sprache der Fraktale gesprochen ist \mathfrak{R} Attraktor jeder Zufallsfolge. Ist z. B. $P_0 = A_1$, so liegen sogar alle $P_i \in \mathfrak{R}$. Auf jeden Fall erscheint auf dem Computerbildschirm nach dem Zeichnen genügend vieler Punkte „im wesentlichen“ die Punktmenge \mathfrak{R} . Ist \mathfrak{R} zufälligerweise ein Fraktal, so zeigt das Schirmbild trivialerweise ein (unscharfes) Bild dieses Fraktals. \mathfrak{R} kann aber auch z. B. ganz einfach die konvexe Hülle der Punkte A_1, \dots, A_m sein. Dies kann man sich leicht z. B. für $m = 4$, A_1, \dots, A_4 als Ecken eines Quadrates und $r = s = 1$ überlegen. Bei jeder Punktwahl wird für $r < s$ die konvexe Hülle dargestellt.

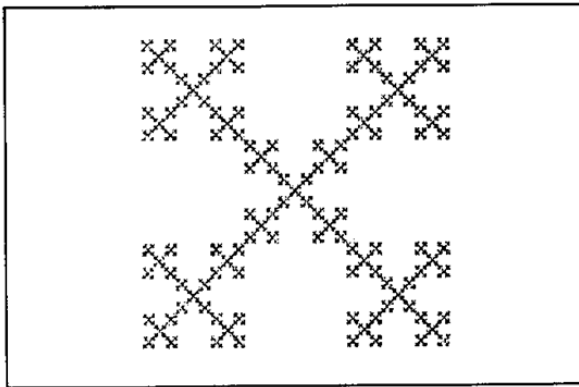


Fig. 4: $r : s = 2 : 1$, 5 Ecken $(0|0)$, $(230|230)$, $(460|0)$, $(460|460)$, $(0|460)$

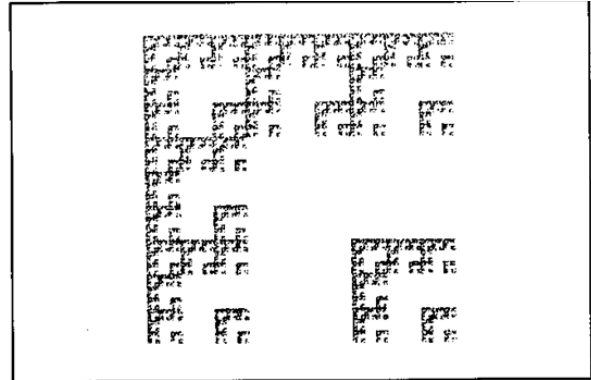


Fig. 5: $r : s = 2 : 1$, 6 Ecken $(0|0)$, $(230|0)$, $(460|0)$, $(460|460)$, $(0|460)$, $(0|230)$

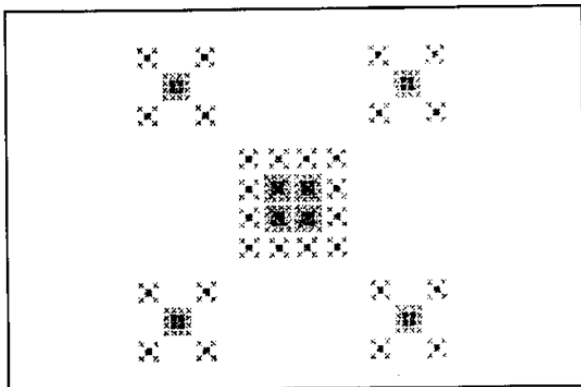


Fig. 6: $r : s = 3 : 1$, 8 Ecken $(0|0)$, $(200|200)$, $(260|200)$, $(460|0)$, $(460|460)$, $(260|260)$, $(200|260)$, $(0|460)$

