Klonen ist möglich! – Das Banach-Tarski-Paradoxon

Teilnehmer:

2 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmnende des	Herder-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Immanuel-Kant-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Henry Gohlke — Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Pascal Führing — Humboldt-Universität zu Berlin

1. Einleitung

Wir wollen uns in dieser Gruppe mit einer der wahrscheinlich verblüffendsten Aussagen der Mathematik befassen, dem Banach-Tarski Paradoxon. Es sagt aus, dass eine Kugel in Teile zerlegt werden kann, die, anders zusammengesetzt, zwei volle Kugeln ergeben, jede gleich groß wie die ursprüngliche!
Dies kann man wie folgt präziser formulieren:

Banach-Tarski-Paradoxon (1924). Es bezeichne K eine Kugel im $\mathbb{R}^3$. Dann gibt es paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ von K und Bewegungen $g_1, g_2, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ derart, dass $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i A_i$ und $K = \bigsqcup_{j=1}^{m} h_j B_j$.

Das Paradoxon geht sogar noch weiter und sagt, dass zwei beliebige beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ (mit nichtleerem Inneren) ineinander zerlegt werden können. Man könnte also eine Rosine so zerlegen, dass man mit den Teilen die gesamte Sonne ausfüllen kann. Der Beweis dieser Aussage erfordert aber die Entwicklung umfangreicherer Theorien und technische Feinarbeit, welche den Rahmen dieses Kurses überschreiten.

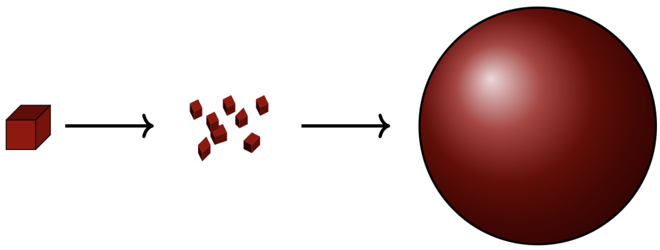


Illustration der stärkeren Version des Banach-Tarski Paradoxons

Diese Aussagen klingen höchst paradox und scheinen auf den ersten Blick dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen. Sie scheinen nämlich die Verdopplung von Volumina zu ermöglichen. So sehr dies auch zunächst verblüffen mag, wird sich nach gründlicher Analyse des Beweises des Banach-Tarski Paradoxons zeigen, dass jenes recht schnell seine (scheinbar) paradoxe Natur verliert und zu einem ganz gewöhnlichen mathematischen Satz wird, der bewiesen und verstanden werden kann.
Wir werden in dieser Gruppe zunächst schrittweise den Beweis der obigen Fassung des Banach-Tarski Paradoxons nachvollziehen und erarbeiten. Dafür müssen wir insbesondere Erkenntnisse aus der Mengenlehre, der Gruppentheorie sowie der linearen Algebra erarbeiten und nutzen.
Anschließend an den Beweis beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Konsequenzen das Paradoxon sowohl für die Mathematik als auch unsere physikalische Realität hat. Im Beweis werden wir außerdem auf das sogenannte Auswahlaxiom angewiesen sein, dessen Annehmbarkeit in der Mathematik lange umstritten war. Steckt in diesem also des Pudels Kern? Finden wir es gemeinsam heraus!

2. Vorbereitungen

2.1. Grundlagen Gruppentheorie

Der Kern des Beweises beruht auf der Gruppentheorie. Deshalb ist es zunächst sinnvoll, sich mit der Definition von Gruppen, Gruppenoperationen sowie Bahn und Stabilisator zu beschäftigen.

Definition 1. Es sei G eine nichtleere Menge mit einer inneren Verknüpfung $\circ$. Es heißt $(G, \circ)$ eine **Gruppe**, wenn:

- *Assoziativgesetz:* Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- *Existenz eines neutralen Elements:* Es existiert ein $e \in G$ mit $e \circ a = a = a \circ e$ für alle $a \in G$.
- *Jedes Element ist invertierbar:* Zu jedem $a \in G$ existiert ein $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \circ a = e = a \circ a^{-1}$.

