HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN, DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Musterlösungen zur Prüfungsklausur zur Vorlesung Analysis I* (WS 10/11) am 28. Februar 2011

Aufgabe 1: *4 Punkte*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{4+2a_n}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösung 1 Variante 1:

Falls die Folge einen Grenzwert $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ hat, dann erfüllt dieser die aus der Rekursionsvorschrift gewonnene Fixpunktgleichung

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4+2a_n} = \sqrt{4+2A}.$$

Diese Gleichung ist für die positiven Lösungen von

$$A^2 = 4+2A \iff (A-1)^2 = 5 \iff A = 1 \pm \sqrt{5}$$

erfüllt, also $A = A = 1+\sqrt{5} \in (3,4)$. Die Konvergenz kann nun nach dem Kriterium für monotone und beschränkte Folgen nachgewiesen werden:

i) Beschränktheit: Zeige $0 \le a_n < 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion.
   - Induktionsanfang: Am Anfang gilt offensichtlich $0 \le 0 = a_1 < 4$.
   - Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n = k \in \mathbb{N}$. Dann ist, mit der Monotonie der Wurzelfunktion und
     $$0 \le a_{k+1} = \sqrt{4+2a_k} \le \sqrt{4+2\cdot 4} < \sqrt{16} = 4,$$
     die Behauptung auch für $n = k+1$ erfüllt.

ii) Monotonie: Zeige mit vollst. Induktion, dass $a_{n+1} \ge a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit, dass die Folge monoton wachsend ist.
   - Induktionsanfang: Am Anfang der Folge gilt $a_1 = 0 \le 2 = a_2$.
   - Induktionsschritt: Gilt die Behauptung für ein $n = k \in \mathbb{N}$, dann folgt, wieder mit der Monotonie der Wurzelfunktion,
     $$\begin{aligned} & a_k \le a_{k+1} \\ \Longrightarrow\quad & 4+2a_k \le 4+2a_{k+1} \\ \Longrightarrow\quad & a_{k+1} = \sqrt{4+2a_k} \le \sqrt{4+2a_{k+1}} = a_{k+2}, \end{aligned}$$
     d.h., die Behauptung ist auch für $n = k+1$ erfüllt.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent mit Grenzwert $A = 1+\sqrt{5}$.

Lösung 1 Variante 2:

$A = 1+\sqrt{5}$ als einzig möglicher Grenzwert wie oben. Zeige Beschränktheit und Monotonie unter direkter Benutzung von A.

i) Beschränktheit: Zeige $0 \le a_n \le A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion.

   - Induktionsanfang: Am Anfang gilt offensichtlich $0 \le 0 = a_1 \le A$.
   - Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n = k \in \mathbb{N}$. Dann ist, mit der Monotonie der Wurzelfunktion und

$$\begin{aligned} 0 \le a_{k+1} &= \sqrt{4+2a_k} \le \sqrt{4+2\cdot A} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} = 1+\sqrt{5} = A \end{aligned}$$

   die Behauptung auch für $n = k+1$ erfüllt.

ii) Monotonie: Zeige $a_{n+1} \ge a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt:

$$\begin{aligned} a_n \le 1+\sqrt{5} \implies (a_n-1)^2 \le 5 \implies a_n^2 - 2a_n \le 4 \implies a_n^2 \le 4+2a_n \\ \implies a_n \le \sqrt{4+2a_n} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Lösung 1 Variante 3:

Kandidat $A = 1+\sqrt{5} \in (3,4)$ wie oben. Zeige, dass der Abstand von a_n zu A eine Nullfolge ist:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - A &= \sqrt{4+2a_n} - (1+\sqrt{5}) = \frac{(4+2a_n)-(1+2\sqrt{5}+5)}{\sqrt{4+2a_n}+(1+\sqrt{5})} = \frac{2(a_n-A)}{\sqrt{4+2a_n}+(1+\sqrt{5})} \\ |a_{n+1}-A| &\le \frac{2|a_n-A|}{\sqrt{4}+3} = \frac{2}{5}|a_n-A|. \end{aligned}$$

Durch rekursive Fortsetzung dieser Ungleichung folgt $|a_n - A| \le (\frac{2}{5})^{n-1}|a_1 - A|$. Damit ist die Abstandsfolge durch eine geometrische Nullfolge beschränkt und daher selbst eine Nullfolge, woraus $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ folgt.

