

## Berichte der Gruppen

### Was sind Minimalflächen?

*Teilnehmer:*

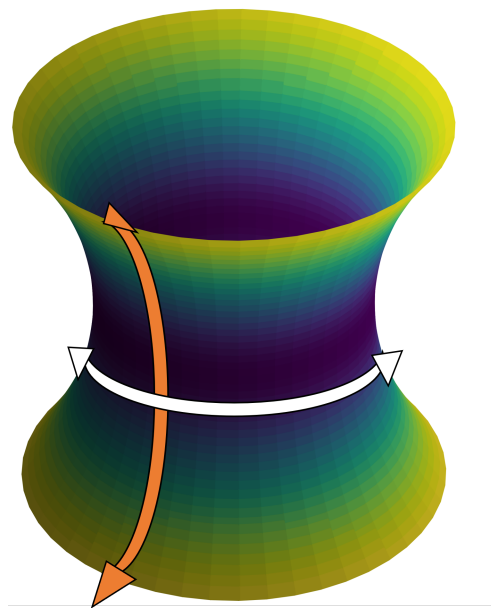
1 Teilnehmerin des	Andreas-Gymnasiums
3 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Immanuel-Kant-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

*mit tatkräftiger Unterstützung durch:*

Lars Hanisch	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------	--------------------------------

*Gruppenleiter:*

Helga Baum	Humboldt-Universität zu Berlin
------------	--------------------------------



# 1. Einleitung

Minimalflächen sind landläufig Flächen, die bei vorgegebenem Rand den kleinstmöglichen Flächeninhalt besitzen. Mathematisch werden sie durch die Forderung charakterisiert, dass ihre mittlere Krümmung in jedem Punkt null ist. Bereits im 18. Jahrhundert beschäftigten sich Mathematiker wie Euler und Lagrange mit diesem Problem, das heute als das Plateau-Problem bekannt ist. Die Erforschung von Minimalflächen verbindet Differentialgeometrie, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen. Ziel dieses Berichtes ist es, Kurven, Flächen und Minimalflächen vorzustellen und zentrale Beispiele zu zeigen.

# 2. Motivation

Minimalflächen begegnen uns überall in der Natur und Technik: Seifenhäute, Spinnennetze oder die Form von Flüssigkeitstropfen – sie alle streben nach einer Oberfläche mit möglichst geringem Flächeninhalt. Dieses Prinzip der Flächenminimierung ist nicht nur ästhetisch faszinierend, sondern auch von großer praktischer Bedeutung. Ingenieure nutzen es beim Bau von leichten und stabilen Strukturen, Architekten bei der Gestaltung eleganter Dächer, und in der Materialwissenschaft hilft es, neue Werkstoffe effizient zu entwickeln. Die Untersuchung von Minimalflächen verbindet somit anschauliche Alltagsphänomene mit tiefgehender mathematischer Theorie und eröffnet zahlreiche Anwendungen in verschiedenen Wissenschaftsbereichen.



# 3. Kurven und ihre Parametrisierung

In der realen Welt treten Kurven in verschiedener Weise auf, z. B. als Profilkurve technischer Objekte oder als Spur, die ein Bleistift beim Zeichnen auf Papier hinterlässt. Oft werden alle „eindimensionalen“ Punktmengen in der Ebene oder im Raum als Kurven bezeichnet. „Eindimensional“ bedeutet hierbei, dass die Kurve von nur einem Parameter abhängt. In der Physik benutzt man Kurven, wenn man z. B. die Bewegung eines Massepunktes in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben will. Wir verwenden diesen Kurvenbegriff. Er ist die mathematische Abstraktion der Bewegung eines Punktes in der euklidischen Ebene oder im euklidischen Raum, die durch die Angabe des Ortes  $\gamma(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  beschrieben wird.

**Definition 1.** Eine *parametrisierte Kurve* im  $\mathbb{R}^3$  ist eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

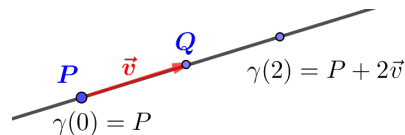
$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$t \in I \mapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Dabei ist  $I$  der Parameterbereich von  $\gamma$ . Das Bild  $K := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$  nennt man auch die *Spur von  $\gamma$* .  $\gamma$  heißt dann eine *Parametrisierung der Menge  $K \subset \mathbb{R}^3$*  und  $K$  heißt *Kurve*.

**Beispiel 1.** Sei  $L \subset \mathbb{R}^3$  eine Gerade,  $P, Q \in L$  zwei verschiedene Punkte und  $\vec{v} := \overrightarrow{PQ} = Q - P$  der Verbindungsvektor von  $P$  nach  $Q$ . Eine Parametrisierung von  $L$  ist gegeben durch  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

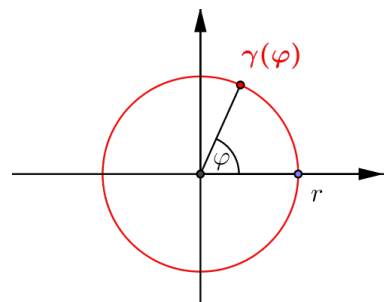
$$\gamma(t) := P + t \cdot \vec{v}.$$



**Beispiel 2.** Sei  $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$  der Kreis vom Radius  $r$ . Man kann ihn mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen in der Form  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma(\varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

parametrisieren.