Eine Gruppe, in welcher das Kommutativgesetz $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt, nennt man **abelsch**. Im Folgenden lassen wir das Verknüpfungzeichen $\circ$ weg und schreiben ab anstelle von $a \circ b$. Manchmal ersetzen wir auch $\circ$ durch $\cdot$ zur besseren Lesbarkeit.

Einfache (nichtleere) Mengen haben selbst keine wirkliche Struktur. Es ist aber möglich, jenen mithilfe einer Gruppe ähnliche Struktureigenschaften zu verschaffen. Dies wird ermöglicht durch die Verwendung von sog. *Gruppenoperationen.*

Definition 2. Eine **Gruppenoperation** einer Gruppe G auf einer nichtleeren Menge X ist eine Abbildung

$$\bullet : G \times X \to X \qquad (a, x) \mapsto a \bullet x$$

mit den Eigenschaften:

(1) $e \bullet x = x$ für jedes $x \in X$ und das neutrale Element $e \in G$.
(2) $(ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$ für alle $a, b \in G$ und $x \in X$.

Wir sagen dann auch, dass G auf X operiert bzw. wirkt.

Wir werden, wie auch bei der Gruppenverknüpfung, im Kontext einer Gruppenoperation die Verwendung von $\bullet$ unterdrücken oder durch $\cdot$ ersetzen.

Definition 3. Sei eine Operation von einer Gruppe G auf X gegeben und sei $x \in X$. Dann heißt $Gx = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$ **Orbit** von x unter der Wirkung von G.

Definition 4. Sei eine Operation von einer Gruppe G auf X gegeben und sei $x \in X$. Dann heißt $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$ der **Stabilisator** von x unter der Wirkung von G.

Definition 5. Eine Gruppenoperation heißt fixpunktfrei, falls der Stabilisator jedes Elementes nur das neutrale Element enthält.

Lemma 1. *Operiert eine Gruppe G auf X, so ist die Menge $\{Gx \mid x \in X\}$ aller Orbits eine Partition von X.*

Beweis: Für jedes Element $x \in X$ gilt $x = e \cdot x \in Gx$, da G auf X operiert. Somit ist klar, dass $X = \bigcup_{x \in X} Gx$. Nun ist noch zu zeigen, dass $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn $Gx = Gy$. Falls also $w \in Gx \cap Gy \neq \emptyset$, dann existieren $a, b \in G$ mit $w = a \cdot x = b \cdot y$. Sei nun $z = cx \in Gx$ beliebig. Dann folgt:

$$a \cdot (c^{-1} \cdot z) = b \cdot y \Rightarrow z = (ca^{-1}b) \cdot y \in Gy.$$

Damit gilt also $Gx \subseteq Gy$. Analog zeigt man $Gy \subseteq Gx$, sodass insgesamt $Gx = Gy$ gilt. $\square$

2.2. Äquivalenzrelationen

Der Begriff der Äquivalenzrelation ist ein fundamentales Hilfsmittel der Mathematik. Damit können wir Elemente einer Menge, die sich in einer gewissen Hinsicht gleichen, als gleichwertig bzw. *äquivalent* ansehen.

Definition 6. Es sei X eine Menge. Dann heißt $R \subseteq X \times X$ eine **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $x, y, z \in R$ gilt:

- $(x, x) \in R$ (Reflexivität)
- Aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$ (Symmetrie)
- Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$ (Transitivität)

Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, so schreibt man üblicherweise anstelle von $(x, y) \in R$ auch $x \sim y$. Diese Notation werden wir im Folgenden verwenden.

2.3. Auswahlaxiom

Im Beweis des Banach-Tarski Paradoxons werden wir auf das Auswahlaxiom angewiesen sein. Um die Aussage jenes zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

Es sei M eine Menge von Mengen, also z.B.: $M = \{[0, 1], [5, 8], [1, 6]\}$. Wir wollen nun aus jeder Menge, die in M enthalten ist genau ein Element *auswählen*. Eine Abbildung, die diesen Prozess beschreibt, nennen wir **Auswahlfunktion**. In unserem Fall können wir eine solche Auswahlfunktion konkret angeben, z.B. durch: $F([0, 2]) = 1$, $F([5, 8]) = 7$, $F([1, 6]) = 4$.

