

Zeichnen mit Epizykeln

Teilnehmende:

2 Teilnehmende des
3 Teilnehmende des
2 Teilnehmende des
2 Teilnehmende des

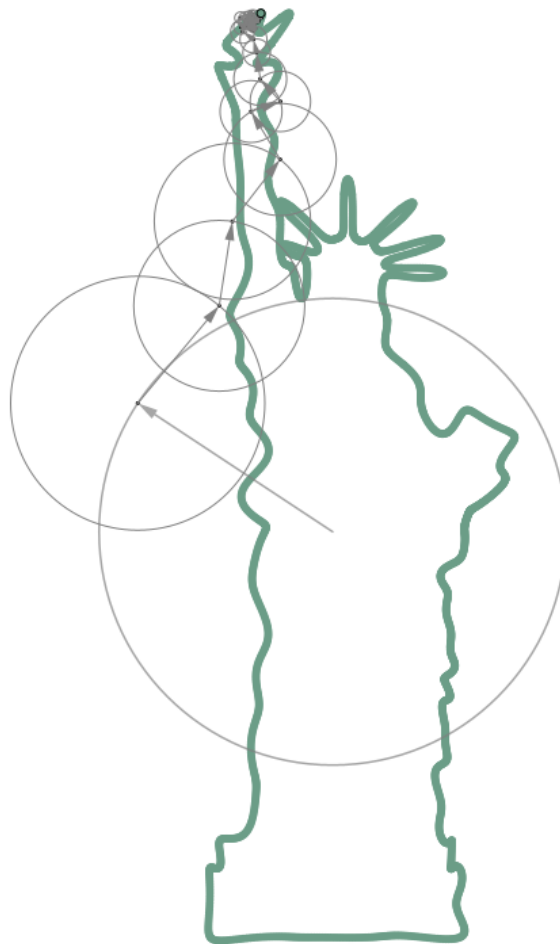
Heinrich-Hertz-Gymnasiums
Herder-Gymnasiums
Immanuel-Kant-Gymnasiums
Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Christian Thielecke

Andreas-Gymnasium

Gruppenleiter:
Christoph Lieben

Humboldt-Universität zu Berlin, BMS



1. Epizykel und ihre mathematische Darstellung

Ein Epizykel (von *epi* „auf“ und *kyklos* „Kreis“) ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt sich seinerseits auf einer Kreisbahn bewegt. Von der Antike bis zur Ablösung des geozentrischen Weltbildes in der frühen Neuzeit haben Astronomen die von der Erde aus beobachteten Planetenbahnen auf diese Weise zu erklären versucht. In der richtigen Konfiguration lassen sich mit hinreichend vielen Epizykeln sogar beliebige geschlossene Kurven beschreiben. Um zu erläutern, wie das funktioniert, führen wir zunächst die nötigen mathematischen Begriffe ein und leiten dann die *Diskrete Fourier-Transformation* her, die uns für eine gegebene Kurve die entsprechende Konfiguration von Epizykeln liefern wird.

Definition 1 (Kurve). Eine ebene *parametrisierte Kurve* ist eine Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

die Werte aus dem Parameterbereich $[a, b] \subset \mathbb{R}$ auf Punkte in der komplexen Ebene \mathbb{C} abbildet. Wir bezeichnen auch das Bild von γ als Kurve.

Aufgrund der trigonometrischen Beziehungen im Einheitskreis können wir diesen beispielsweise als Bild der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \cos t + i \sin t$$

darstellen. Dabei interpretieren wir $\gamma(t)$ als einen Vektor der Länge 1, der für $t \in [0, 2\pi]$ einmal um den Ursprung rotiert.

Durch die Addition mehrerer solcher Vektoren können wir dann Epizykel parametrisieren.