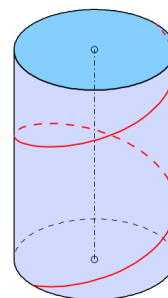


**Beispiel 3.** Die *Schraubenlinie im  $\mathbb{R}^3$*

Die Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\gamma(t) = (r \cdot \cos(\omega \cdot t), r \cdot \sin(\omega \cdot t), h \cdot t)$$

heißt *Schraubenlinie*. Sie beschreibt den Bewegungsverlauf eines Massepunktes, der sich auf einem Zylinder vom Radius  $r$  mit konstanter Geschwindigkeit  $h \neq 0$  in die Höhe und konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega \neq 0$  um den Zylinder herum bewegt.



**Definition 2.** Sei  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

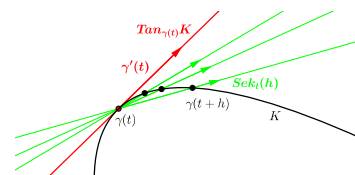
$$\gamma'(t) := (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

*Tangentenvektor von  $\gamma$  im Parameter  $t \in I$ .* Die Kurve  $\gamma$  heißt *regulär*, wenn  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$  für alle  $t \in I$ .

Ist  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ , so beschreibt die Gerade

$$\text{Tan}_{\gamma(t)} K := \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t)$$

die *Tangente an die Kurve  $K = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$  im Kurvenpunkt  $\gamma(t)$* .



**Satz 1.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre, parametrisierte Kurve mit  $K = \gamma(I)$ . Dann existiert eine Umparametrisierung  $\tau : J \rightarrow I$ , sodass die Kurve  $\delta := \gamma \circ \tau : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\delta(s) := \gamma(\tau(s))$  die Gleichung

$$\|\delta'(s)\| = 1 \quad \forall s \in J$$

erfüllt und  $K$  in der gleichen Richtung durchläuft wie  $\gamma$ .

**Beweis:** Wir zeigen, dass ein entsprechendes  $\tau$  existiert.

$$\begin{aligned}\delta(s) &= \gamma(\tau(s)) \\ \implies \delta'(s) &= \tau'(s) \cdot \gamma'(\tau(s)) \\ \implies 1 &= \|\tau'(s) \cdot \gamma'(\tau(s))\| = |\tau'(s)| \cdot \|\gamma'(\tau(s))\| \\ \implies \tau'(s) &= |\tau'(s)| = \frac{1}{\|\gamma'(\tau(s))\|}.\end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion einer bijektiven differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow J$

$$(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}.$$

Wir suchen ein  $f : I \rightarrow J$  mit  $\tau = f^{-1}$  und  $f'(\tau(s)) = \|\gamma'(\tau(s))\|$ . Sei  $a \in I$  fixiert. Wir betrachten die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tilde{t})\| d\tilde{t}.$$

Dann gilt  $f'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ .  $\tau := f^{-1}$  ist also die gesuchte Umparametrisierung von  $\gamma$ .  $\square$

## 4. Krümmung ebener Kurven

Die Krümmung einer *ebenen* Kurve  $\gamma$  lässt sich durch die Änderung des Winkels  $\omega$  zwischen dem Tangentialvektor und einem festen Vektor  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  beim Durchlaufen der Kurve beschreiben. Diese Änderung im Winkel wird mit der Geschwindigkeit skaliert, mit der die Kurve durchlaufen wird.

**Definition 3.** Sei

$$\omega(t) := \angle^{or}(\vec{e}_1, \gamma'(t)) \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\kappa(t) := \frac{\omega'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Krümmung von  $\gamma$  im Parameter  $t \in I$ .

Die Krümmung  $\kappa(t)$  in einem Punkt  $\gamma(t)$  ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Ist  $\delta := \gamma \circ \tau$  eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von  $\gamma$ , dann gilt

$$\kappa^\delta(s) = \kappa^\gamma(\tau(s)).$$

Die Krümmung im Punkt  $p = \gamma(t)$  beschreibt die lokale Lage der Kurve  $K$  nahe  $p$  bezüglich der Tangente an  $K$  im Punkt  $p$ . Sei  $\vec{n}(t)$  der Normalenvektor an  $K$  im Punkt  $\gamma(t)$ , der durch Drehung von  $\gamma'(t)$  um  $90^\circ$  in positive Richtung entsteht.



Im ersten Bild ist  $\kappa(t) < 0$ , der Drehwinkel  $\omega(t)$  beim Durchlauf von  $\gamma$  also streng monoton fallend (nahe  $t$ ). Im zweiten Bild ist  $\kappa(t) > 0$ , der Drehwinkel  $\omega(t)$  beim Durchlauf von  $\gamma$  also streng monoton wachsend (nahe  $t$ ). Im ersten Fall liegt die Kurve (in der Nähe des Parameters  $t$ ) auf der anderen Seite der Tangente als der Punkt  $\gamma(t) + \vec{n}(t)$ , im zweiten Fall auf der gleichen Seite.

