

# Zykloiden und das Tautochronenproblem

### *Teilnehmende:*

- |                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| 2 Teilnehmende des | Andreas-Gymnasiums        |
| 2 Teilnehmende des | Heinrich-Hertz-Gymnasiums |
| 2 Teilnehmende des | Herder-Gymnasiums         |
| 3 Teilnehmende des | Käthe-Kollwitz-Gymnasiums |

*mit tatkräftiger Unterstützung durch:*

Andreas Thiel

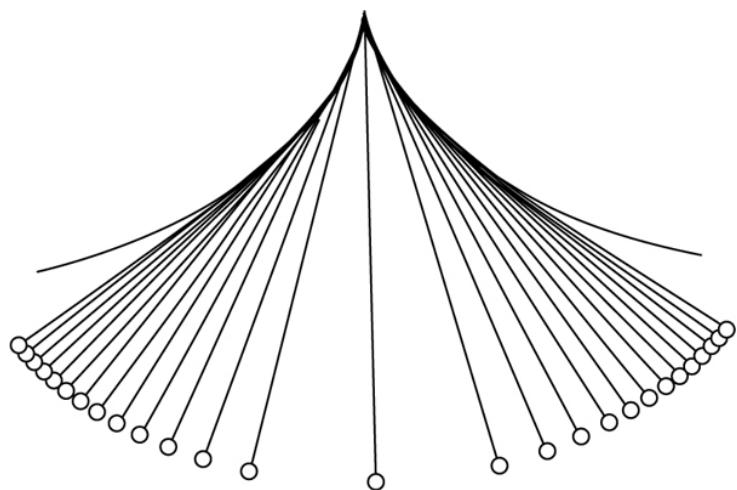
Andreas-Gymnasiums  
Heinrich-Hertz-Gymnasiums  
Herder-Gymnasiums  
Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

Andreas-Gymnasium

### *Gruppenleiter:*

Carsten Pfüller  
Luise Fehlinger

Immanuel-Kant-Gymnasium  
Humboldt-Universität zu Berlin



# 1. Einleitung

## 1.1. Das Tautochonenproblem

Früher wurde die Zeit gern mit Pendeluhrn gemessen, da Pendel einfache periodisch schwingende Systeme sind. Man musste nur die Schwingungen zählen, schon wusste man, wie viel Zeit vergangen war. Allerdings ist das gar nicht so genau, wenn es um längere Zeitspannen geht. Die Periodendauer eines Pendels ist nicht immer gleich. Sie hängt von der Größe der Auslenkung des Pendels ab.

Um ein sogenanntes tautochrones Pendel zu erhalten, muss man ein klassisches Pendel abändern.

**Definition 1** (Tautochronie). Eine ebene Kurve, entlang derer sich ein nur von der Schwerkraft beschleunigter Massenpunkt bewegt und unabhängig vom Ausgangspunkt stets dieselbe Zeit benötigt, um zum tiefsten Punkt zu gelangen, heißt tautochron.

Die Begriffe in dieser Definition werden wir Stück für Stück erklären. Zunächst werden wir jedoch überprüfen, dass ein einfaches Fadenpendel tatsächlich nicht tautochron ist.

## 1.2. Das Fadenpendel

Knotet man eine Masse an einen Faden und lässt die Masse an dem Faden frei schwingen, so erhält man ein reales Fadenpendel. Die Schwerkraft treibt das Pendel an. Aber das ist nicht die einzige Kraft, die in der Realität auf die Masse einwirkt. Z.B. bremst die Reibung die Schwingung des Pendels.

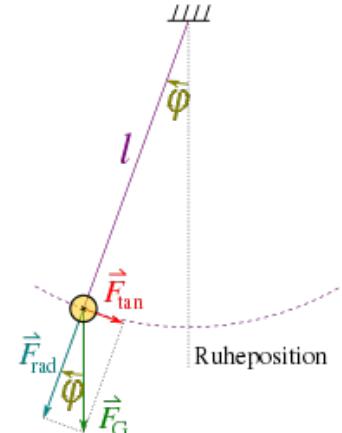


Bild der Kräfte im Pendel

Für das mathematische Pendel gelten die folgenden Beziehungen.