Leider ist es i.A. nicht möglich, bei jeder Menge von Mengen eine solche Auswahlfunktion konkret hinzuschreiben. Deshalb muss man die Existenz einer solchen Funktion axiomatisch fordern:

Auswahlaxiom. Für jede Menge nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion.

3. Paradoxe Mengen und freie Gruppen

Die in der Einleitung angedeutete Vorstellung, dass man eine Menge in disjunkte Teilmengen zerlegt und diese durch geeignete Bewegungen in zwei der ursprünglichen Mengen überführen kann, motiviert die folgende Definition:

Definition 7. Eine Gruppe G wirke auf einer Menge X und $E \subseteq X$. Dann ist E paradox bezüglich G (kurz: G-paradox), wenn paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ von E und $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$ existieren, sodass $E = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i A_i$ und $E = \bigsqcup_{j=1}^{m} h_j B_j$.

Bemerkung 1. Mithilfe der nun zur Verfügung stehenden Begriffe können wir bereits das in der Einleitung fomulierte Theorem, zumindest in einer möglichen Form, sehr prägnant formulieren: Jeder Ball im $\mathbb{R}^3$ ist paradox bezüglich der Isometriegruppe G_3 auf $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 2. Jede Gruppe wirkt durch Linksmultiplikation auf sich selbst. Falls also im Kontext der vorangegangenen Definition $X = E = G$ gilt, nennt man die Gruppe G paradox.

Wir betrachten nun alle (endlichen) *Wörter*, die aus den Elementen der Menge $\{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ gebildet sind. Wir verlangen zudem, dass diese Wörter reduziert sind, d.h. dass zwei zueinander inverse Elemente nicht unmittelbar aufeinandertreffen, da man sie ja sonst wegkürzen kann. Wir fassen alle jene Wörter zusammen zu einer Menge und bezeichnen diese als F_2. Diese Menge weist eine Gruppenstruktur auf, was man sich leicht plausibel machen kann. Haben wir z.B. das Wort $w_1 = \sigma^2\tau^{-1}$ und $w_2 = \tau\sigma^{-1}\tau\sigma\tau$, so ergibt sich für das Produkt

$$w_1 w_2 = (\sigma\sigma\tau^{-1})(\tau\sigma^{-1}\tau\sigma\tau) = \sigma\tau\sigma\tau.$$

Die Elemente von F_2 weisen insbesondere keine Relationen untereinander auf, die nicht aus den Gruppenaxiomen folgen, wie z.B. $\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$. Aus diesem Grund nennt man F_2 eine **freie Gruppe**.

Der erste entscheidende Schritt für den Beweis des Paradoxons ist die einfache Beobachtung, dass die freie Gruppe etwas erfüllt, was unserer Intuition widerspricht, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1. *Die freie Gruppe F_2 ist F_2-paradox.*

Beweis: F_2 ist frei über der Menge $S = \{\sigma, \tau\}$. Für $x \in \{\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}\}$ sei jeweils $W(x)$ die Menge an Wörtern, die mit dem Element x beginnt. Es gilt $F_2 = \{e\} \sqcup W(\sigma) \sqcup W(\sigma^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1})$.
Sei nun $h \in F_2 \backslash W(\sigma^{-1})$, dann ist $\sigma h \in W(\sigma)$ und $h = \sigma^{-1}(\sigma h) \in \sigma^{-1}W(\sigma)$. Somit gilt also
$F_2 = W(\sigma^{-1}) \sqcup \sigma^{-1}W(\sigma)$. Ersetzt man σ durch τ so erhält man analog $F_2 = W(\tau^{-1}) \sqcup \tau^{-1}W(\tau)$. Man erhält also, dass F_2 paradox ist. □