**Satz 2.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre parametrisierte Kurve. Dann gilt für ihre Krümmung im Parameter  $t \in I$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) \\ \gamma''_1(t) & \gamma''_2(t) \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Für den Tangentialvektor gilt

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \cdot (\cos \omega(t), \sin \omega(t)).$$

Für die zweite Ableitung folgt daraus

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (\|\gamma'(t)\|)' \cdot (\cos \omega(t), \sin \omega(t)) + \|\gamma'(t)\| \cdot (-\omega'(t) \cdot \sin \omega(t), \omega'(t) \cdot \cos \omega(t)) \\ &= (\|\gamma'(t)\|)' \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} + \|\gamma'(t)\| \cdot \omega'(t) \cdot (-\sin \omega(t), \cos \omega(t)). \end{aligned}$$

Wenn man die erste und zweite Ableitung in die Matrix einsetzt, erhält man:

$$\kappa(t) = \frac{\omega'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

□

Der folgende Satz wird in einem späteren Beweis relevant.

**Satz 3.** Wird die Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, d.h.  $\|\gamma'(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ , so gilt

$$\kappa(t) = \langle \gamma''(t), \vec{n}(t) \rangle,$$

wobei  $\vec{n}(t)$  der Normalenvektor ist, der durch Drehung von  $\gamma'(t)$  um  $90^\circ$  in positive Richtung entsteht.

**Beweis:** Dreht man einen Vektor  $(x, y)$  um  $90^\circ$  in positive Richtung, so erhält man den Vektor  $(-y, x)$ . Da  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ , folgt für den Normalenvektor  $\vec{n}(t)$

$$\vec{n}(t) = (-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t)).$$

Für das Skalarprodukt ergibt sich

$$\langle \gamma''(t), \vec{n}(t) \rangle = -\gamma''_1(t) \cdot \gamma'_2(t) + \gamma''_2(t) \cdot \gamma'_1(t) = \text{Det} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & \gamma'_2(t) \\ \gamma''_1(t) & \gamma''_2(t) \end{pmatrix} = \kappa(t).$$

□

## 5. Parametrisierte Flächenstücke und Tangentialebenen

Flächen sind Teilmengen  $F \subset \mathbb{R}^3$ , die man durch *zwei* Parameter  $(u_1, u_2)$  beschreiben kann.  $F$  sei also das Bild einer Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \quad U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) \in U &\longmapsto f(u_1, u_2) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_3(u_1, u_2)) \end{aligned}$$

Dabei soll  $f$  bestimmte Differenzierbarkeits- und Regularitätsbedingungen erfüllen.

**Definition 4.** Eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *reguläres parametrisiertes Flächenstück*, wenn die beiden Vektoren  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$  in  $\mathbb{R}^3$  für jedes  $u = (u_1, u_2) \in U$  linear unabhängig sind.  $U$  heißt *Parameterbereich* von  $f$ . Ist  $F \subset \mathbb{R}^3$  das Bild eines regulären parametrisierten Flächenstücks  $f$ , so nennt man  $f$  *Parametrisierung* von  $F$  und  $F$  *Fläche*.

Zweimal stetig differenzierbar heißt für  $f$  folgendes: Die *ersten partiellen Ableitungen* von  $f$  sind die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_1 + h, u_2) - f(u_1, u_2)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_1, u_2 + h) - f(u_1, u_2)}{h}.\end{aligned}$$

Die 2-fachen partiellen Ableitungen entstehen, wenn man die Funktionen  $\frac{\partial f}{\partial u_k}$  wiederum nach  $u_1$  bzw.  $u_2$  partiell ableitet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_k}(u_1, u_2) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1 + h, u_2) - \frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1, u_2)}{h}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_k}(u_1, u_2) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1, u_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1, u_2)}{h}.\end{aligned}$$

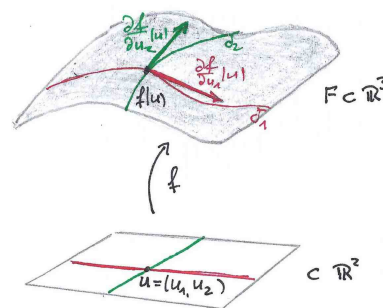
$f$  heißt *zweimal stetig differenzierbar*, wenn die Funktionen  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}$  auf  $U$  existieren und stetig sind.

Die Kurven

$$\begin{aligned}\delta_1 : h \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} &\mapsto \delta_1(h) := f(u_1 + h, u_2) \in F, \\ \delta_2 : h \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} &\mapsto \delta_2(h) := f(u_1, u_2 + h) \in F\end{aligned}$$

heißten *Koordinatenlinien* auf  $F$  durch  $p = f(u_1, u_2)$ .

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2)$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2)$  sind die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien  $\delta_1$  bzw.  $\delta_2$  im Parameter  $h = 0$ .