Gewichtskraft

$$F_g = m \cdot g$$

Position in Abhängigkeit von Auslenkungswinkel  $s(\varphi) = \varphi \cdot l$

Tangentielle Kraft

$$F_t = -\sin(\varphi) \cdot F_g$$

$F_t$  bewirkt eine Beschleunigung der Masse

$$= m \cdot a$$

$$= m \cdot l \cdot \varphi''$$

Bringen wir diese Formeln zusammen erhalten wir

$$\varphi'' = -\frac{\sin(\varphi) \cdot g}{l}.$$

Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  gilt näherungsweise  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . Damit vereinfachen wir unsere Formel.

$$\varphi'' = -\varphi \cdot \frac{g}{l}$$

Lösungen dieser linearen Differentialgleichung zweiten Grades sind Sinus- und Kosinusfunktionen. Daher ist  $\varphi(t)$  eine Linearkombination der folgenden Terme:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \varphi_1\right), \quad \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \varphi_2\right),$$

insbesondere scheint das mathematische Pendel mit dieser Vereinfachung tautochron zu sein.

### 1.3. Experimentelle Überprüfung

Dies sind Messwerte bei einem Pendel der Länge  $l = 150$  cm mit unterschiedlichen Anfangsauslenkungen in Grad. Angegeben ist jeweils der Mittelwert der Dauer von 10 Pendelschwingungen (in Sekunden).

<b>5°</b>	<b>10°</b>	<b>15°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>
2,25	2,33	2,35	2,41	2,48
2,31	2,34	2,35	2,43	2,48
2,31	2,34	2,35	2,41	2,49
2,34	2,34	2,35	2,42	2,48
2,33	2,34	2,35	2,42	2,48

Messwerte bei  $l = 150$  cm

<b>5°</b>	<b>10°</b>	<b>15°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>
[2,28 2,34]	[2,34 2,34]	[2,35 2,35]	[2,41 2,43]	[2,48 2,48]

Konfidenzintervalle bei  $l = 150$  cm

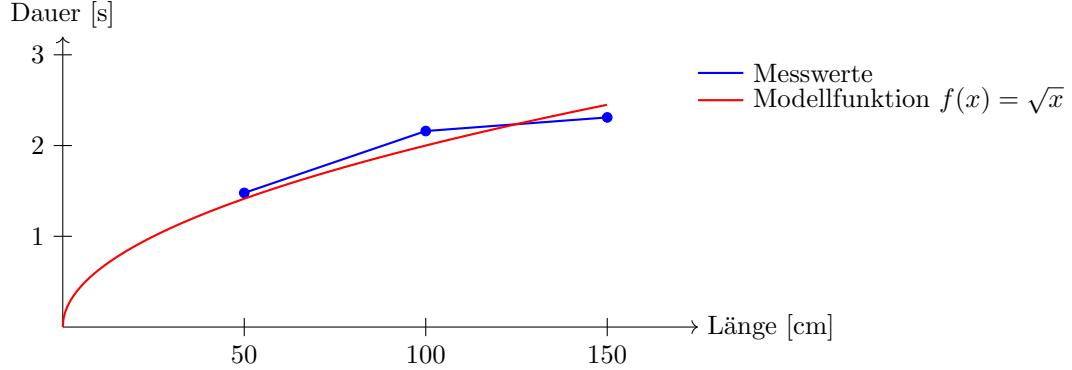
Dies sind Messwerte bei einem Pendel der Länge  $l = 100$  cm bzw.  $l = 50$  cm mit unterschiedlichen Anfangsauslenkungen.

<b>5°</b>	<b>10°</b>	<b>15°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>
2,16	2,06	2,35	2,20	2,37

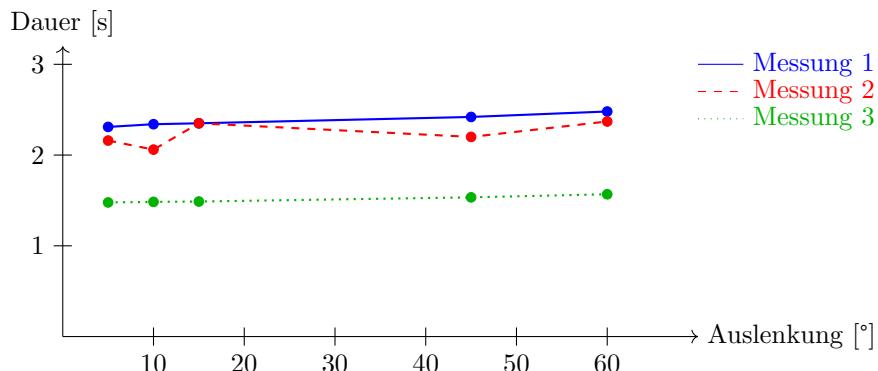
Messwerte bei  $l = 100$  cm

<b>5°</b>	<b>10°</b>	<b>15°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>
1,478	1,484	1,488	1,534	1,568