Beispiel 1 (Mondbahn). Die Erde E umkreise die Sonne S im Koordinatenursprung im Abstand 1 einmal, während der Mond M die Erde währenddessen im Abstand 0.4 zwölfmal umkreise. Dann lässt sich die Bahn der Erde durch $E : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$E(t) = 1.5(\cos t + i \sin t)$$

und die Bahn des Mondes durch die Kurve $M : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} M(t) &= E(t) + 0.4(\cos(12t) + i \sin(12t)) \\ &= 1.5(\cos t + i \sin t) + 0.4(\cos(12t) + i \sin(12t)) \end{aligned}$$

parametrisieren.

Im Allgemeinen ist die Kurve $B : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$B(t) = \sum_{r=1}^n (R_r \cos(\omega_r t + \varphi_r) + i R_r \sin(\omega_r t + \varphi_r))$$

eine Parametrisierung von n Epizykeln. Hierbei gibt R_r den Betrag, ω_r die Frequenz und φ_r den Startwinkel des r -ten rotierenden Vektors an.

Wir wollen die Parametrisierung vereinfachen und führen dazu weitere Begriffe ein.

Definition 2 (Die komplexe Exponentialfunktion). Wir definieren die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Potenzreihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

und schreiben auch $e^z := \exp(z)$.

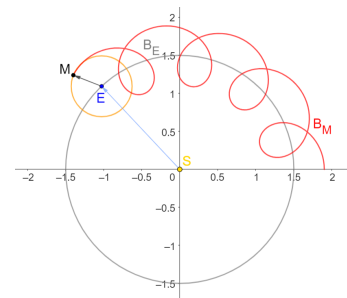


Abbildung 3: Bahn des Mondes M um die Sonne S

Diese Potenzreihe ist auf ganz \mathbb{C} absolut konvergent, wie leicht mit dem Quotientenkriterium zu zeigen ist. Sie stimmt für reelle Zahlen mit der Taylorreihe der reellen natürlichen Exponentialfunktion zur Entwicklungsstelle 0 überein. Die komplexe Exponentialfunktion ist daher die Fortsetzung der bekannten reellen Exponentialfunktion auf die komplexen Zahlen.

Satz 1 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für beliebige komplexen Zahlen z und w gilt*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w).$$

Beweis: Da die Exponentialreihe für alle $z, w \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir das Cauchy-Produkt bilden und mithilfe des binomischen Lehrsatzes umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} && \text{(Cauchy Produktformel)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} && \text{(Binomialkoeffizient)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n && \text{(Binomischer Lehrsatz)} \\ &= \exp(z + w). \end{aligned}$$

□

Um unsere Parametrisierung zu vereinfachen, beweisen wir nun die berühmte *Eulersche Gleichung*:

Satz 2. (*Eulersche Gleichung*) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = e^{-it}(\cos t + i \sin t)$. Unter der Annahme, dass die elementaren Ableitungsregeln auch in \mathbb{C} funktionieren, leiten wir nach t ab und erhalten

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-it}(-\sin t + i \cos t) - ie^{-it}(\cos t + i \sin t) \\ &= e^{-it}(-\sin t + i \cos t) - e^{-it}(i \cos t - \sin t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also konstant, und zwar mit dem Wert $f(0) = 1$. Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 &= e^{-it}(\cos t + i \sin t) \\ \Leftrightarrow e^{it} &= \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

□

Damit vereinfacht sich die Parametrisierung unserer Epizykel-Kurve $B : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ zu

$$B(t) = \sum_{r=1}^n R_r e^{i\omega_r t + \varphi_r}$$

bzw. – wenn wir als Vorfaktoren auch komplexe $c_r = R_r e^{i\varphi_r}$ zulassen – zu

$$B(t) = \sum_{r=1}^n c_r e^{i\omega_r t}.$$

2. Nachzeichnen von Kurven mit Epizykeln

Wir möchten nun geschlossene Kurven mit Epizykeln nachzeichnen, d. h. wir suchen eine Parametrisierung der Form

$$F(t) = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r t}$$

mit $\omega_r \in \mathbb{R}$ und $c_r \in \mathbb{C}$, deren Bild einer gegebenen Kurve ähneln soll. Dafür wählen wir zunächst N Stützstellen x_0, x_1, \dots, x_{N-1} auf der gegebenen Kurve:

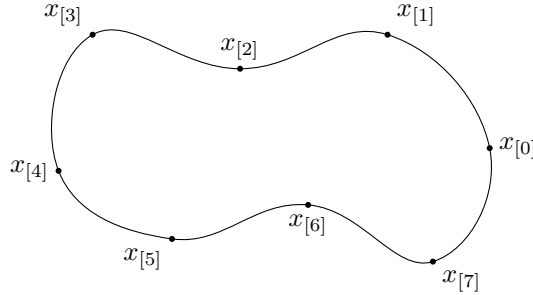


Abbildung 4: Diskretisierung einer geschlossenen Kurve mit $N = 8$ Stützstellen

Die Funktion F soll für $t \in [0, 2\pi]$ diese Stützstellen in äquidistanten Abständen durchlaufen, es soll also

$$F\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r \frac{2\pi k}{N}} = x_{[k]}$$

für alle $k = 0, \dots, N - 1$ gelten.

Durch Überlegungen zur Periodizität der Stützstellen und der gesuchten Parametrisierung können wir Gestalt und Anzahl der benötigten Frequenzen einschränken.

Da die gegebene Kurve geschlossen ist, muss für die Parametrisierung $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ auch $F(2\pi) = F(0)$ bzw.

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r 2\pi} = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r 0} = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r$$

gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn $e^{i\omega_r 2\pi} = 1$ bzw. $\omega_r 2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ gilt, also für $\omega_r \in \mathbb{Z}$.

Das lässt sich auch anschaulich geometrisch begründen: Bei den Summanden der gesuchten Parametrisierung handelt es sich mit Ausnahme von $\omega_r = 0$ um rotierende Vektoren. Diese müssen für $t = 2\pi$ jeweils wieder in ihre Ausgangsposition bei $t = 0$ zurückkehren. Dafür müssen die Frequenzen ganzzahlige Vielfache der langsamsten Frequenz 1 sein.

Da also alle Frequenzen ganzzahlig sein müssen, können wir in unserer gesuchten Parametrisierung den Index $r \in \mathbb{Z}$ gleich als Variable für die Frequenz nutzen. So erhalten wir die vereinfachte Bedingung

$$F\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r e^{ir \frac{2\pi k}{N}} = x_{[k]}$$

für alle $k = 0, \dots, N - 1$.

Außerdem tauchen bei N Stützstellen maximal N verschiedene Frequenzen in unserer Parametrisierung auf. Gäbe es mehr als N verschiedene Summanden, könnten wir mehrere Summanden zu einem zusammenfassen.

Es gilt nämlich

$$e^{i(r+N) \cdot \frac{2\pi k}{N}} = e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{i2\pi k} = e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} \cdot 1,$$

also $e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} = e^{i(r+N) \cdot \frac{2\pi k}{N}}$.

Damit erhalten wir beim Summieren

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi k}{N}\right) &= \dots + c_r \cdot e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+N} \cdot e^{i(r+N) \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+mN} \cdot e^{i(r+mN) \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots \\ &= \dots + c_r \cdot e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+N} \cdot e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+mN} \cdot e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots \\ &= \dots + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{r+mN} \right) \cdot e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} + \dots, \end{aligned}$$

d. h. wir können alle Vorfaktoren zu Frequenzen $r \bmod N$ zusammenfassen. Anschaulich bedeutet das, dass N Stützstellen nur Informationen für N verschiedene Summanden liefern. Um die Kurve genauer nachzuzeichnen, müssen wir daher die Anzahl der Stützstellen erhöhen.

Welche N Frequenzen wir verwenden, ist erst einmal nicht festgelegt. Wir rechnen im Folgenden mit den N Frequenzen $0, \dots, N-1$ und betrachten den Einfluss des Frequenzspektrums anschließend etwas genauer.

Mit diesen beiden Einschränkungen gilt es nun also, die Koeffizienten $c_r \in \mathbb{C}$ mit

$$F\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} = x_{[k]} \quad (1)$$

für alle $k = 0, \dots, N-1$ zu bestimmen.