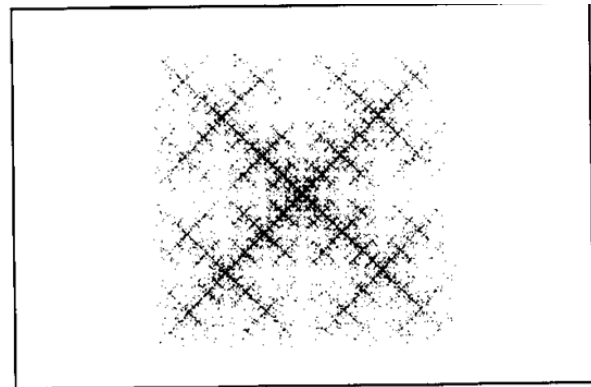


Fig. 7: $r : s = 1 : 1$, 8 Ecken $(0|0)$, $(460|0)$, $(460|460)$, $(0|460)$, 4 mal $(230|230)$, d. h. 4-fache Gewichtung

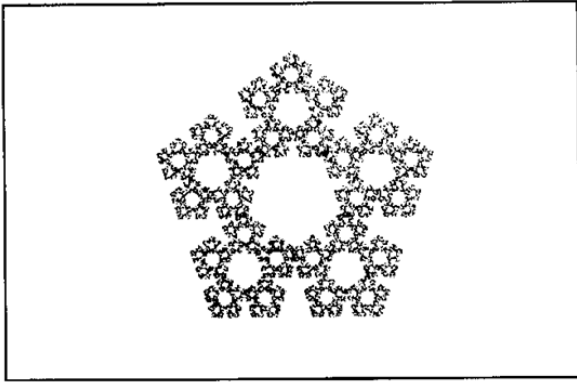


Fig. 8: $r : s = 3 : 2$, regelmäßiges 5-Eck

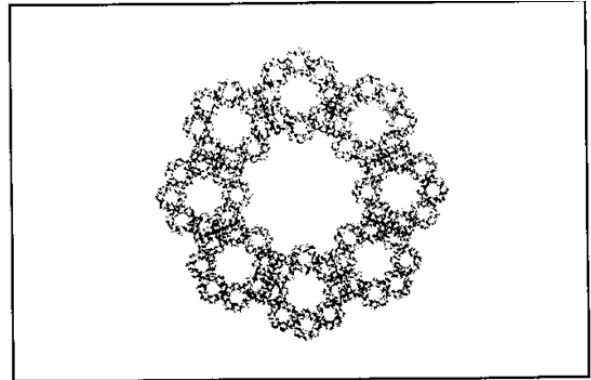


Fig. 9: $r : s = 2 : 1$, regelmäßiges 6-Eck

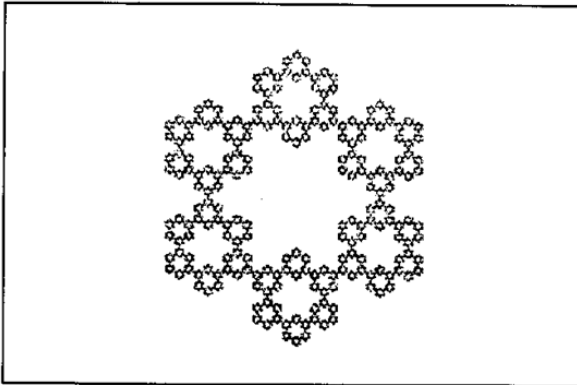


Fig. 10: $r : s = 2 : 1$, regelmäßiges 8-Eck

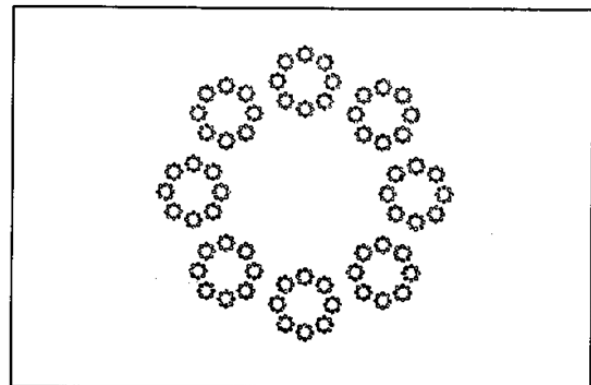


Fig. 11: $r : s = 3 : 1$, regelmäßiges 8-Eck

2 Die Zufallsfolge $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Es seien die Punkte A_1, \dots, A_m und das Teilverhältnis $r : s$ fest gewählt. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems möge gelten $A_i = (a_i | b_i)$. Ist A die zufällig gewählte Ecke, so ergibt sich nach der ersten Figur von 8.8 der Punkt $P_n(x_n|y_n)$ aus dem Punkt $P_{n-1}(x_{n-1}|y_{n-1})$ zu