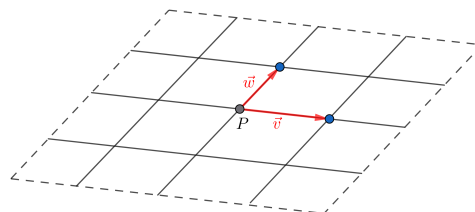
#### Beispiel 4. Eine Ebene

Es sei  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene im Raum, die durch den Punkt  $P$  geht und von zwei linear unabhängigen Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  aufgespannt wird, d.h.

$$E = P + \mathbb{R} \cdot \vec{v} + \mathbb{R} \cdot \vec{w}.$$

$E$  kann man parametrisieren durch die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f(u_1, u_2) := P + u_1 \cdot \vec{v} + u_2 \cdot \vec{w}.$$



**Beispiel 5.** Die Wendelfläche/Helicoid

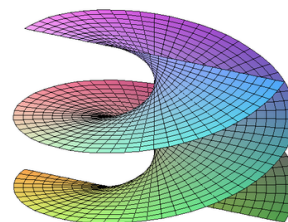
Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $h$  eine reelle Zahl mit  $h \neq 0$ . Die Fläche

$$W := \{(s \cos \alpha, s \sin \alpha, h \cdot \alpha) \mid s \in I, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Wendelfläche* oder auch *Helicoid*. Die Abbildung  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f(s, \alpha) := (s \cos \alpha, s \sin \alpha, h \cdot \alpha) = (0, 0, h \cdot \alpha) + s \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$$

ist eine Parametrisierung von  $W$ . Für festes  $s$  beschreiben die Punkte  $(s \cos \alpha, s \sin \alpha)$  einen Kreis mit dem Radius  $s$  und  $h \cdot \alpha$  beschreibt die Höhe.

**Beispiel 6.** Die Rotationsflächen

Man betrachte eine reguläre parametrisierte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in der  $(x, z)$ -Ebene mit der Spur

$$K := \{(\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t)) \mid t \in I\},$$

wobei  $\gamma_1 > 0$ . Durch Drehung von  $K$  um die  $z$ -Achse entsteht die Rotationsfläche  $F$  mit Profilkurve  $K$ .

Man erhält eine Parametrisierung der Rotationsfläche durch  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit:

$$f(t, \alpha) = (\gamma_1(t) \cdot \cos \alpha, \gamma_1(t) \cdot \sin \alpha, \gamma_3(t)).$$



Sei  $p = f(u_1, u_2)$  ein Punkt auf der Fläche  $F = f(U)$  und  $u = (u_1, u_2)$ . Den von den beiden Tangentialvektoren  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$  und  $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$  an die Koordinatenlinien durch den Punkt  $p$  aufgespannten Vektorraum

$$T_p F := \mathbb{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) + \mathbb{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

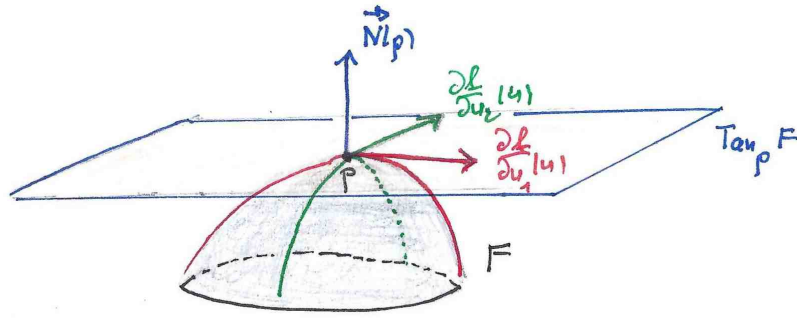
nennt man *Tangentialraum an  $F$  im Punkt  $p$* . Er spannt eine Ebene durch  $p$  auf, die *Tangentialebene an  $F$  im Punkt  $p$* ,

$$Tan_p F := p + T_p F.$$

Nun definieren wir den Einheitsnormalenvektor  $\vec{N}(p)$ :

$$\vec{N}(p) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \right\|} \in \mathbb{R}^3.$$

Da der Vektor  $\vec{N}(p)$  durch das Vektorprodukt von  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$  und  $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$  entsteht, steht er senkrecht zu diesen beiden Tangentialvektoren. Er hat die Länge eins, da durch die Norm des Vektorproduktes geteilt wird.



## 6. Krümmungsgrößen von parametrisierten Flächenstücken

In diesem Abschnitt werden wir definieren, was die Krümmung einer Fläche überhaupt ist und wie diese gemessen werden kann. Dafür definieren wir zunächst die Normalenkrümmungen im Punkt  $p \in F$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{v} \in T_p F$ , die die Krümmung einer Schnittkurve auf  $F$  in Richtung  $\vec{v}$  misst. Daraus entstehen zwei weitere Krümmungen: die Gaußsche Krümmung und die mittlere Krümmung. Was diese beiden Krümmungsarten bedeuten wird auch in diesem Abschnitt beschrieben.