3. Die diskrete Fourier-Analyse

Im Folgenden leiten wir her, wie sich aus den N Stützstellen $x_{[0]}, \dots, x_{[N-1]}$ die N Koeffizienten c_0, \dots, c_{N-1} ermitteln lassen.

Wir beobachten zunächst, dass von den Summanden der Ziel-Kurve $F : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{rit} = c_0 e^0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)it}$$

der erste Summand $c_0 e^0 = c_0$ der einzige *nicht* rotierende Vektor ist. Der Koeffizient c_0 hängt nicht von t ab und ist daher konstant. Das führt uns zu der Vermutung, dass dieser Summand als „Anker“ der Epizykel-Summe der Schwerpunkt aller Stützstellen ist.

Satz 3. Der Vorfaktor $c_0 \in \mathbb{C}$ ist der Schwerpunkt der Stützstellen $x_{[0]}, \dots, x_{[N-1]}$, d. h. für alle $k = 0, \dots, N-1$ gilt

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]}. \quad (2)$$

Beweis. Durch Einsetzen unserer Forderung (1) in die rechte Seite der Behauptung erhalten wir

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_r e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \cdot \frac{2\pi k}{N}}.$$

Zur Berechnung der inneren Summe treffen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $r = 0$ In diesem Fall gilt einfach

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \cdot 0 \cdot \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^0 = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

Fall 2: $r \neq 0$

Mit der Summenformel für geometrische Summen erhalten wir in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{(ir \frac{2\pi}{N})^k} = \frac{1 - (e^{ir \frac{2\pi}{N}})^{(N-1)+1}}{1 - e^{ir \frac{2\pi}{N}}} = \frac{1 - e^{ir 2\pi}}{1 - e^{ir \frac{2\pi}{N}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{ir \frac{2\pi}{N}}} = \frac{0}{1 - e^{ir \frac{2\pi}{N}}} = 0.$$

Dieses Resultat halten wir gesondert fest:

Lemma 1. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = \begin{cases} N, & r = 0, \\ 0, & r \neq 0. \end{cases}$$

Mit diesem Lemma gilt schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \left(c_0 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \sum_{r=1}^{N-1} c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(c_0 \cdot N + \sum_{r=1}^{N-1} c_r \cdot 0 \right) = \frac{1}{N} \cdot c_0 \cdot N \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Somit ist c_0 tatsächlich der Schwerpunkt aller Stützstellen. □

Um nun allgemein den m -ten Koeffizienten c_m der Parametrisierung zu bestimmen, sorgen wir dafür, dass der zugehörige rotierende Vektor $c_m e^{imt}$ nicht mehr rotiert. Denn dann können wir analog zur Bestimmung von c_0 vorgehen.

Dies gelingt durch Multiplikation der gesamten Summe mit e^{-imt} , denn dann ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{-imt} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{irt} &= e^{-imt} \cdot (c_0 + c_1 e^{it} + \dots + c_m e^{imt} + \dots + c_{N-1} e^{i(N-1)t}) \\ &= c_0 e^{-imt} + \dots + c_m e^0 + \dots + c_{N-1} e^{i(N-1-m)t}. \end{aligned}$$

Dabei wird genau der zu c_m gehörende Term zu einem konstanten Summanden.

Wir multiplizieren also beide Seiten unserer Forderung (1) mit e^{-mit} und erhalten

$$\begin{aligned} x_{[k]} &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{ri \frac{2\pi k}{N}} & | \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} \\ \Rightarrow x_{[k]} \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}}. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle $k = 0, \dots, N-1$ gilt, ist auch der Mittelwert über alle k auf beiden Seiten gleich. Wir können also wieder die Schwerpunkte betrachten.

Mit Lemma 1 erhalten wir so

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{[k]} \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} \right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \left(c_r \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot 0 + c_m \cdot N + \sum_{r=m+1}^{N-1} c_r \cdot 0 \right) \\
&= c_m.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Berechnung die die Koeffizienten der gesuchten Parametrisierung gefunden!