Damit stellt sich die Frage, wie sich diese Eigenschaft auf Mengen auswirkt, auf denen F_2 durch eine Gruppenwirkung operiert. Insbesondere interessiert uns, ob auch solche Mengen selbst paradox sind, wenn F_2 auf ihnen **fixpunktfrei** wirkt. Dies führt uns zum nächsten zentralen Ergebnis:

Satz 2. *Ist G eine paradoxe Gruppe, die fixpunktfrei auf einer nichtleeren Menge X operiert, so ist X paradox bezüglich G.*

Beweis: G ist paradox, es existieren also $m, n \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ paarweise disjunkte Teilmengen von G und $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$, sodass gilt:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigsqcup_{j=1}^{n} h_j(B_j).$$

Sei M eine Menge, welche genau ein Element aus jedem Orbit von G enthält. Die Existenz von M wird dabei durch das Auswahlaxiom gesichert. Wir zeigen zunächst, dass

$$X = \bigsqcup_{g \in G} g(M) \tag{1}$$

gilt, was man wie folgt einsieht:
Sei $x \in X$ beliebig. Da M ein Element aus jedem G-Orbit enthält und die Orbits die Menge X partitionieren, muss genau ein $y \in M$ existieren, sodass $g \cdot y = x$ für ein $g \in G$ und somit $x \in g(M)$. Für die Disjunktheit nehmen wir an, dass $g(M) \cap h(M) \neq \emptyset$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $x, y \in M$ existieren, sodass $g \cdot x = h \cdot y$, woraus folgt: $x = g^{-1}h \cdot y \in Gy$. Somit gehören x und y zum selben Orbit. Da aber M per Konstruktion aus jedem G-Orbit nur ein einziges Element enthält, muss $x = y$ gelten. Aus $x = g^{-1}h \cdot x$ kann aber aufgrund der Tatsache, dass G fixpunktfrei auf X operiert, nur folgen, dass $g^{-1}h = e$ bzw. $g = h$ gilt.

Seien nun $A_i^* = \bigsqcup_{g \in A_i} g(M)$ und $B_j^* = \bigsqcup_{g \in B_j} g(M)$. Die Mengen $A_1^*, ..., A_n^*, B_1^*, ..., B_m^*$ sind wegen (1) paarweise disjunkte Teilmengen von X, weil $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ paarweise disjunkt sind. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i(A_i^*) &= \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i \bigsqcup_{g\in A_i} g(M)\\ &= \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{g\in A_i} g_i(g(M))\\ &= \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{g\in g_i(A_i)} g(M)\\ &= \bigsqcup_{g\in G} g(M)\\ &= X.\end{aligned}$$

Analog sieht man $\bigsqcup_{j=1}^{n} h_j(B_j^*) = X$. □

Korollar 1. Operiert die freie Gruppe F_2 auf X fixpunktfrei, so ist X paradox bezüglich F_2.

4. Das Hausdorff-Paradoxon

Das Hausdorff-Paradoxon ist einfacher zu zeigen, als das Banach-Tarski-Paradoxon, da es von $SO_3(\mathbb{R})$ nicht verlangt, das sie auf ganz S^2 fixpunktfrei operiert, sondern bereits $S^2 \setminus D$ ausreicht.

Satz 3. *Die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ enthält eine freie Gruppe, die von zwei Elementen erzeugt wird.*

Die freie Gruppe aus Satz 3 ist die von der Menge $\{\phi, \rho\}$ frei erzeugte Untergruppe von $SO_3(\mathbb{R})$, wobei ϕ und ρ Rotationen um die z-Achse bzw. x-Achse im Gegenuhrzeigersinn mit dem Winkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ sind. Diese ist natürlich isomorph (strukturgleich) zur anfangs betrachteten freien Gruppe F_2. Jedes Element dieser freien Gruppe fixiert genau zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$, wenn es auf die Einheitssphäre S^2 angewendet wird. Diese Punkte sind die Schnittpunkte der Rotationsachse mit der Sphäre. Das ist der Grund, weswegen wir Satz 2 nicht unmittelbar anwenden können, um das Banach-Tarski-Paradoxon zu erhalten.
Stattdessen erhalten wir folgende Aussage, die aufgrund ihrer bedeutsamen Folgerungen in der Maßtheorie dennoch von großer Bedeutung ist.