Messwerte bei  $l = 50$  cm



### Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Fadenlänge

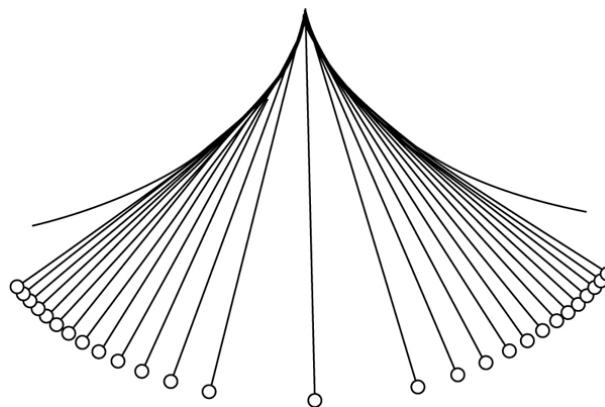


### Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Auslenkung

## 2. Abändern des Fadenpendels

Da wir gesehen haben, dass die Schwingungsdauer eines Fadenpendels mit der Länge und auch mit der Auslenkung des Fadens zunimmt, liegt es nahe, ein Pendel zu konstruieren, bei dem bei größerer Auslenkung der Faden verkürzt wird.

Das Pendel schwingt also nicht im freien Raum, sondern umgeben von Kurvenbacken, d.h. Backen, die entsprechend einer speziellen zu ermittelnden Kurve geformt sind, sodass bei höherem Winkel die effektive Pendellänge kürzer wird.



### 2.1. Parametrisierte Kurven und ihre Eigenschaften

**Definition 2** (Parametrisierte Kurve). Eine parametrisierte Kurve ist eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Abbildung (d.h. in jeder Komponente mindestens zweimal stetig differenzierbar)

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein reelles Intervall ist.

Die lokale Änderung einer parametrisierten Kurve beschreiben wir wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} &= \frac{(\gamma_1(t+h), \gamma_2(t+h)) - (\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{h} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h} \\ \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \\ &=: \gamma'(t) \end{aligned}$$

Wir nennen  $\gamma'(t)$  den Tangentialvektor an die parametrisierte Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  im Punkt  $\gamma(t)$ . Da der Vektor in Richtung der Tangente zeigt, gilt für die Tangentengleichung der Tangente an  $\gamma$  im Punkt  $\gamma(t)$

$$\text{Tan}_t \gamma = \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t).$$

**Definition 3** (Reguläre parametrisierte Kurven). Eine parametrisierte Kurve ist regulär, wenn der Tangentialvektor überall von Null verschieden ist.

Um die Länge einer parametrisierten Kurve zu bestimmen, schätzen wir diese durch die Länge von Sehnenpolygonen ab.

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre parametrisierte Kurve. Eine Zerlegung  $\mathcal{P}$  von  $[a, b]$  ist gegeben durch

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}, \quad \text{mit } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Die Länge des Sehnenpolygons zu  $\gamma$  und  $\mathcal{P}$  erhalten wir, wenn wir die Längen der Strecken aufsummieren.

$$L(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

**Definition 4** (Länge einer Kurve, rektifizierbare Kurve). Existiert das Supremum der Längen aller Sehnenpolygone zu  $\gamma$ ,

$$\sup \{L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } [a, b]\},$$

so nennen wir es die Länge von  $\gamma$ .

$$L(\gamma) := \sup \{L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

In diesem Fall heißt  $\gamma$  rektifizierbar.

Natürlich ist es sehr umständlich, so die Länge einer Kurve zu bestimmen. Deswegen suchen wir eine einfachere Berechnungsmöglichkeit.

