Nachweis: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ und $F_2\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.

Es ist zu zeigen, dass $||F_1P| - |F_2P||$ für alle Punkte $P(x; \frac{1}{x})$ mit $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gleich, also unabhängig von x ist. Wir berechnen dazu $(|F_1P| - |F_2P|)^2$:

$$\begin{aligned}(|F_1P| - |F_2P|)^2 &= \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-x\right)^2 + \left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(-\sqrt{2}-x\right)^2 + \left(-\sqrt{2}-\tfrac{1}{x}\right)^2}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2}-x\right)^2 + \left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{x}\right)^2 \ + \ \left(\sqrt{2}+x\right)^2 + \left(\sqrt{2}+\tfrac{1}{x}\right)^2 \\ &\quad - 2\sqrt{\left(\left(\sqrt{2}-x\right)^2 + \left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{x}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{2}+x\right)^2 + \left(\sqrt{2}+\tfrac{1}{x}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter der letzten Wurzel lässt sich zu $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$ vereinfachen. Damit (und nach Vereinfachung der darüber stehenden Zeile) ergibt sich

$$\begin{aligned}(|F_1P| - |F_2P|)^2 &= 8 + 2\,x^2 + 2\tfrac{1}{x^2} \ - \ 2\sqrt{x^4 + \tfrac{1}{x^4} + 2} \\ &= 8 + 2\,x^2 + 2\tfrac{1}{x^2} \ - \ 2\left(x^2 + \tfrac{1}{x^2}\right) \ = \ 8\,.\end{aligned}$$

Es gilt somit $||F_1P| - |F_2P|| = \sqrt{8}$ für alle Punkte P des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Alle Punkte des Funktionsgraphen gehören somit zu der Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 sowie dem Abstand der Scheitelpunkte $2a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Ohne Beweis sei angemerkt, dass umgekehrt alle Punkte dieser Hyperbel auch Punkte des Funktionsgraphen sind.