$$\overline{OP_n} = \overline{OP_{n-1}} + \frac{r}{r+s} \overline{P_{n-1}A_i} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{r}{r+s} \begin{pmatrix} a_i - x_{n-1} \\ b_i - y_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{s}{r+s} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{r}{r+s} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \varphi_i(\overline{OP_{n-1}}),$$

wobei $\varphi_i = Z\left(A_i, \frac{s}{r+s}\right)$ die zentrische Streckung

$$(1) \quad \varphi_i(\vec{c}) = \frac{s}{r+s} \cdot \vec{c} + \frac{r}{r+s} \cdot \vec{a}_i, \quad \vec{a}_i = \overline{OA_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

ist.

Man kann sich die Folge $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also auch durch Verkettung der zufällig gewählten affinen Abbildungen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, ausgehend vom Startpunkt P_0 , entstanden denken. Damit lassen sich die Punkte P_1, P_2, \dots wie folgt darstellen:

$$\overline{OP}_1 = \frac{s}{r+s} \cdot \overline{OP}_0 + \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_1 \text{ mit } B_1 \in \{A_1, \dots, A_m\}$$

$$\overline{OP}_2 = \frac{s}{r+s} \cdot \overline{OP}_1 + \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_2 = \left(\frac{s}{r+s}\right)^2 \cdot \overline{OP}_0 + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_1 + \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_2 \text{ mit } B_2 \in \{A_1, \dots, A_m\}$$

·
·
·

$$(2) \quad \overline{OP}_n = \left(\frac{s}{r+s}\right)^n \cdot \overline{OP}_0 + \left(\frac{s}{r+s}\right)^{n-1} \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_1 + \left(\frac{s}{r+s}\right)^{n-2} \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_2 + \dots + \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_n$$

mit $B_i \in \{A_1, \dots, A_m\}$

3 Die Punktmenge \mathfrak{R}

Die Darstellung (2) motiviert die Definition der Punktmenge \mathfrak{R} , die durch die Punkte A_1, \dots, A_m und das Teilverhältnis $r : s$ definiert ist:

$$(3) \quad \mathfrak{R} = \left\{ P \in \square^2 \mid \overline{OP} = \frac{r}{r+s} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \overline{OB}_i, \quad B_i \in \{A_1, \dots, A_m\} \right\}$$

Für die Menge \mathfrak{R} gilt:

a) Die (auf die Komponenten x_P und y_P zu beziehende) unendliche Summe ist wohldefiniert:

$$\text{Wegen } \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{s}{r+s}} = \frac{r+s}{r} \text{ gilt}$$

$$|x_P| = \frac{r}{r+s} \cdot \left| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot x_i \right| \leq \frac{r}{r+s} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot |x_i| \leq \frac{r}{r+s} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \max_{i=1}^m |a_i| = \max_{i=1}^m |a_i|.$$

$$\text{Analog ist } |y_P| \leq \max_{i=1}^m |b_i|.$$

b) \mathfrak{R} ist unabhängig vom gewählten Ursprung O :

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot (\overline{OO} + \overline{OB}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OO} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s}\right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB}_i = 1 \cdot \overline{OO} + \overline{OP} \end{aligned}$$

c) \mathfrak{R} ist Teilmenge der konvexen Hülle A von A_1, \dots, A_m . Da sich die konvexe Hülle schreiben lässt als

$$A = \left\{ P \mid \overline{OP} = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \overline{OA_i} \text{ mit } 0 \leq c_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=1}^m c_i \leq 1 \right\},$$

folgt die Behauptung sofort aus der Darstellung (3).

- d) Je nach Lage von A_1, \dots, A_m (die nicht alle verschieden sein müssen) und Wahl des Teilverhältnisses werden Punkte von \mathfrak{R} mehrfach dargestellt.