Aufgabe 2: *4 Punkte*

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Summanden $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

konvergiert. Geben Sie ein Beispiel an, in welchem die umgekehrte Schlussrichtung falsch ist.

Lösung 2 Variante 1:

Für nichtnegative reelle Zahlen A, B gilt

$$\sqrt{AB} \le \max(A, B) \le A + B$$

Daher ist die Reihe über $(a_n + a_{n+1})$ eine Majorante für die Reihe über $\sqrt{a_n a_{n+1}}$. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = a_1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n = -a_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

ist die Majorante und damit die Reihe selbst konvergent.

Gegenbeispiel: Setze

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{a_n a_{n+1}} = 2^{-\lceil n/2 \rceil} \le \frac{1}{\sqrt{2}^n}.$$

Damit ist die Reihe über die Wurzeln durch eine geometrische Reihe majorisiert, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert (da z.B. ihre Summanden keine Nullfolge bilden).

Lösung 2 Variante 2:

Mit der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel gilt schärfer:

$$0 \le (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 = A + B - 2\sqrt{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{AB} \le \tfrac{1}{2}(A + B)$$

Rest analog zur ersten Variante.

Im Gegenbeispiel kann man auch andere konvergente und divergente Reihen kombinieren. So wäre $a_{2m} = \frac{1}{m}$ und $a_{2m-1} = \frac{1}{m^3}$ eine weitere Variante.

Aufgabe 3: *4 Punkte*

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{5n}{3n}x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}x^{2n}$.

Lösung 3:

a) Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius durch $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ gegeben, sofern dieser Grenzwert existiert. Hier ist

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(5n)!}{(3n)!(2n)!}\frac{(3(n+1))!(2(n+1))!}{(5(n+1))!}=\frac{(5n)!}{(3n)!(2n)!}\frac{(3n+3)!(2n+2)!}{(5n+5)!}$$

$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\,(2n+2)(2n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}=\frac{(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})\,(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}{(5+\frac{5}{n})(5+\frac{4}{n})(5+\frac{3}{n})(5+\frac{2}{n})(5+\frac{1}{n})}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{3^3\cdot 2^2}{5^5}=3^3\cdot 2^8\cdot 10^{-5}=0,27\cdot 0,256=0,03456\,.$$

(Die erste Form des Grenzwertes ist als Ergebnis ausreichend.)

b) Aufgrund des Auftretens von Exponentialen bietet sich das Wurzelkriterium an. Die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ sind

$$a_k=\begin{cases}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} & \text{für } k=2n \text{ gerade}\\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad \sqrt[k]{|a_k|}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[2n]{\frac{1+n^2 2^{-n}}{1+n^3 3^{-n}}} & \text{für } k=2n \text{ gerade}\\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

Für jedes $a\in\mathbb{N}$ hat die Folge $(1+n^a a^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 1 und ist daher beschränkt, $1\leq 1+n^a a^{-n}\leq M_a<\infty$. Nach dem Schachtelsatz gilt für die $2n$-te Wurzel daraus

$$1\leq\sqrt[2n]{1+n^a a^{-n}}\leq\sqrt[2n]{M_a}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\,,$$

womit auch der Ausdruck in der Mitte den Grenzwert 1 hat. Daher ergibt sich der Konvergenzradius ρ aus

$$\frac{1}{\rho}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[2n]{\frac{1+n^2 2^{-n}}{1+n^3 3^{-n}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

zu $\rho=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Aufgabe 4: *4 Punkte*

Die Funktionen $f, g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ seien einmal stetig differenzierbar mit $f(0) = 0 = g(0)$. Zeigen Sie, dass dann im Nullpunkt auch die zweite Ableitung der Produktfunktion $h = f \cdot g$ existiert.