Wir überprüfen nun noch, dass die Kurve $F : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{rit}, \quad c_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-ri \frac{2\pi k}{N}}$$

zum Zeitpunkt $t = \frac{2\pi j}{N}$ die j -te Stützstelle durchläuft, d. h. dass

$$F\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = x_{[j]}$$

für alle $j = 0, \dots, N-1$ gilt.

Für $t = \frac{2\pi j}{N}$ gilt mit dem ermittelten Ausdruck für c_r tatsächlich

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{2\pi j}{N}\right) &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{ri \frac{2\pi j}{N}} \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-ri \frac{2\pi k}{N}} \right) \cdot e^{ri \frac{2\pi j}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \sum_{r=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi(j-k)}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{j-1} x_{[k]} \cdot 0 + x_{[j]} \cdot N + \sum_{k=j+1}^{N-1} x_{[k]} \cdot 0 \right) \\
&= x_{[j]}.
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir, dass analog zu Lemma 1 gilt:

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi(j-k)}{N}} = \begin{cases} N, & j-k=0 \Leftrightarrow j=k \\ 0, & j-k \neq 0 \Leftrightarrow j \neq k. \end{cases}$$

Wir haben also eine Parametrisierung der gewünschten Form gefunden, die alle Stützstellen durchläuft.

Definition 3 (Diskrete Fourier-Transformation). Die Abbildung, die aus den N Stützstellen $x_{[0]}, \dots, x_{[N-1]}$ die *Fourier-Koeffizienten*

$$c_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-ri \frac{2\pi k}{N}}$$

bestimmt, heißt *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)*.

Die *Inverse Fourier-Transformation (IDFT)* rekonstruiert aus diesen Koeffizienten wiederum die Werte

$$x_{[k]} = \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{ri \frac{2\pi k}{N}}.$$

4. Umsetzung mit GeoGebra und Python

Nun können wir verschiedene geschlossene Kurve durch Epizykel approximieren, indem wir auf einer gegebenen Silhouette in GeoGebra manuell Stützstellen wählen und mit der Diskreten Fourier-Transformation die Koeffizienten c_r berechnen lassen. Die Spur der gemäß der Inversen Diskreten Fourier-Transformation zusammengesetzten Epizykel zeichnet dann diese Silhouette nach.

Außerdem haben wir einige Animationen mit der Python-Bibliothek Manim erstellt:

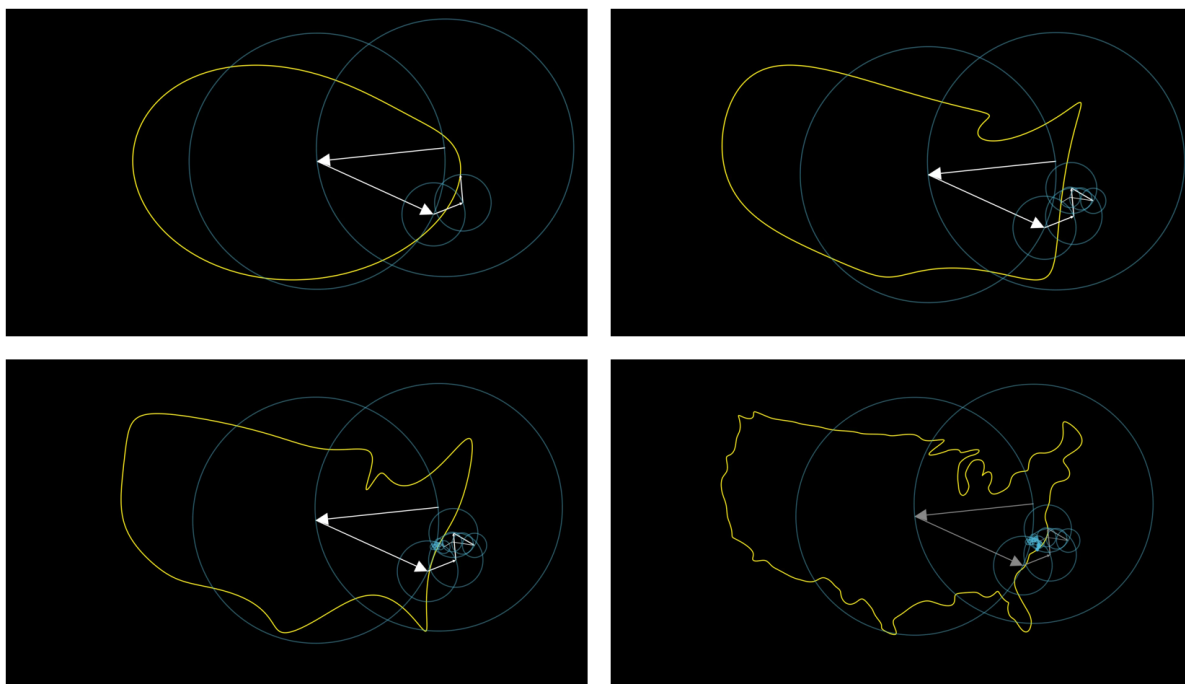


Abbildung 5: Die Umriss der USA mit 4, 8, 16 und 128 Stützstellen nachgezeichnet

Zu beachten ist, dass das Frequenzspektrum das Aussehen der erzeugten Kurve stark beeinflusst. Nutzen wir wie in den Rechnungen die Frequenzen $0, 1, \dots, N-1$, erhalten wir eine Kurve, die zwar alle Stützstellen durchläuft, aber starkes *Aliasing* aufweist. Deutlich ähnlicher wird diese Kurve dem gewünschten Resultat bei einem um 0 symmetrischen Frequenzspektrum. Offenbar wird die Approximation besser, wenn die Länge unserer Kurve kleiner wird.

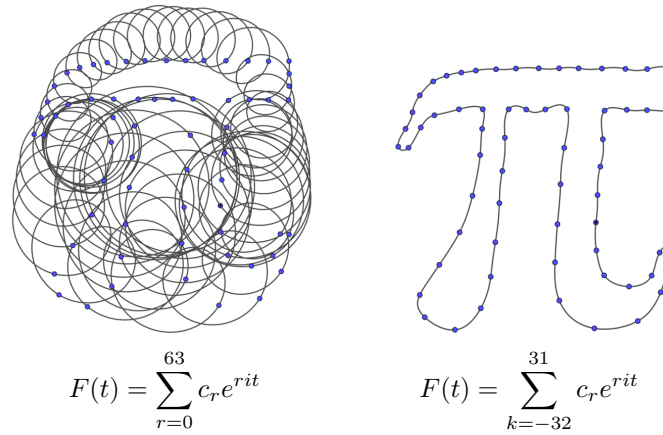
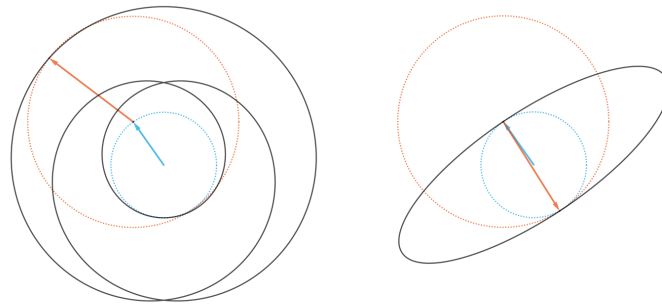


Abbildung 6: Aliasing bei hohen Frequenzen

Das lässt sich erreichen, indem wir die Umlaufzahl unserer Kurve reduzieren. Wenn zwei Vektoren mit den Frequenzen r_1 bzw. r_2 mit gleichen Vorzeichen rotieren, parametrisiert ihre Summe Kurven mit der Umlaufzahl $r_1 + r_2$, d.h. die Kurve durchläuft $r_1 + r_2$ Umrundungen im selben Drehsinn. Wenn zwei Vektoren mit gleicher Frequenz in gegenteiligem Drehsinn rotieren, parametrisiert ihre Summe dagegen eine Ellipse (mit Umlaufzahl 1).