4 Die Zufallsfolge und die Punktmenge \mathfrak{R}

Das affine Koordinatensystem möge zur Einfachheit den Ursprung $O = A_1$ haben. Der Vergleich mit der Darstellung von P_n in (2) und von \mathfrak{R} in (3) zeigt:

- a) $\overline{OP_n} = \left(\frac{s}{r+s} \right)^n \cdot \overline{OP_0} + \vec{p}$ mit einem Vektor $\vec{p} \in \mathfrak{R}$, d. h. dass der Abstand von P_n zur Punktmenge \mathfrak{R}

$$d(P_n, \mathfrak{R}) \leq \left(\frac{s}{r+s} \right)^n \cdot \overline{OP_0}$$

ist. Die Folge $\{P_n\}$ hat also einen Grenzwert in \mathfrak{R} , \mathfrak{R} ist Attraktor für $\{P_n\}$. Insbesondere gilt z. B. für $P_0 = A_1$, dass $\{P_n\}$ Teilmenge von \mathfrak{R} ist.

- b) $\{P_n\}$ füllt \mathfrak{R} dicht auf: Sei

$$\overline{OP} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s} \right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB_i} \in \mathfrak{R}$$

ein beliebiger Punkt und sei die Punktfolge bei P_n angelangt. Die nächsten $t+1$ zufällig gewählten Ecken seien die Punkte B_t, \dots, B_0 (in dieser Reihenfolge). Dann gilt für den Punkt P_{n+t+1}

$$\overline{OP_{n+t+1}} = \left(\frac{s}{r+s} \right)^{t+1} \cdot \overline{OP_n} + \left(\frac{s}{r+s} \right)^t \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB_t} + \left(\frac{s}{r+s} \right)^{t-1} \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OP_{t-1}} + \dots + \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB_0}$$

Wegen

$$\overline{P_{n+t+1}P} = \sum_{i=t+1}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s} \right)^i \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \overline{OB_i} - \left(\frac{s}{r+s} \right)^{t+1} \cdot \overline{OP_n} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

sind P_{n+t+1} und P in der Bildschirmauflösung für genügend großes t nicht zu unterscheiden. Da *jede* Punktfolge B_t, \dots, B_0 gleichwahrscheinlich ist, ist also auch die Konvergenz gegen jeden Punkt von \mathfrak{R} gleichwahrscheinlich, und das Schirmbild zeigt nach einiger Zeit das scheinbar vollständige Bild von \mathfrak{R} .

- c) Ist z. B. $P_0 = A_1$, so lässt sich \mathfrak{R} auch schreiben als

$$\mathfrak{R} = \{ \text{alle möglichen Folgenglieder} \} \cup \{ \text{alle möglichen Grenzwerte} \}.$$

5 Fraktale Dimension von \mathfrak{R}

Die Darstellung (3) von \mathfrak{R} lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{i=1}^m \left(\frac{r}{r+s} \cdot \overline{OA_i} + \mathfrak{R}' \right)$$

$$\text{mit } \mathfrak{R}' = \left\{ P \in \square^2 \mid \overline{OP} = \frac{r}{r+s} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{s}{r+s} \right)^i \cdot \overline{OB_i}, B_i \in \{A_1, \dots, A_m\} \right\} = \frac{s}{r+s} \cdot \mathfrak{R}$$

Also gilt

$$(4) \quad \mathfrak{R} = \bigcup_{i=1}^m \left(\frac{r}{r+s} \overline{OA_i} + \frac{s}{r+s} \cdot \mathfrak{R} \right) = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(\mathfrak{R})$$

mit den in (2) definierten zentrischen Streckungen φ_i . Die Menge \mathfrak{R} wird also in m kongruente Komponenten zerlegt. Jede Komponente ist das um den Faktor $\frac{s}{r+s}$ verkleinerte Bild \mathfrak{R} mit Zentrum A_i . Sind die Komponenten disjunkt, so lässt sich sofort die fraktale Dimension $D(\mathfrak{R})$ von \mathfrak{R} berechnen (vgl. z. B. [4], S. 52). Die hierfür nötige Idee verwendet die grundlegenden Eigenschaften des Messens, die die gesamte Mathematik von der Grundschule bis zur Maßtheorie der Universität bestimmen:

- kongruente Objekte haben das gleiche Maß;
- Eigenschaft der Zerlegungsgleichheit (das Maß des Objekts ist gleich der Summe der Maße der Teilobjekte);
- wird ein Objekt mit Maß M einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k unterworfen und hat das gestreckte Objekt das Maß M' , so gilt $M' = |k|^D \cdot M$, wobei D die Dimension der Objekte ist.