Satz 4 (Hausdorff-Paradoxon)**.** *Es gibt eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq S^2$, sodass $S^2 \setminus D$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ ist.*

Beweis: Es wirke die in Satz 3 betrachtete freie Gruppe F auf S^2. Jede Rotation verschieden der Identität fixiert genau zwei Punkte auf S^2, nämlich die Schnittpunkte von S^2 mit der Rotationsachse. Sei D die Menge, die alle jene Punkte enthält. Da F abzählbar ist, ist auch D abzählbar. Es verbleibt noch zu zeigen, dass die Operation von F mit $S^2 \setminus D$ innerhalb von $S^2 \setminus D$ abgeschlossen ist. Für $P \in S^2 \setminus D$ und $g \in F$ sollte also gelten $g(P) \in S^2 \setminus D$. Angenommen es gäbe ein $h \in F \setminus \{e\}$ mit $h(g(P)) = g(P)$, dann folgt $(g^{-1}hg)(P) = P$ und somit $P \in D$, was einen Widerspruch darstellt. Die anderen geforderten Eigenschaften sind trivialerweise erfüllt. Also operiert F fixpunktfrei auf $S^2 \setminus D$ und die Behauptung folgt mit Satz 2. □

5. Das Banach-Tarski-Paradoxon

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Menge D aus dem Hausdorff-Paradoxon zu eliminieren, um das Banach-Tarski Paradoxon zu erhalten. Um dies zu tun, reichen unsere Mittel aber noch nicht in Gänze aus. Aus diesem Grund führen wir die Zerlegungsäquivalenz ein und beweisen dazu einige wichtige Aussagen.

Definition 8. Es wirke G auf X und $A, B \subseteq X$. Die Mengen A und B nennt man G-äquizerlegbar ($A \sim_G B$), wenn gilt: Für $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ und $B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$ gibt es $g_1, ..., g_n \in G$, sodass $g_i(A_i) = B_i$ für alle $i \leq n$.

Bemerkung 3. Die Definition der Äquizerlegbarkeit bietet eine alternative Möglichkeit, die Paradoxie einer Menge zu definieren. Demnach ist E aus Definition 7 genau dann G-paradox, wenn E zwei disjunkte Teilmengen A und B enthält, sodass $A \sim_G E$ und $B \sim_G E$.

Ohne Beweis bemerken wir folgende wichtige Tatsachen.

Lemma 2. *Es wirke G auf X. Die Relation $A \sim_G B$ is eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$.*

Lemma 3. *Sei $A \sim_G B$. Dann existiert eine bijektive Funktion $f : A \to B$, sodass für jede Teilmenge C von A gilt, dass $C \sim_G f(C)$ ist.*

Lemma 4. *Wenn $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ und $A \sim_G B, C \sim_G D$, dann ist $A \cup C \sim_G B \cup D$.*

Der folgende Satz wird ein wichtiges Hilfsmittel sein, um unserem zentralen Ziel näher zu kommen.

Satz 5. *Es wirke G auf X und E, E' seien G-äquizerlegbare Teilmengen von X. Wenn E paradox bezüglich G ist, so ist es auch E'.*

Beweis: Da E paradox bezüglich G ist, existieren zwei disjunkte Teilmengen A und B von E, sodass $A \sim_G E$ und $B \sim_G E$. Zudem gilt nach Voraussetzung auch $E \sim_G E'$. Somit erhalten wir:

$$A \sim_G E \sim_G E' \text{ und } B \sim_G E \sim_G E'$$

Mit Transitivität folgt also, dass $A \sim_G E'$ und $B \sim_G E'$. Es existiert des Weiteren eine bijektive Funktion $g : E \to E'$ mit $A \sim_G g(A)$ und $B \sim_G g(B)$. Da g insbesondere injektiv ist, sind die Mengen $g(A)$ und $g(B)$ disjunkt.
Unter Ausnutzung von Symmetrie erhalten wir also:

$$E' \sim_G A \sim_G g(A) \text{ und } E' \sim_G B \sim_G g(B).$$

Und somit insgesamt durch Transitivität:

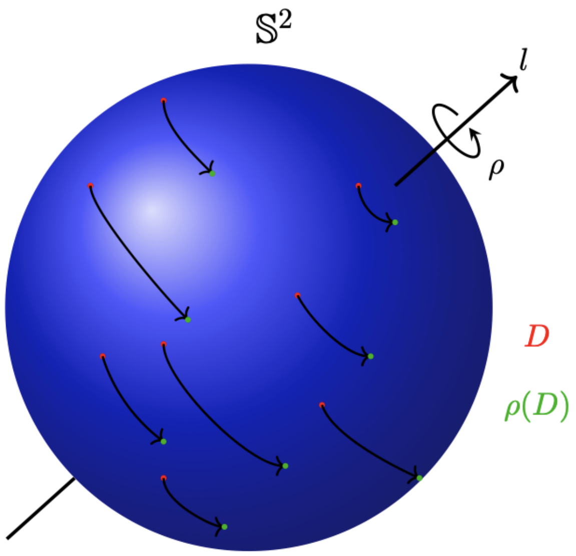
$$g(A) \sim_G E' \text{ und } g(B) \sim_G E'.$$

□

Es stehen nun genügend Mittel zur Verfügung, um die Menge D aus dem Hausdorff-Paradoxon zu eliminieren.
Entscheidend dafür ist, dass wir im letzten Abschnitt gesehen haben, dass die Paradoxie von einer Menge auf zu ihr äquizerlegbare Mengen vererbt wird. Können wir also zeigen, dass S^2 und $S^2 \backslash D$ äquizerlegbar bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ sind, so überträgt sich die Paradoxie unmittelbar auf S^2 und wir können das schwache Banach-Tarski Paradoxon folgern.

Satz 6. *Sei $D \subseteq S^2$ eine abzählbare Teilmenge, dann gilt $S^2 \sim S^2 \backslash D$.*

Beweis: Sei l eine (orientierte) Gerade durch den Ursprung, welche disjunkt zur Menge D ist. Dies ist möglich, weil aufgrund der Abzählbarkeit von D mindestens ein Punkt auf der Sphäre exitsiert, der nicht in D ist. Sei A die Menge von Winkeln θ, sodass für ein $n > 0$ und ein $P \in D$ gilt, dass $\rho(P) \in D$ ist, wobei ρ die Rotation um l mit dem Winkel $n\theta$ darstellt. Da D abzählbar ist, muss auch A abzählbar sein. Denn für ein $P \in D$ gibt es aufgrund der Abzählbarkeit von D und $\mathbb{N}$ höchstens abzählbar viele Winkel θ, sodass $\rho(P) \in D$, wobei ρ eine Drehung mit Winkel $n\theta$ ist. Wieder aus der Abzählbarkeit von D folgt dann, dass A abzählbar ist, da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.



D.h., insbesondere können wir $\theta \notin A$ wählen. Sei ρ die dazugehörige Rotation um l mit dem Winkel θ. Dann ist offenbar $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ für alle $n > 0$, denn $\rho^n(P) \notin D$ für beliebige $P \in D$, da ansonsten $\theta \in A$ sein müsste nach Konstruktion von A.
Sei des Weiteren $\bar{D} = D \cup \rho(D) \cup \rho^2(D) \cup ... = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho^n(D)$. Wenden wir ρ auf $\bar{D}$ an und nutzen, dass $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ für alle $n > 0$ gilt, so erhalten wir

$$\rho(\bar{D}) = \bar{D} \backslash D.$$

Offensichtlich ist $S^2 = \bar{D} \sqcup S^2 \backslash \bar{D}$, daher gilt

$$S^2 \backslash D = S^2 \backslash \bar{D} \sqcup \bar{D} \backslash D = S^2 \backslash \bar{D} \sqcup \rho(\bar{D}).$$