$$F(t) = 1e^{i(2t+\frac{\pi}{4})} + 2e^{i(3t+\frac{\pi}{8})} \quad F(t) = 1e^{i(2t+\frac{\pi}{4})} + 2e^{i(-2t+\frac{\pi}{8})}$$

Abbildung 7: Kurven mit unterschiedlicher Umlaufzahl

Das können wir auch nachrechnen. Dazu seien $c_m = R_m e^{i\varphi}$ und $c_{-m} = R_{-m} e^{i\psi}$ ($R_m, R_{-m}, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$) die komplexen Koeffizienten mit

$$F(t) = c_m e^{mit} + c_{-m} e^{-mit} = R_m e^{i(mt+\varphi)} + R_{-m} e^{i(-mt+\psi)}.$$

Durch Änderung von φ bzw. ψ wird das Bild von F nur gedreht. Wir setzen daher $\varphi = \psi = 0$.

Wegen $\cos(-t) = \cos(t)$ und $\sin(-t) = -\sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} & R_m e^{mit} + R_{-m} e^{-mit} \\ &= R_m (\cos(mt) + i \cdot \sin(mt)) + R_{-m} (\cos(-mt) + i \cdot \sin(-mt)) \\ &= R_m (\cos(mt) + i \cdot \sin(mt)) + R_{-m} (\cos(mt) - i \cdot \sin(mt)) \\ &= (R_m + R_{-m}) \cos(mt) + i \cdot (R_m - R_{-m}) \sin(mt). \end{aligned}$$

Das ist für $t \in [0, 2\pi)$ eine Parametrisierung einer Ellipse mit den Achsenlängen $(R_m + R_{-m})$ und $(R_m - R_{-m})$. Für $R_m = R_{-m}$ fällt der Imaginärteil weg, sodass die Ellipse zu einer Strecke wird.

Dass die Fourier-Summe mit den Frequenzen von $-N/2$ bis $N/2$ die gegebene Kurve gut approximiert, entspricht der Aussage des sogenannten *Abtasttheorems*.

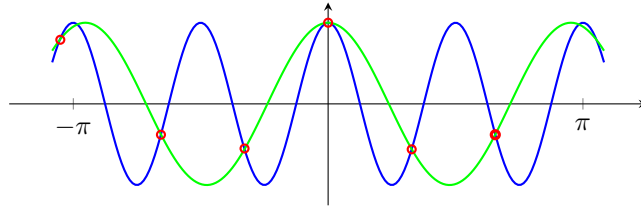


Abbildung 8: Die Stützstellen können auf beiden Kurven liegen.

Danach können Signale, die Frequenzen bis f_{\max} enthalten, nur dann aus Stützstellen eindeutig rekonstruiert werden, wenn diese mit einer Frequenz von mehr als $2 \cdot f_{\max}$ vorliegen. Daher genügen unsere N Stützstellen nur zur Rekonstruktion von Summanden mit einer niedrigeren Frequenz als $N/2$.

5. Die schnelle Fourier-Transformation

Falls die Anzahl der Stützstellen eine Zweierpotenz ist, lässt sich die Berechnung der Fourier-Koeffizienten besonders elegant notieren und effizient durchführen. Wir setzen zunächst $e^{i\frac{2\pi}{N}} =: \omega$ und schreiben damit

$$c_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-ir\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot \omega^{-rk}.$$

Das System dieser Gleichungen können wir als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben, wobei wir die Zeilen so sortieren und die Exponenten unter Ausnutzen von

$$\omega^{k+l \cdot N} = e^{i\frac{2\pi}{N}(k+l \cdot N)} = e^{i\frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{i2\pi l} = e^{i\frac{2\pi k}{N}} = \omega^k \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

so umformen, dass der Eintrag in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte der Matrix gerade $\omega^{(i-1)(j-1)}$ ist.