Die letzte Formel kann man benutzen, um bei unbekannter Dimension D diese zu bestimmen:

Bei der Vergrößerung von \mathfrak{R} um den Faktor $\frac{r+s}{s}$ findet man m zu \mathfrak{R} kongruente Komponenten, für die Dimension $D = D(\mathfrak{R})$ gilt also

$$\left(\frac{r+s}{s} \right)^D = m,$$

woraus sofort

$$(5) \quad D(\mathfrak{R}) = \frac{\log(m)}{\log(s+r) - \log(s)}$$

folgt.

6 Rekursive Darstellung von \mathfrak{R}

Die Zerlegung von \mathfrak{R} in m Komponenten zeigt, wie man sich die bisher eher unanschauliche Menge \mathfrak{R} leichter vorstellen kann:

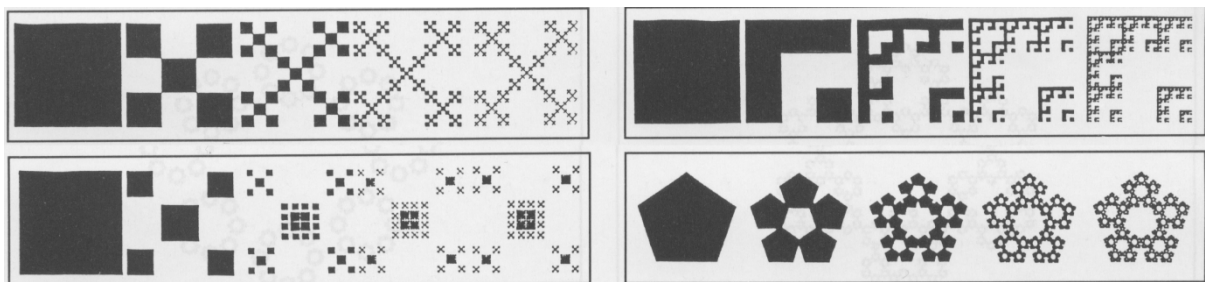
Es sei A die konvexe Hülle der m Punkte A_1, \dots, A_m . Die Menge \mathfrak{R} ist bekanntlich Teilmenge von A . Für die folgende Rekursion

$$(6) \quad \mathfrak{R}_1 = A, \mathfrak{R}_n = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(\mathfrak{R}_{n-1}) \text{ für } n > 1$$

folgt aus dem Bisherigen sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathfrak{R}_n) = \mathfrak{R}.$$

Die Näherungen \mathfrak{R}_n lassen sich leicht durch ein Computerprogramm graphisch darstellen und geben so einen guten Eindruck von der Struktur der Menge \mathfrak{R} . Einige Beispiele sind in den folgenden Bildern dargestellt. Dabei wurden die gleichen Ecken A_1, \dots, A_m wie bei den Bildern der „Zufallsfraktale“ in 1, Fig. 4, 5, 7 und 8, verwendet und jeweils die ersten 5 Rekursionen gezeichnet. Die entsprechenden Bilder für die Ausgangsfiguren in 8.8.1 finden sich z. B. in [5].



Literatur

- [1] Barnsley, M: Fractals everywhere. Academic Press, Boston 1988.
- [2] Bielig-Schulz, G. & C. Schulz: Algorithmische Geometrie – neue Motivation für die Oberstufegeometrie aus der Informatik? In: MNU (1991), S. 361-366.
- [3] Giessmann, E.-G.: Über den fraktalen Charakter des Sierpinski'schen Dreiecks. In: MNU (1992), S. 51-52.
- [4] Henn, H. W: Das Schneeflockenland und andere Fraktale. In: MNU (1989), Heft 6, S. 43-61.
- [5] Henn, H. W: Fraktale – einmal anders. In: PM (1991), S. 170-177.
- [6] Herfort, P.: Abbildungsgeometrie mit dem Computer – Anregungen für den Unterricht in analytischer Geometrie. In: BzMU 1990, S. 125-128.
- [7] Herfort, P.: Unendliche Wiederkehr in endlichen Figuren – ästhetischer Reiz und Quelle von Erkenntnis. In: BzMU 1991, S. 258-261.
- [8] Peitgen, H.-O., H. Jürgens & D. Saupe: Fractals for the Classroom. Springer, Berlin 1992.