Es gilt außerdem $S^2 \backslash \bar{D} \sim_{SO_3} S^2 \backslash \bar{D}$ und da $\rho^{-1}(\rho(\bar{D})) = \bar{D}$ gilt auch $\bar{D} \sim_{SO_3} \rho(\bar{D})$. Somit erhalten wir insgesamt:

$$S^2 = S^2 \backslash \bar{D} \sqcup \bar{D} \sim_{SO_3} S^2 \backslash \bar{D} \sqcup \rho(\bar{D}) = S^2 \backslash D.$$

$\square$

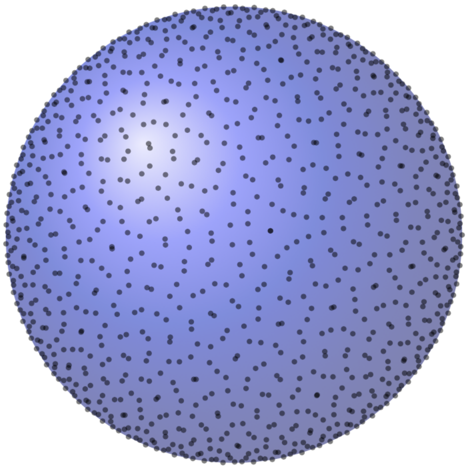
Korollar 2. S^2 ist $SO_3(\mathbb{R})$-paradox.

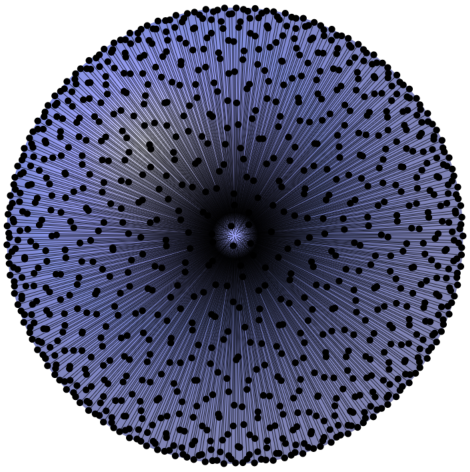
Bemerkung 4. Da wir keine Einschränkungen bezüglich des Radius der Sphäre gemacht haben, gilt Korrolar 2 für alle Sphären im Ursprung mit beliebigem Radius.

Satz 7. *Jeder Ball im $\mathbb{R}^3$ ist G_3-paradox*

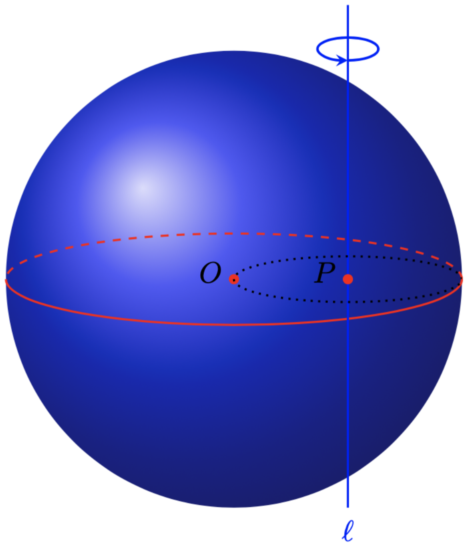
Beweis: Es genügt, den Beweis für den Einheitsball zentriert im Ursprung zu führen, da der Beweis erneut für beliebige Radien funktioniert und G_3 insbesondere Rotationen um beliebige Achsen enthält. Wir definieren dafür eine Abbildung φ folgendermaßen:

$$\varphi : \mathcal{P}(S^2) \to \mathcal{P}(B \backslash \{0\}) \text{ mit } A \mapsto \{\alpha p \,|\, p \in A,\, 0 < \alpha \leq 1\}$$





Diese Abbildung überträgt die paradoxe Zerlegung der Sphäre S^2 auf den Ball ohne Ursprung $B\backslash\{0\}$. Demnach ist $B\backslash\{0\}$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ und damit insbesondere G_3-paradox.
Es genügt also zu zeigen, dass $B \sim_{G_3} B\backslash\{0\}$. Wir nutzen dazu diesselbe Strategie wie im Beweis von Satz 6. Sei ρ eine Drehung unendlicher Ordnung, d.h. mit dem Winkelmaß $r\pi$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, um eine Gerade durch den Punkt $P = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, die nicht durch den Ursprung geht.