Für $N = 8 = 2^3$ können wir die Fourier-Koeffizienten c_{-3}, \dots, c_4 zum Beispiel wie folgt berechnen:

$$\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} & \omega^{12} & \omega^{14} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} & \omega^{18} & \omega^{21} \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} & \omega^{24} & \omega^{28} \\ \omega^0 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} & \omega^{30} & \omega^{35} \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^{12} & \omega^{18} & \omega^{24} & \omega^{30} & \omega^{36} & \omega^{42} \\ \omega^0 & \omega^7 & \omega^{14} & \omega^{21} & \omega^{28} & \omega^{35} & \omega^{42} & \omega^{49} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{-1} \\ c_{-2} \\ c_{-3} \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Diese *DFT-Matrix* kann nun auf die markierten Einträge reduziert werden. Denn wegen (3) können wir in den ungeraden Zeilen die rechte Hälfte der Einträge durch die linke Hälfte ersetzen. Und in den geraden Zeilen erhalten wir dann den j -ten Eintrag als Produkt des darüber liegenden Eintrags und dem spaltenabhängigen Vorfaktor ω^{j-1} , der in der rechten Hälfte zusätzlich mit einem negativen Vorzeichen versehen wird. Dabei nutzen wir aus, dass $\omega^{N/2} = -1$ gilt, wenn N gerade ist.

Nun können wir die Multiplikation mit einer 8×8 -Matrix durch zwei Multiplikationen mit derselben 4×4 -Matrix ersetzen. Dann erhalten wir die Fourier-Koeffizienten in den ungeraden Zeilen durch

$$\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^{12} & \omega^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{[0]} + x_{[4]} \\ x_{[1]} + x_{[5]} \\ x_{[2]} + x_{[6]} \\ x_{[3]} + x_{[7]} \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{-2} \\ c_4 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

und die in den geraden Zeilen durch

$$\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^{12} & \omega^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^0 (x_{[0]} - x_{[4]}) \\ \omega^1 (x_{[1]} - x_{[5]}) \\ \omega^2 (x_{[2]} - x_{[6]}) \\ \omega^3 (x_{[3]} - x_{[7]}) \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_{-3} \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Entscheidend ist nun, dass diese beiden Multiplikationen nun auf dieselbe Weise in jeweils zwei Multiplikationen mit einer 2×2 -Matrix und dann weiter in jeweils vier Multiplikationen mit einer 1×1 -,Matrix“ zerlegt werden kann, bei der es sich nur noch um eine einzige Operation handelt. Bei einer $N \times N$ -Matrix benötigen wir dafür entsprechend $\log_2(N)$ Iterationen.

Der Vorteil dieses Verfahrens wird deutlich, wenn man die Anzahl der für die Durchführung benötigten Operationen betrachtet: Die Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer $n \times n$ -Matrix umfasst in jeder der n Zeilen n Multiplikationen und $n - 1$ Additionen, also insgesamt $2n^2 - n$ Operationen. Die schnelle Fourier-Transformation mit derselben Matrix umfasst in der ersten Zerlegung $\frac{n}{2}$ Additionen, $\frac{n}{2}$ Subtraktionen und $\frac{n}{2}$ Multiplikationen, d. h. $\frac{3n}{2}$ Operationen, in der zweiten Zerlegung zweimal $\frac{n}{4}$ Additionen, $\frac{n}{4}$ Subtraktionen und $\frac{n}{4}$ Multiplikationen, d. h. wieder $\frac{3n}{2}$ Operationen usw. Bei insgesamt $\log_2(n)$ Zerlegungen ergeben sich insgesamt $\log_2(n) \cdot \frac{3n}{2}$ Operationen.

Für große Matrizen ist die Ersparnis enorm. Für $N = 2^{20}$ werden weniger als 0.001% der ursprünglichen Operationen benötigt. Deshalb wird dieses Verfahren *schnelle Fourier-Transformation* oder *Fast Fourier Transformation* (FFT) genannt.