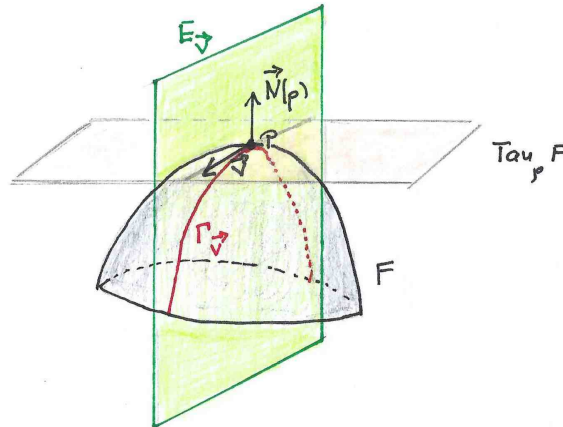
Wir haben in Abschnitt 4 die Krümmung einer ebenen parametrisierten Kurve definiert. Dies können wir in unserem Fall ausnutzen. Dabei gehen wir folgenderweise vor: Für einen beliebigen Punkt  $p \in F$  wählen wir einen Einheitsvektor  $\vec{v} \in T_p F$ . Die beiden Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{N}(p)$  spannen die Ebene

$$E_{\vec{v}} := p + \mathbb{R} \cdot \vec{v} + \mathbb{R} \cdot \vec{N}(p)$$

auf. Dann ist die Schnittmenge

$$\Gamma_{\vec{v}} := E_{\vec{v}} \cap F$$

eine Kurve auf  $F$ , die gleichzeitig in der Ebene  $E_{\vec{v}}$  liegt.



Die Krümmung der ebenen Kurve  $\Gamma_{\vec{v}} \subset E_{\vec{v}}$  im Punkt  $p$  bezeichnen wir mit  $\kappa_n(\vec{v})$ . Diese Krümmung heißt *Normalenkrümmung von  $F$  im Punkt  $p$  in Richtung  $\vec{v}$* .

Wir werden zeigen, dass es zwei senkrecht stehende Richtungen in  $T_p F$  gibt, für die die Normalenkrümmung minimal bzw. maximal unter allen Normalenkrümmungen in  $p$  ist. Dazu ist die folgende explizite Formel für die Normalenkrümmung hilfreich.

**Satz 4.** Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der Fläche  $F$ . Dann gilt für die Normalenkrümmung der Fläche  $F$  im Punkt  $p = f(u_1, u_2)$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{v} \in T_p F$

$$\kappa_n(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u), \vec{N}(p) \right\rangle \cdot v_i \cdot v_j,$$

wobei  $\vec{N}(p)$  der Normalenvektor an die Fläche im Punkt  $p$  ist und  $v_1, v_2$  die Komponenten von  $\vec{v}$  für die Zerlegung

$$\vec{v} = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

sind.

**Beweis:** Wir betrachten eine Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  mit

$$\gamma(t) := f(u_1(t), u_2(t))$$

und bezeichnen  $u(t) := (u_1(t), u_2(t))$ . Dann gilt nach der zweifachen Anwendung der (multivariablen) Kettenregel

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_1}(u(t)) \cdot u_1'(t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u(t)) \cdot u_1'(t) u_2'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_2}(u(t)) \cdot u_2'(t)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u(t)) \cdot u_1''(t) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u(t)) \cdot u_2''(t). \end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir das Skalarprodukt  $\langle \gamma''(t), \vec{N}(p) \rangle$ . Wir merken direkt, dass aufgrund der Orthogonalität von  $\frac{\partial f}{\partial u_i}(u(t))$  und  $\vec{N}(\gamma(t))$   $\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(t)), \vec{N}(\gamma(t)) \rangle = 0$  für  $i = 1, 2$  gilt. Folglich ergibt sich für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \gamma''(t), \vec{N}(\gamma(t)) \rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(u(t)) \cdot (u_1'(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u(t)) \cdot u_1'(t) u_2'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}(u(t)) \cdot (u_2'(t))^2, \vec{N}(\gamma(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u(t)), \vec{N}(\gamma(t)) \right\rangle u_i'(t) u_j'(t). \end{aligned}$$

Wir wählen nun eine Parametrisierung  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  unserer Schnittkurve  $\Gamma_{\vec{v}} = F \cap E_{\vec{v}}$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = \vec{v}$  und  $\|\gamma'(t)\| = 1$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  und wenden diese Formel im Parameter  $t = 0$  darauf an. Nach der Kettenregel gilt

$$\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \cdot u_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \cdot u_2'(0).$$

Somit ergibt sich  $v_1 = u_1'(0)$ ,  $v_2 = u_2'(0)$  und  $(u_1(0), u_2(0)) = (u_1, u_2) = u$ . Damit erhalten wir für die Normalenkrümmung im Punkt  $p$  in Richtung  $\vec{v}$

$$\kappa_n(\vec{v}) = \langle \gamma''(0), \vec{N}(p) \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u), \vec{N}(p) \right\rangle \cdot v_i v_j.$$

□

Wir betrachten nun die  $(2 \times 2)$ -Matrix  $(h_{ij}(p))$  mit den Einträgen

$$h_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u), \vec{N}(p) \right\rangle.$$

Diese Matrix ist symmetrisch (nach dem *Lemma von Schwarz*) und für die Normalenkrümmung gilt

$$\kappa_n(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(p) \cdot v_i v_j = h_{11}(p) \cdot v_1^2 + 2h_{12}(p) \cdot v_1 v_2 + h_{22}(p) \cdot v_2^2.$$

Nun kann man einen Satz aus der linearen Algebra anwenden, den *Satz über die Hauptachsentransformation*, der folgendes besagt:

Es gibt zwei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  in  $T_p F$ , so dass man  $\kappa_n(\vec{v})$  in der einfacheren Form

$$\kappa_n(\vec{v}) = \lambda_1(p) \cdot x^2 + \lambda_2(p) \cdot y^2$$

ausdrücken kann, wobei  $x$  und  $y$  die Komponenten in der Zerlegung

$$\vec{v} = x \cdot \vec{a}_1 + y \cdot \vec{a}_2$$

von  $\vec{v}$  und  $\lambda_1(p)$ ,  $\lambda_2(p)$  reelle Zahlen mit  $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p)$  sind.