Mit der Dreiecksungleichung gilt für immer feiner werdenen Zerlegungen

$$L(\gamma, \mathcal{P}_1) \leq L(\gamma, \mathcal{P}_2) \leq L(\gamma, \mathcal{P}_3) \leq \dots$$

**Lemma 1** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für beliebige Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

**Beweis:** In Koordinaten geschrieben sieht die zu zeigende Gleichung wie folgt aus.

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Da beide Seiten nicht-negativ sind, quadrieren wir die Ungleichung und formen weiter äquivalent um.

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ \iff a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \\ \iff 2a_1 b_1 a_2 b_2 &\leq a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\ \iff 0 &\leq a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ \iff 0 &\leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, womit die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung bewiesen ist. Nebenbei sehen wir, dass Gleichheit genau dann besteht, wenn Vektor  $\vec{a}$  ein Vielfaches von  $\vec{b}$  ist.  $\square$

Nun wollen wir die Zerlegungen immer feiner werden lassen und im Grenzübergang von der Summe zum Integral übergehen.

Das Integral einer vektorwertigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieren wir komponentenweise.

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \end{pmatrix}$$

**Lemma 2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, so gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

**Beweis:** Wir setzen

$$\int_a^b f(t) dt =: v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|^2 = v_1^2 + v_2^2 \\ &= v_1 \cdot \int_a^b f_1(t) dt + v_2 \cdot \int_a^b f_2(t) dt \\ &= \int_a^b (v_1 f_1(t) + v_2 f_2(t)) dt. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b (v_1 f_1(t) + v_2 f_2(t)) dt &\leq \int_a^b \|v\| \cdot \|f(t)\| dt \\ &= \|v\| \cdot \int_a^b \|f(t)\| dt \end{aligned}$$

Wir teilen durch die Norm von  $v$  und erhalten die gewünschte Ungleichung

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

$\square$

**Satz 1** (Berechnung der Länge von stetig differenzierbaren Kurven). *Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist  $\gamma$  rektifizierbar und*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Beweis:**

Im ersten Schritt zeigen wir, dass  $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  eine obere Schranke für  $L(\gamma, \mathcal{P})$  für jede Zerlegung  $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  von  $[a, b]$  ist.

Dazu nutzen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$L(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \stackrel{HS}{=} \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right\|$$

Mit dem gerade gezeigten Lemma gilt

$$\sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass tatsächlich Gleichheit besteht, die obere Schranke also tatsächlich das Supremum ist.

Dazu betrachten wir eine Hilfsfunktion.

$$\begin{aligned} \ell : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \ell(t) := L(\gamma|_{[a, t]}) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Ableitung über den Differenzenquotienten,

$$\frac{\ell(t+h) - \ell(t)}{h} = \frac{L(\gamma|_{[t, t+h]})}{h}.$$

Es gilt

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq L(\gamma|_{[t, t+h]}) \leq \int_t^{t+h} \|\gamma'(s)\| ds$$

und damit

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{L(\gamma|_{[t, t+h]})}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(s)\| ds$$

Im Limes  $h \rightarrow 0^+$  ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\|\gamma'(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{L(\gamma|_{[t, t+h]})}{h} \leq \|\gamma'(t)\|.$$

Analoge Betrachtungen für  $h \rightarrow 0^-$  ergeben diese Abschätzung auch in diesem Fall und es folgt mit dem Sandwich-Lemma

$$\ell'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt damit

$$L(\gamma) = \ell(b) = \underbrace{\ell(b) - \ell(a)}_{=0} = \int_a^b \ell'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

□

### 3. Evolventen

Da sich bei unserem Pendel ein Faden an einer Kurvenbacke „abwickeln“ soll, betrachten wir nun Kurven, die auf eine solche Art entstehen.

**Definition 5** (Evolvente). Die Evolvente zu einer Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit dem Startpunkt  $\gamma(t_0)$  ist die Kurve  $e_{t_0}$ , die der Endpunkt eines um die Kurve gewickelten Fadens, der in  $\gamma(t_0)$  endet, beschreibt, wenn sich der Faden straff abwickelt. Man nennt eine solche Kurve Evolvente von  $\gamma$  mit Startpunkt  $\gamma(t_0)$ ,

$$e_{t_0}(t) = \gamma(t) - L(\gamma|_{[t_0, t]}) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

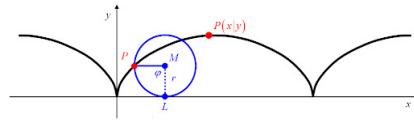
(lat. evolvere – herauswickeln)

**Beispiel 1** (Evolvente eines Kreises). Bei einem Kreis ist die Evolvente mit Startpunkt  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  gegeben durch

$$e_{t_0}(t) = (\cos \varphi, \sin \varphi) - \varphi \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

### 4. Zykloiden

Eine Zykloide entsteht, wenn ein Kreis an einer Kurve abrollt und dabei die Spur eines Punktes, der mit dem Kreis fest verbunden ist, verfolgt wird.



