Zusätzliche Aufgaben zu dem Abschnitt 4.3

1. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die Q enthält und zu ε parallel ist.

a) $Q(7;6;19)$, $\varepsilon:\begin{pmatrix}-10\\6\\-11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-4\end{pmatrix}=0$ b) $Q(0;0;0)$, $\varepsilon: 15x-5y+8z=34$

2. Von einer Ebene ε sind ein Punkt P_0 und ein Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben. Geben Sie eine Normalengleichung und eine Parametergleichung von ε an.

a) $P_0(6;8;-12)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-6\\7\\13\end{pmatrix}$ b) $P_0(4;-5;9)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-36\\17\\20\end{pmatrix}$

3. Gegeben sind die Punkte $P\,(-2;5;6)$, $Q\,(3;4;-1)$ und $R\,(0;10;10)$. Berechnen Sie die Schnittwinkel der folgenden Paare von Geraden:

a) PQ und PR b) PQ und QR c) PR und QR

4. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen ε_1 und ε_2 mit
$\varepsilon_1: 33x-7y-15z=22$, $\varepsilon_2: -18x+20y-8z=-12$.

5. Berechnen Sie die Längen der Höhen des Dreiecks ΔABC mit $A\,(0;5)$, $B\,(4;7)$, $C\,(6;-3)$

6. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(3;6;10)$ von der Geraden
$g: \vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\8\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\-6\\1\end{pmatrix}$

7. Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;1;0)$, $B(4;1;0)$, $C(2;4;1)$ und $D(2;3;3)$, siehe die Abbildung unten.

a) Geben Sie Parametergleichungen für die Geraden AB, BC, AC, AD, BD und CD an, auf denen die Kanten des Tetraeders liegen.

b) Stellen Sie für die Ebenen ABC, ABD, BCD und ACD Gleichungen in der Hesseschen Normalform auf.

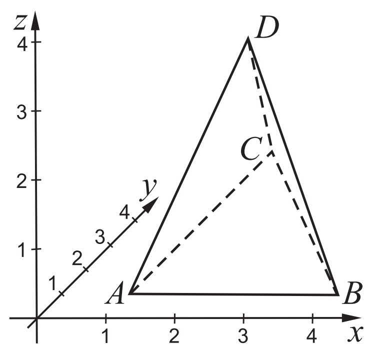
c) Berechnen Sie den Abstand jedes Eckpunktes des Tetraeders $ABCD$ von der gegenüberliegenden Seitenfläche.

d) Berechnen Sie die Abstände zwischen den jeweils gegenüberliegenden Kanten.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ACD.

f) Bestimmen Sie die Größen der Winkel zwischen der Ebene ABC und den Kanten AD, BD sowie CD.

g) Bestimmen Sie die Winkel zwischen der Ebene ABC und den Ebenen ABD, BCD sowie ACD.



Lösungen

1. a) $\begin{pmatrix}-10\\6\\-11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-7\\y-6\\z-19\end{pmatrix}=0$ bzw. $-10x+6y-11z=-243$

b) $15x-5y+8z=0$

2. a) Normalengleichung: $\begin{pmatrix}-6\\7\\13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-6\\y-8\\z+12\end{pmatrix}=0$

Parametergleichung: $\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\8\\-12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}$

b) Normalengleichung: $\begin{pmatrix}-36\\17\\20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y+5\\z-9\end{pmatrix}=0$

Parametergleichung: $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\-5\\9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\12\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$

3. a) $\angle(PQ,PR)\approx 66{,}7^\circ$

b) $\angle(PQ,QR)\approx 28{,}6^\circ$

c) $\angle(PR,QR)\approx 38{,}1^\circ$

4. Nach Satz 4.2 auf S. 157 sind $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}33\\-7\\-15\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-18\\20\\-8\end{pmatrix}$ Normalenvektoren von ε_1 bzw. ε_2. Für den Schnittwinkel α ε_1 und ε_2 ergibt sich:

$$\cos\alpha=\frac{|-33\cdot 18-7\cdot 20+15\cdot 8|}{\sqrt{33^2+7^2+15^2}\cdot\sqrt{18^2+20^2+8^2}|}\approx\frac{|-614|}{1036,4}\approx 0,5925$$

und somit $\alpha\approx 53{,}67^\circ$.

5. $h_a\approx 4{,}31,\ h_b=4{,}4,\ h_c\approx 9{,}84$

6. $d(Q,g)\approx 2{,}67$

7. a) $AB\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ BC\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},$

$AC\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ AD\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$

$BD\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix},\ CD\colon\ \vec{p}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

b) $ABC\colon\ \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}=0,\ ABD\colon\ \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}=0,$

$BCD\colon\ \frac{1}{\sqrt{69}}\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y-1\\z\end{pmatrix}=0,\ ACD\colon\ \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}=0$

c) $d(D,ABC)=\frac{7}{\sqrt{10}}\approx 2{,}214,\ d(C,ABD)=\frac{7}{\sqrt{13}}\approx 1{,}941,$

$d(A,BCD)=\frac{21}{\sqrt{69}}\approx 2{,}528,\ d(B,ACD)=\frac{21}{\sqrt{54}}\approx 2{,}858$

d) $d(AB,CD)\approx 3{,}131,\ d(AC,BD)\approx 1{,}788,\ d(AD,BC)\approx 1{,}732$

e) $A(\overline{ACD}) \approx 3{,}67$

f) $\angle(ABC, AD) \approx 36{,}27^\circ$, $\angle(ABC, BD) \approx 32{,}47^\circ$,
$\angle(ABC, CD) \approx 81{,}87^\circ$

g) $\angle(ABC, ABD) \approx 37{,}87^\circ$, $\angle(ABC, BCD) \approx 85{,}63^\circ$,
$\angle(ABC, ACD) \approx 87{,}53^\circ$