Da  $\vec{v}$  ein Einheitsvektor ist, gilt  $x^2 + y^2 = 1$ . Durch das Einsetzen von  $y^2 = 1 - x^2$  in die obere Gleichung kommt man auf

$$\kappa_n(\vec{v}) = \lambda_1(p) \cdot x^2 + \lambda_2(p) \cdot (1 - x^2) = \lambda_2(p) - x^2 \cdot (\lambda_2(p) - \lambda_1(p)).$$

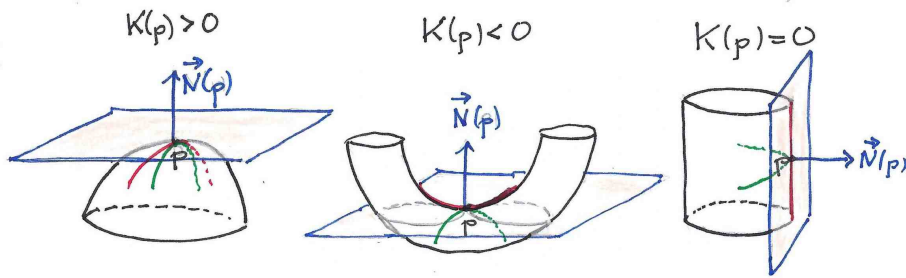
Dieser Term nimmt für  $x \in [-1, 1]$  in  $x = 0$  und  $x = 1$  sein Maximum bzw. Minimum an. Es gilt also

$$\begin{aligned} \lambda_1(p) = \kappa_n(\vec{a}_1) &= \min\{\kappa_n(\vec{v}) \mid \vec{v} \in T_p F, \|\vec{v}\| = 1\}, \\ \lambda_2(p) = \kappa_n(\vec{a}_2) &= \max\{\kappa_n(\vec{v}) \mid \vec{v} \in T_p F, \|\vec{v}\| = 1\}. \end{aligned}$$

**Definition 5.** Die Zahlen  $\lambda_1(p)$  und  $\lambda_2(p)$  heißen die *Hauptkrümmungen* von  $F$  im Punkt  $p$ . Die *Gauß-Krümmung*  $K(p)$  und die *mittlere Krümmung*  $H(p)$  von  $F$  in  $p$  sind definiert durch:

$$\begin{aligned} K(p) &:= \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p), \\ H(p) &:= \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2}. \end{aligned}$$

Unsere Erkenntnisse über die geometrische Bedeutung der Krümmung ebener Kurven können wir nun anwenden und Aussagen über die lokale Gestalt einer Fläche in der Umgebung eines Punktes mit positiver bzw. negativer Gauß-Krümmung machen:



Die mittlere Krümmung ist der Mittelwert aller Normalenkrümmungen im Punkt  $p$ .

**Satz 5.** Für die mittlere Krümmung gilt

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \kappa_n(\vec{v}(\theta)) \, d\theta,$$

wobei  $\vec{v}(\theta)$  der Einheitsvektor in  $T_p F$  ist, der aus  $\vec{a}_1$  durch Drehung um den Winkel  $\theta \in [0, 2\pi]$  entsteht.

Drückt man die Einheitsvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  durch die Tangentialvektoren  $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$  und  $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$  aus und setzt dies in die Formel für die Normalenkrümmungen ein, so erhält man folgende explizite Formel für die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung.

**Satz 6.** Seien  $(h_{ij}(p))$  und  $(g_{ij}(p))$  die  $(2 \times 2)$ -Matrizen mit den Einträgen

$$h_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u), \vec{N}(p) \right\rangle \quad \text{und} \quad g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right\rangle.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} K(p) &= \text{Det}\left((h_{ij}(p)) \circ (g_{ij}(p))^{-1}\right), \\ H(p) &= \text{Spur}\left((h_{ij}(p)) \circ (g_{ij}(p))^{-1}\right). \end{aligned}$$

Diese Formel erlaubt es uns, aus der Parametrisierung der Fläche die Krümmungen zu bestimmen.

## 7. Minimalflächen

**Definition 6.** Eine Fläche mit mittlerer Krümmung  $H = 0$  nennt man *Minimalfläche*.

Ihre Gauß-Krümmung ist in jedem Punkt kleiner oder gleich Null. Minimalflächen sind in jedem Punkt  $p$  „gleichmäßig“ in beide Seiten der Tangentialebene gekrümmt – der Mittelwert aller Normalenkrümmungen im Punkt  $p$  ist Null.

Die Minimalflächen-Eigenschaft ( $H = 0$ ) haben z.B. Flächen, die unter allen in eine feste Randkurve eingespannten Flächen den kleinsten Flächeninhalt haben (daher kommt der Name *Minimalfläche*).