Beispiel einer Zykloide

Wir betrachten hier gewöhnliche Zykloiden, bei denen der Rollkreis auf einer Geraden abrollt und der Punkt  $P$  auf dem Rollkreis liegt.

Wir entwickeln die Beschreibung dieser Kurve Stück für Stück. Dabei sei  $M$  der Mittelpunkt des Rollkreises, welcher durch den Abrollwinkel  $\varphi$  parametrisiert werden kann,  $M = (r \cdot \varphi, -r)$ . Außerdem gilt für den Vektor von  $M$  nach  $P$

$$P - M = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Zykloide ergibt sich dann durch

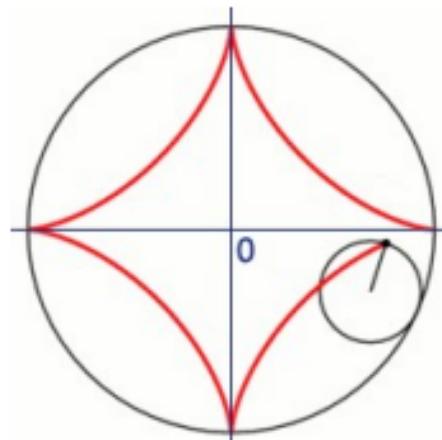
$$\begin{aligned} \gamma_Z &= M + (P - M) \\ &= r \cdot (\varphi, -1) + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= r \cdot (\varphi - \sin \varphi, -1 + \cos \varphi) \end{aligned}$$

## Beispiel 2 (Astroide).

Eine Astroide ist eine Zykloide, bei der der Rollkreis innerhalb eines anderen Kreises abgerollt wird und der Radius des Rollkreises ein Viertel des Radius des Leitkreises ist.

In der Animation kann man sich durch Betätigen des ersten Schiebereglers eine Astroide zeichnen lassen. Die anderen Schiebereglern verändern die verschiedenen Parameter so, dass weitere Zykloiden entstehen.

**Geogebra-Animation zu Astroiden**



Astroide

## 5. Tautochrones Pendel

Wir werden nun nachvollziehen, dass zykloidenförmige Kurvenbacken tatsächlich ein tautochrones Pendel entstehen lassen.

Wir parametrisieren die Kurvenbacken durch eine nach oben geöffnete Zykloide wie folgt

$$\gamma_Z(\varphi) = r(\varphi, -1) + r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \varphi \in [\pi, 2\pi].$$

Dann gilt

$$\gamma'_Z(\varphi) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und } \|\gamma'_Z(\varphi)\| = r \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 2r \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Mit der trigonometrischen Identität  $\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{2}} = |\sin \frac{\varphi}{2}|$  können wir dies einfacher ausdrücken,

$$\|\gamma'_Z(\varphi)\| = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$$

und erhalten für die Länge der Zykloide

$$L(\gamma_Z|_{[\phi, \varphi]}) = \int_{\pi}^{\varphi} \|\gamma'_Z(t)\| dt = -4r \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Damit bestimmen wir nun eine Parametrisierung der Evolventen der Zykloide mit Startpunkt im lokalen Minimum.

$$\begin{aligned}
e_\pi(\varphi) &= \gamma_Z(\varphi) - \frac{L(\gamma_Z|_{[\pi, \varphi]})}{\|\gamma'_Z(\varphi)\|} \cdot \gamma'_Z(\varphi) \\
&= r(\varphi, -1) + r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{4r \cos \frac{\varphi}{2}}{2r \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot r \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \\
&= r \left( \varphi - \sin \varphi + 2 \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cdot (1 - \cos \varphi), -1 + \cos \varphi - 2 \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \sin \varphi \right)
\end{aligned}$$

Zeichnet man diese Evolvente der Zykloide, so liegt der Verdacht nahe, dass es sich um eine verschobene Zykloide handelt – genauer verschoben entlang der  $x$ -Achse um  $r\pi$  und entlang der  $y$ -Achse um  $-2r$ . D.h., diese Kurve müsste mit der Kurve

$$\gamma_z(\varphi - \pi) + \begin{pmatrix} r\pi \\ -2r \end{pmatrix} = r \cdot (\varphi + \sin(\varphi), -3 - \cos(\varphi))$$

übereinstimmen.

