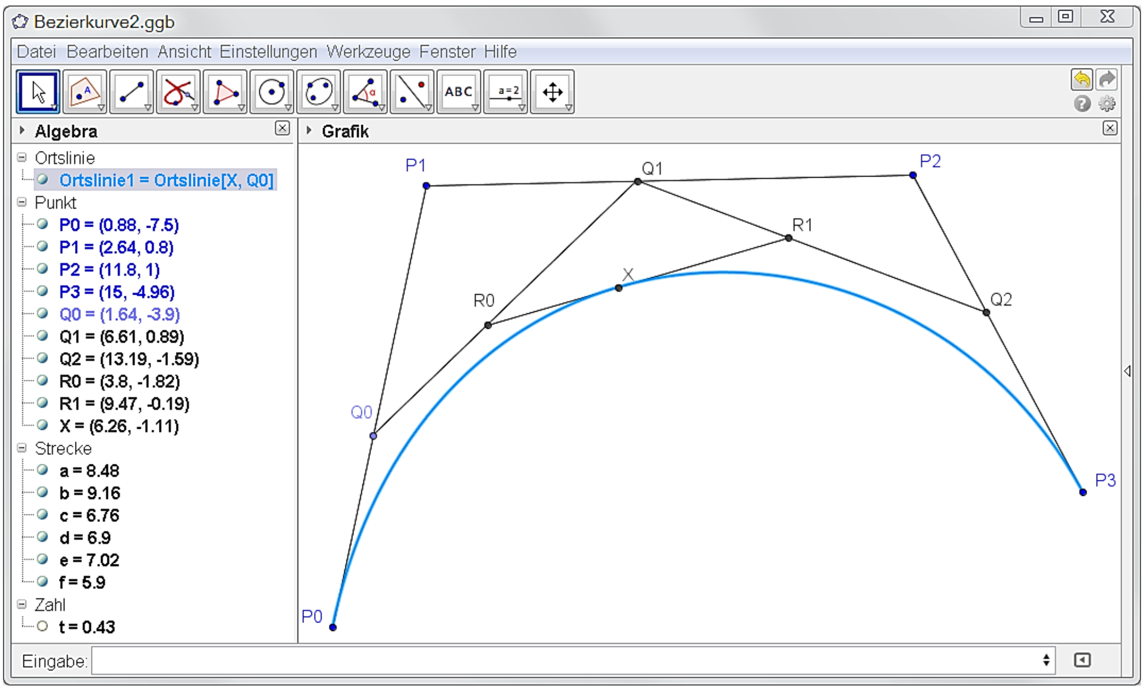
Andreas Filler, Humboldt-Universität zu Berlin

# Bézierkurven 1: Konstruktion eines (kubischen) Bézierkurvenstücks in GeoGebra

1. Erzeugen Sie vier Kontrollpunkte $P_0 \ldots P_3$ und die Verbindungsstrecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$.
2. Platzieren Sie einen Punkt auf der Strecke $\overline{P_0P_1}$ („Punkt auf Objekt“), nennen Sie ihn $Q_0$.
3. Nun muss ermittelt werden, in welchem Verhältnis Punkt $Q_0$ die Strecke $\overline{P_0P_1}$ teilt (wir benötigen dann auf den anderen Strecken Punkte mit demselben Teilungsverhältnis):
   **`Abstand[P0, Q0] / Abstand[P0, P1]`**
   Wir nennen diese Zahl (die links im Algebra-Fenster erscheint) $t$. Wenn man $Q_0$ von $P_0$ nach $P_1$ verschiebt, sollte sich $t$ von 0 bis 1 verändern.
4. Nun werden auf den Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$ Punkte $Q_1$ bzw. $Q_2$ erzeugt, die diese Strecken ebenfalls im Verhältnis $t$ teilen. Hierfür gibt es viele Möglichkeiten, besonders einfach gibt man in GeoGebra ein: **`P1 + t (P2 - P1)`** und **`P2 + t (P3 – P2)`**.

   Zur Probe, ob das wie gewünscht funktioniert hat, bewegen wir $Q_0$ auf $\overline{P_0P_1}$; die neu erzeugten Punkte sollten sich dabei auf „ihren“ Strecken entsprechend bewegen.

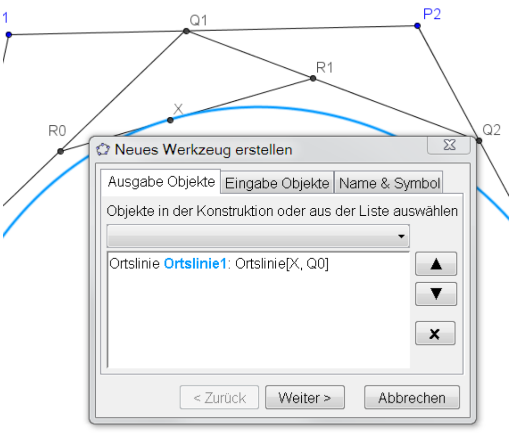
   *Der erste Schritt des de-Casteljau-Algorithmus ist damit abgeschlossen und wir kommen zum zweiten Schritt.*
5. Wir verbinden $Q_0$ und $Q_1$ sowie $Q_1$ und $Q_2$ durch Strecken und erzeugen auf diesen Strecken erneut Teilungspunkte mit dem Teilungsverhältnis $t$ (wie unter 4. beschreiben). Diese werden im Folgenden mit $R_0$ bzw. $R_1$ bezeichnet.
6. Im dritten (und wenn man von vier Punkten ausgeht) letzten Schritt des de-Casteljau-Algorithmus verbinden wir $R_0$ und $R_1$ durch eine Strecke, auf der wir wiederum einen Teilungspunkt mit dem Teilungsverhältnis $t$ erzeugen. Wir nennen diesen Punkt $\boldsymbol{X}$; es ist der „Zeichenstift“, der das Bézierkurvenstück generieren wird.
7. Schalten Sie die Spur des Punktes $\boldsymbol{X}$ ein und bewegen Sie $Q_0$ auf $\overline{P_0P_1}$.
8. Schalten Sie die Spur wieder aus und erzeugen Sie die Ortslinie von $\boldsymbol{X}$ in Abhängigkeit von $Q_0$. Bewegen Sie Kontrollpunkte $P_0 \ldots P_3$ „nach Herzenslust“.

