Dandelin'sche Kugeln für Hyperbeln und Parabeln

Im Falle der ***vermuteten Hyperbel*** betrachten wir die folgende Abb. 5.45 a:

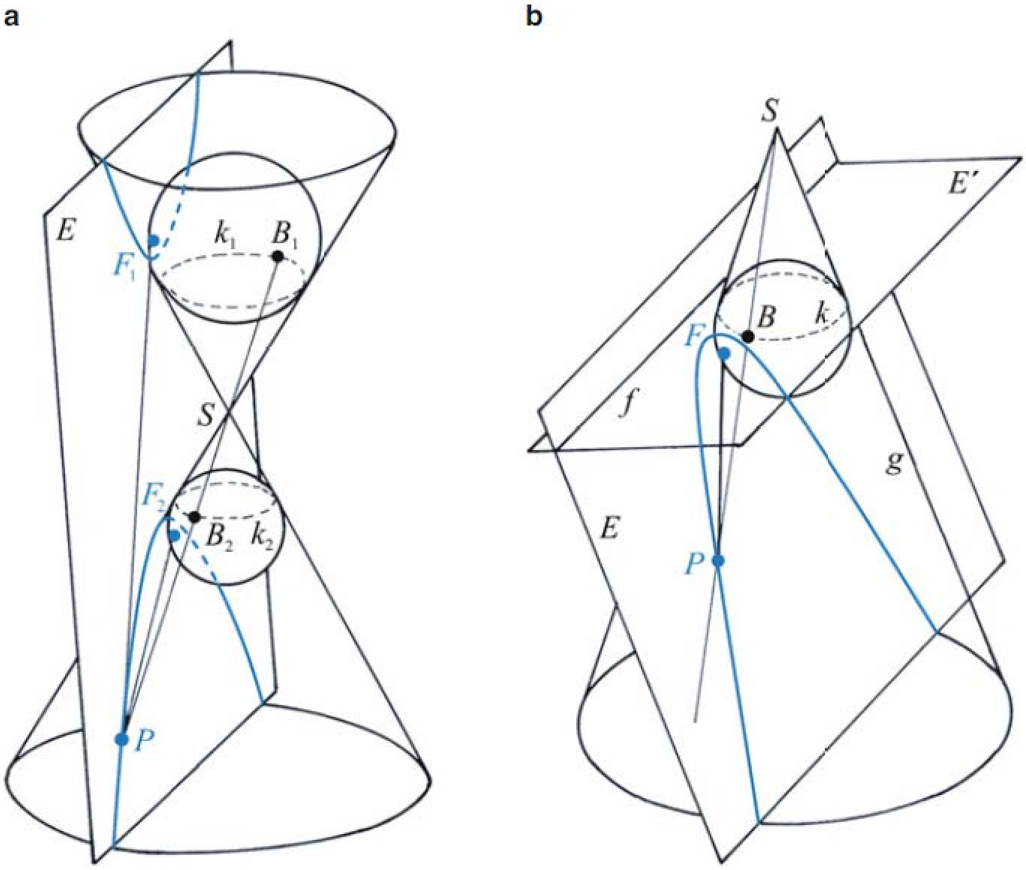

Abb. 5.45 **a** Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel, **b** Dandelin'sche Kugel für die Parabel

Die Schnittebene E schneidet beide Teile des Doppelkegels. Wir „schieben" im oberen und im unteren Teil des Doppelkegels zwei Dandelin'sche Kugeln ein, die die Schnittebene in den Punkten F_1 bzw. F_2 und den Doppelkegel in jeweils einem Berührkreis berühren. P ist ein beliebiger Punkt der fraglichen Schnittfigur, im Bild gehört P zum unteren Ast der Schnittfigur. Aus den Tangenteneigenschaften gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PT_1} \text{ und } \overline{PF_2} = \overline{PT_2}\,.$$

Des weiteren gilt

$$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} + \overline{T_2T_1}\,.$$

Die Strecke T_2T_1 ist aber jeweils Teil einer Mantellinie, d.h. $\overline{T_2T_1}$ ist eine Konstante für alle Punkt P der fraglichen Schnittfigur. Also gilt

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{T_2T_1} = \text{konstant}\,,$$

die Schnittfigur genügt also der geometrische Definition der Hyperbel als Ortslinie.

Im Falle der ***vermuteten Parabel*** betrachten wir Abb. 5.45 b: Jetzt ist die Schnittebene E parallel zu einer Mantellinie g des Kegels durch Z. Die Kugel berührt die Ebene E im Punkt F und den Kegel in einem Kreis k, der die Ebene E' definiert. Die Ebenen E und E' schneiden sich in der Geraden f. Wir werden zeigen, dass die Gerade f und der Punkt F gerade die geometrische Definition der Parabel für die fragliche Schnittfigur erfüllen: Für einen beliebigen Punkt P der Schnittfigur betrachten wir die Gerade ZP. Sie schneidet den Kreis k im Punkt M.

Die Mantellinie g möge die Kreisebene E' im Punkt M_1 schneiden. Das schraffierte Dreieck PP_1P_0 liegt in einer Ebene E'' || E' durch P. Dabei liegt P_0 auf der Parallelen zu g durch F und P_1 auf g. L_0 ist der Schnittpunkt mit f. Der Punkt $L \in f$ ist so, dass LP || L_0P_0 gilt. Daher ist das Viereck $P_oL_oM_1P_1$ ein Parallelogramm.
Weiter gilt:

- $\overline{PF} = \overline{PM}$, da beide zugehörige Strecken auf Tangenten von P an die Kugel liegen.
- $\overline{PM} = \overline{P_1M_1}$, da beide zugehörigen Strecken zu den Mantellinien ZP bzw. ZP_1 gehören und durch die Ebenen E' und E'' begrenzt werden.
- $\overline{PL} = \overline{P_0L_0} = \overline{P_1M_1}$ wegen der Rechteck- und Parallelogramm-Eigenschaft.

Zusammen haben wir also:
Für jeden Punkt P der Schnittfigur ist der Abstand $\overline{PL}$ von der „Leitgeraden“ f gleich dem Abstand $\overline{PF}$ vom „Brennpunkt“, d. h. die Schnittfigur erfüllt die geometrische Definition der Parabel als Ortslinie.