Sei außerdem $D = \{\rho^n(0) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $D \subseteq B$ ist. Des Weiteren gilt insbesondere aufgrund der speziellen Wahl von ρ

$$\rho(D) = D \backslash \{0\}.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$B = B\backslash D \sqcup D \sim_{G_3} B\backslash D \sqcup \rho(D) = B\backslash D \sqcup D\backslash\{0\} = B\backslash\{0\}.$$

Somit ist B auch G_3-paradox. □

6. Schlussfolgerung

Nachdem wir den Beweis nun vollständig nachvollzogen haben, stellt sich berechtigterweise die Frage, wie man die Aussage des Banach-Tarski-Paradoxons zu interpretieren hat. Dabei stellt sich heraus, dass die wichtigste Konsequenz in der Einsicht besteht, dass wir nicht allen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ in *sinnvoller* Weise ein Volumen zuordnen können. Unter sinnvoll verstehen wir, dass die Volumenfunktion μ für alle $A, B \subset \mathbb{R}^3$ wenigstens folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Positivität:** $\mu(A) \geq 0$.
- **Additivität:** $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, sofern $A \cap B = \emptyset$.
- **Bewegungsinvarianz:** $\mu(\beta(A)) = \mu(A)$ für jede Bewegung $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- **Normiertheit:** $\mu([0,1]^3) = 1$.

Eine Volumenfunktion, die diese Eigenschaften erfüllt, nennen wir *Inhalt*.

Man kann nun sehr leicht sehen, dass die Forderungen zur Volumendefinition für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem Banach-Tarski-Paradoxon zu Widersprüchen führt.

Satz 8. *Den Teilmengen aus dem Banach-Tarski-Paradoxon kann kein Volumen zugeordnet werden, das den obigen Eigenschaften genügt.*

Beweis: Sei K die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ mit $\mu(K) = 1$. Aufgrund der Paradoxie von K existieren paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ von E und $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$, sodass

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigsqcup_{j=1}^{n} h_j B_j$$

Damit ergibt sich aber folgender Widerspruch

$$\begin{aligned}
1 = \mu(K) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i(A_i)) + \sum_{j=1}^{m} \mu(h_j(B_j)) \\
&= \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i A_i\right) + \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} h_j B_j\right) \\
&= \mu(K) + \mu(K) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Somit können die Mengen $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ kein im obigen Sinne betrachtetes Volumen haben. □

Bemerkung 5. Es ist zu beachten, dass die Eigenschaft einer Menge kein Volumen zu besitzen nicht heißt, dass das Volumen null ist. Hat eine Menge das Volumen null, so hat sie ja ein Volumen, nur eben mit der Maßzahl null. Wir haben hier aber wirklich Mengen gefunden, denen wir diese Maßzahl gar nicht zuordnen können!

Korollar 3. Es gibt keine endlich-additive, bewegungsinvariante Volumenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu([0,1]^3) = 1$.

Bemerkung 6. Die Frage nach einer Volumenfunktion auf allen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, die den eingangs genannten Eigenschaften genügt, ist allgemein als das Inhaltsproblem bekannt. Wir haben hier somit gezeigt, dass Inhaltsproblem für $n = 3$ keine Lösung besitzt. Man kann auch zeigen, dass daraus folgt, dass es auch für $n \geq 3$ keine Lösung geben kann. Interessant ist aber, dass es für die Dimensionen $n = 1$ und $n = 2$ sehr wohl eine Lösung gibt. Allerdings sind diese nicht eindeutig bestimmt.