Dies lässt sich mit trigonometrischen Identitäten bestätigen. Die Evolvente ist also ebenfalls eine Zykloide.

Nun beweisen wir, dass die Zykloide tatsächlich tautochron ist.

**Satz 2** (Tautochronie der Zykloiden). *Die Zykloide ist tautochron.*

**Beweis:** Nach dem Energieerhaltungssatz gilt

$$E_{\text{kin}}(\varphi) + E_{\text{pot}}(\varphi) = \text{const} = E_{\text{pot}}(\varphi_0) \text{ also } \frac{1}{2}mv^2 + mg(y(\varphi) - y(\varphi_0)) = 0.$$

Wir stellen nach der Geschwindigkeit, also der Ableitung des Weges nach der Zeit, um

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))} \text{ und damit } dt = \frac{1}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} ds.$$

Um integrieren zu können, müssen wir noch  $ds$  durch  $d\varphi$  darstellen. Mit der Bogenlänge der Zykloide ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \|\gamma'_Z(\varphi)\| = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \text{ und folglich } ds = 2r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Damit können wir schreiben

$$dt = \frac{2r \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} d\varphi.$$

Integration vom Startpunkt  $\varphi_0$  bis zum tiefsten Punkt bei  $\pi$  liefert ein Viertel der Periodendauer.

$$\frac{1}{4}T_{\varphi_0} = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{2r \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} d\varphi$$

Wir setzen  $y(\varphi) = r(\cos \varphi - 1)$  ein,

$$\frac{1}{4}T_{\varphi_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r(\cos \varphi_0 - 1 - (\cos \varphi - 1))}} d\varphi,$$

und nutzen die Identitäten  $\cos \varphi_0 - \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}} d\varphi\end{aligned}$$

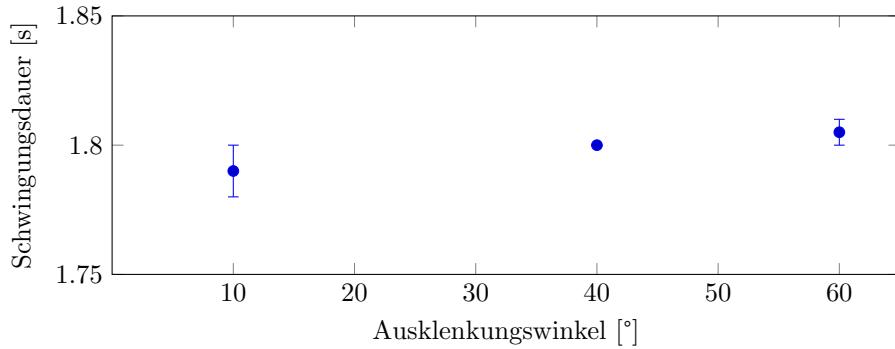
Wir substituieren  $x := \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}$ ,  $dx = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} d\varphi$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= (-4) \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{2 \cos \frac{\varphi_0}{2}}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}} d\varphi \\ &= \frac{-2}{\sqrt{g}} \sqrt{r} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[ \arcsin(x) \right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Periodendauer des Zykloidenpendels  $T_{\varphi_0} = 16\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$  und mit  $l = 4r$  ergibt sich die Periodendauer, die wir auch näherungsweise für das mathematische Pendel bestimmt hatten

$$T_{\varphi_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Insbesondere ist  $T_{\varphi_0}$  unabhängig von  $\varphi_0$  und das Zykloidenpendel tautochron.  $\square$



Schwingungsdauer in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel bei einem realen Zykloidenpendel

Unsere Messdaten an einem realen Zykloidenpendel bestätigen hinreichend genau die Theorie, auch wenn in der Realität die Reibung Einfluss auf die Schwingungsdauer hat, was wir in der Theorie nicht beachtet haben.