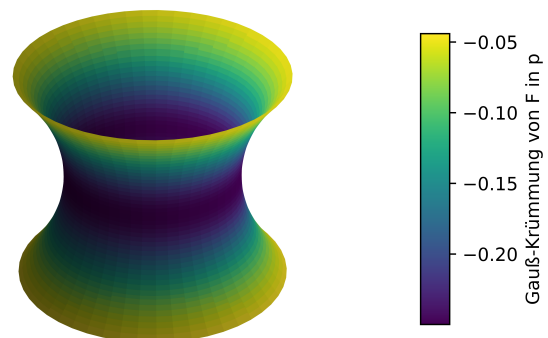
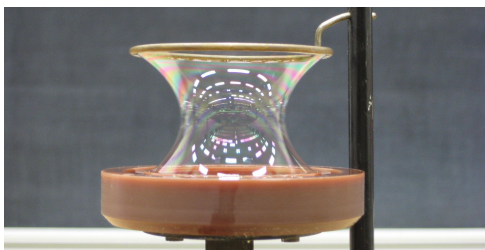
**Beispiel 7.** Das Katenoid

Eine hängende Kette kann man durch die Funktion  $\cosh$  beschreiben. Das Katenoid ist die Rotationsfläche, deren Profilkurve  $K$  die Kettenlinie ist, betrachtet als Graph der Funktion über der  $z$ -Achse in der  $(z, x)$ -Ebene, d.h.  $K$  ist beschrieben durch die parametrisierte Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

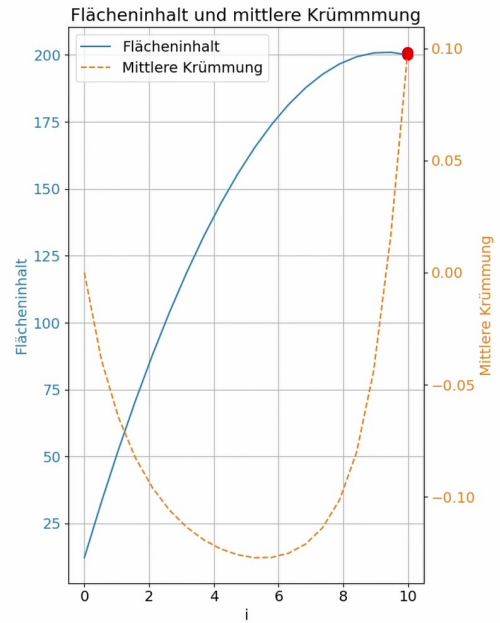
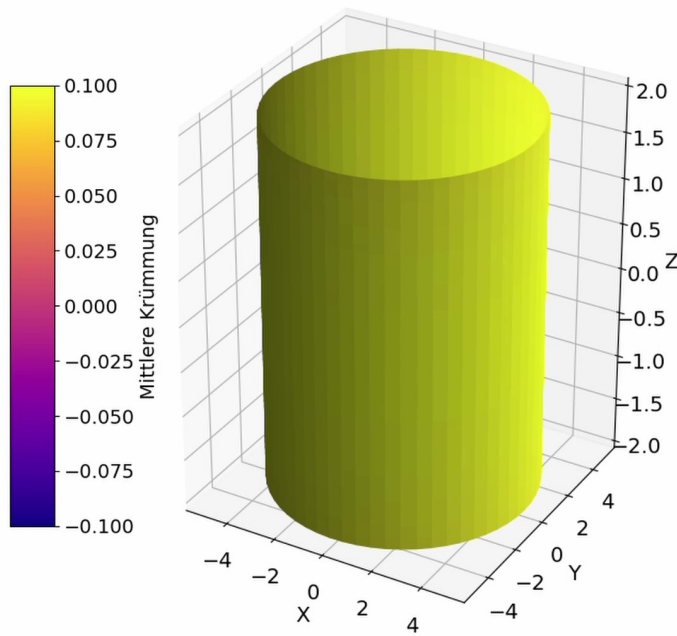
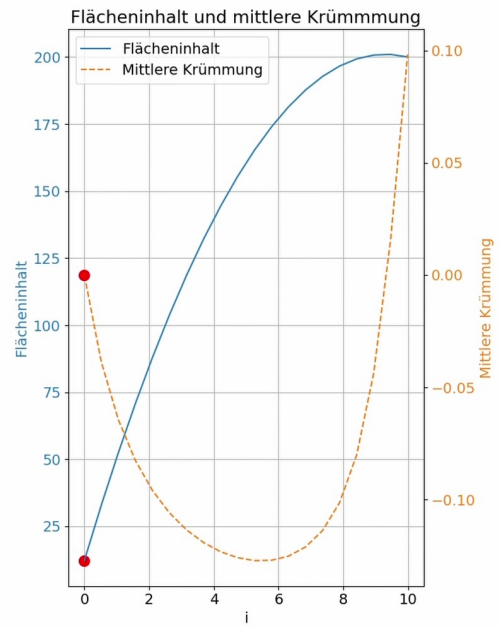
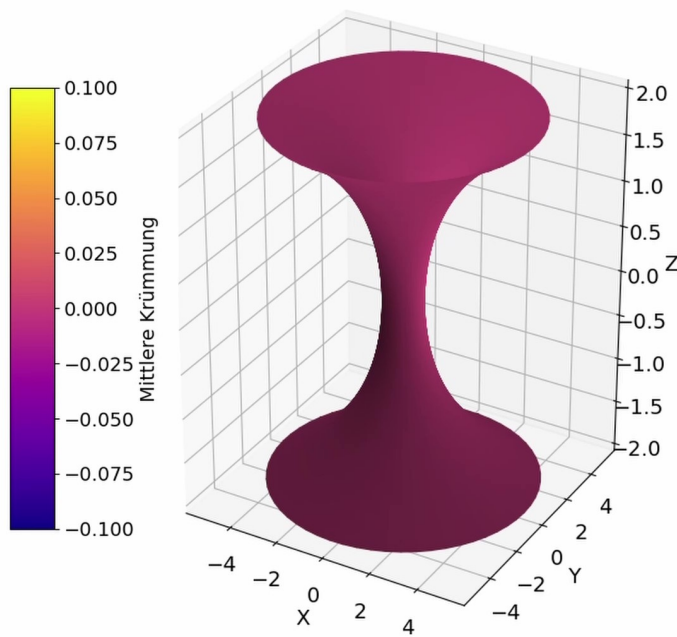
$$\gamma(z) = (c \cosh(z/c), 0, z).$$