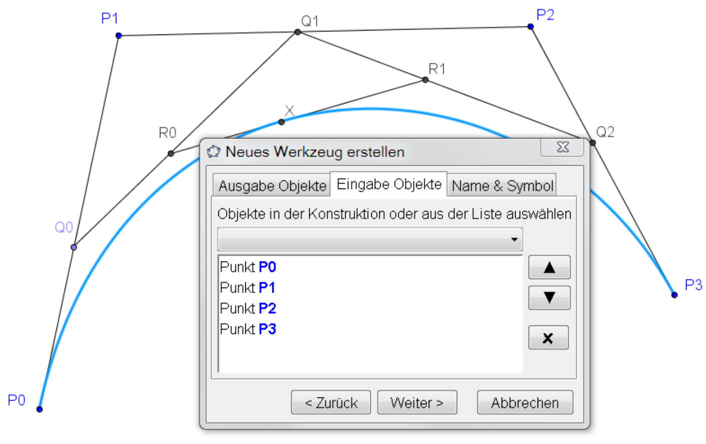


## Bézierkurven 2: Erzeugen eines neuen Werkzeugs „Bézierkurvenstück“; Zeichnen zusammengesetzter Bézierkurven

Um komplexere Formen zu zeichnen, benötigt man natürlich mehrere Bézierkurvenstücke, die geeignet aneinander gefügt werden müssen. Dazu lässt sich aus der vorher durchgeführten Konstruktion ein neues „Werkzeug“ erstellen:

1. Wählen Sie in GeoGebra Werkzeuge → Neues Werkzeug. Wählen Sie als *Ausgabeobjekt* die zuvor erstellte Bézierkurve.
2. Wenn Sie nun auf *Eingabeobjekte* gehen, werden schon die „richtigen“ Objekte, nämlich die Punkte $P_0 \ldots P_3$ angezeigt.

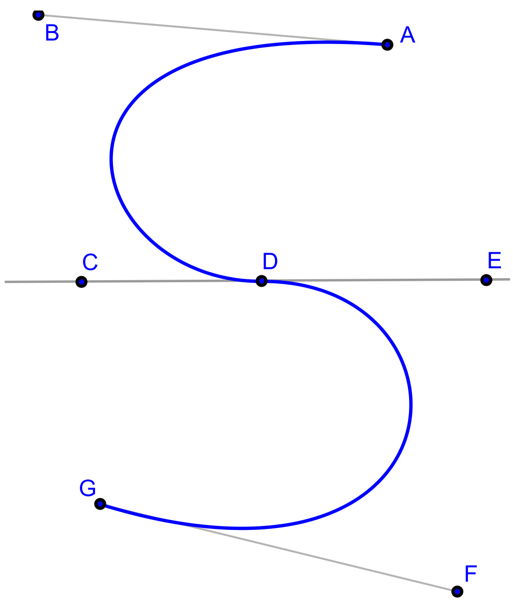



3. Geben Sie dem neuen Werkzeug nun noch einen Namen und aktivieren Sie die Anzeige eines Symbols in der Werkzeugleiste.
4. Ganz rechts in der Werkzeugleiste steht nun das neue Werkzeug „Bézierkurvenstück“  zur Verfügung.

Löschen Sie jetzt alle Elemente Ihrer bisherigen Konstruktion und konstruieren Sie „schöne Dinge“ mit dem neuen Werkzeug. Nach dem Auswählen von vier Punkten (oder einfach viermaligem Klicken, wobei entsprechende Kontrollpunkte erzeugt werden) wird jeweils ein Bézierkurvenstück generiert.

Meist möchte man glatte Übergänge zwischen zwei einzelnen Kurvenstücken erreichen. Dies ist möglich, indem man durch die letzten beiden Kontrollpunkte des ersten Kurvenstücks (hier *C* und *D*) eine Gerade legt und als ersten Punkt des zweiten Kurvenstücks den letzten Punkt des ersten Kurvenstücks (*D*) wählt. Der zweite Punkt des zweiten Kurvenstücks (*E*) wird dann auf der konstruierten Geraden platziert – diese ist dadurch gemeinsame Tangente an beide Kurvenstücke in *D*. (Die Kontrollpunkte und Hilfsgeraden können Sie natürlich später ausblenden, denn sie werden Ihre Kunstwerke beeinträchtigen.)




Lassen Sie nun Ihrer Kreativität freien Lauf.