Das Katenoid hat dann die Form

$$F := \{(c \cosh(z/c) \cdot \cos \alpha, c \cosh(z/c) \cdot \sin \alpha, z) \mid z \in I, \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$



Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche unter den (nichtebenen) Rotationsflächen. Ein Zylinder ist dabei keine Minimalfläche und hat auch einen größeren Flächeninhalt als das Katenoid (siehe Abbildungen unten).

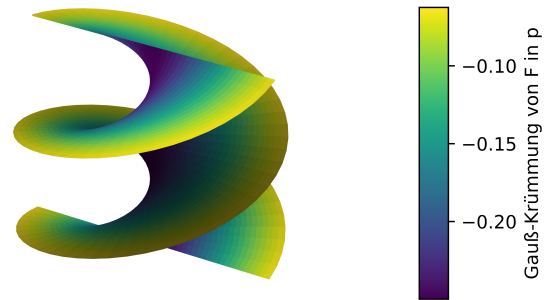


### Beispiel 8. Die Wendelfläche

Die Wendelfläche

$$W = \{(s \cos \alpha, s \sin \alpha, h\alpha) \mid s \in I, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

für ein Intervall  $I$  in den reellen Zahlen und eine Konstante  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$  ist ebenfalls eine Minimalfläche.



### Beispiel 9. Die Scherksche Minimalfläche

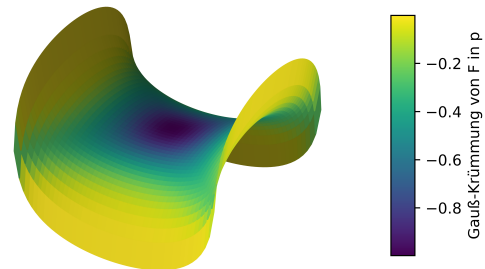
Die Scherksche Minimalfläche  $S$  ist der Graph der Funktion

$$h : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$h(x, y) := \ln(\cos y) - \ln(\cos x),$$

d.h.

$$S := \{ (x, y, \ln(\cos y) - \ln(\cos x)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in (-\pi/2, \pi/2) \}.$$

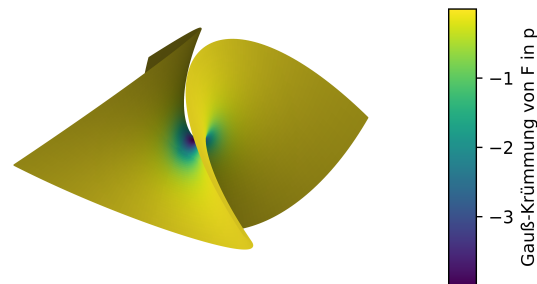


### Beispiel 10. Die Enneper-Fläche

Die Enneper-Fläche ist parametrisiert durch  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f(u_1, u_2) := \left( u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2, u_1^2 - u_2^2 \right).$$

Sie ist ebenfalls eine Minimalfläche.



**Ausblick:** Sei  $\{F_s\}_{s \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$  eine Schar von Flächen  $F_s$  und

$$\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{A}(s) := \text{Area}(F_s)$$

die Funktion, die jedem  $s \in (\varepsilon, -\varepsilon)$  den Flächeninhalt  $\text{Area}(F_s)$  von  $F_s$  zuordnet. Eine Fläche  $F$  ist genau dann eine Minimalfläche, wenn die Funktion  $\mathcal{A}$  für alle Flächenscharen  $\{F_s\}$  mit  $F = F_0$  einen *kritischen Punkt* in  $s = 0$  hat, d.h.  $\mathcal{A}'(0) = 0$  gilt. Das bedeutet nicht unbedingt, dass  $\mathcal{A}(s)$  in  $s = 0$  ein *Minimum* annimmt. Man kann aber zeigen, dass dies bei hinreichend kleinen Veränderungen von  $F = F_0$  gilt. Der Flächeninhalt von Minimalflächen wird größer, wenn man sie in *hinreichend kleinen* Bereichen abändert.