Lösung 4 Variante 1:

Die Produktfunktion ist nach den Rechenregeln des Differentials einmal stetig differenzierbar mit Ableitung $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ und daher $h'(0) = 0$. Für den Differenzenquotienten im Nullpunkt ergibt sich so

$$\begin{aligned}\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0} = \frac{h'(x)}{x} &= f'(x)\frac{g(x)}{x} + \frac{f(x)}{x}g'(x)\\ &= f'(x)\frac{g(x)-g(0)}{x-0} + \frac{f(x)-f(0)}{x-0}g'(x)\end{aligned}$$

und mit der Stetigkeit der Ableitungen und den Grenzwertsätzen für Summe und Produkt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} f'(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\lim_{x\to 0} g'(x)\\ &= 2f'(0)g'(0).\end{aligned}$$

Da alle Grenzwerte auf der rechten Seite dieser Gleichung existieren, existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite und damit die zweite Ableitung im Nullpunkt.

Lösung 4 Variante 2:

Eine stetige Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ ist in $x = 0$ genau dann differenzierbar, wenn es eine stetige Funktion $\tilde{f} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = x\tilde{f}(x)$. Dies folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit als stetige Fortsetzbarkeit des Differenzenquotienten, und es ist

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & \text{für } x \neq 0,\\ f'(0) & \text{für } x = 0.\end{cases}$$

Analog gibt es ein stetiges $\tilde{g} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x\tilde{g}(x)$. Also gilt für die Ableitung des Produktes

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = x\big(f'(x)\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x)g'(x)\big)$$

und der zweite Faktor ist nach den Rechenregeln der Stetigkeit wieder stetig. Daher hat h' genau die geforderte Faktorisierung, ist also in $x = 0$ differenzierbar. Damit ist h dort zweimal differenzierbar.

Aufgabe 5: *4 Punkte*

Die Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ sei wenigstens n–fach stetig differenzierbar und habe an den $(n+1)$ Punkten $a<x_1<x_2\cdots<x_n<x_{n+1}<b$ Nullstellen. Zeigen Sie, dass es dann eine Nullstelle $\xi\in(a,b)$ der n–ten Ableitung geben muss, d.h., $f^{(n)}(\xi)=0$.

Lösung 5:

Man zeigt rekursiv, dass für jedes $k=0,1,\ldots,n$ die k-te Ableitung $f^{(k)}$ in (a,b) wenigstens $n-k+1$ Nullstellen hat. Für $k=0$ gilt dies nach Voraussetzung. Hat $f^{(k)}$ die Nullstellen

$$a<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}\cdots<x_{n+1-k}^{(k)}<b,$$

und möglicherweise weitere, so existiert nach dem Mittelwertsatz bzw. dem Satz von Rolle in jedem Intervall $(x_j^{(k)},x_{j+1}^{(k)})$, $j=1,2,\ldots,n-k$ zwischen zwei Nullstellen von $f^{(k)}$ eine Extremalstelle von $f^{(k)}$ und damit eine Nullstelle $x_j^{(k+1)}$ der um eine Ordnung höheren Ableitung $f^{(k+1)}$. Daher hat dann $f^{(k+1)}$ wenigstens $n-k=n+1-(k+1)$ Nullstellen

$$a<x_1^{(k+1)}<x_2^{(k+1)}\cdots<x_{n-k}^{(k+1)}<b\,.$$

Damit hat $f^{(n)}$ wenigstens $n+1-n=1$ Nullstelle $\xi=x_1^{(n)}$ in (a,b).

Aufgabe 6: *4 Punkte*

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)}$.

Lösung 6 Variante 1:

Da der Ausdruck im Grenzwert die Gestalt $\frac{0}{0}$ hat, kann die Regel von l'Hopital angewendet werden

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(\ln(1+x)\right)^2 + x^2\, 2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}}{-2x\sinh(x^2)}$$

Kürzen von 2x

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^2 + \ln(1+x)\frac{x}{1+x}}{-\sinh(x^2)}$$

GW in Zähler und Nenner ist wieder 0, l'Hopital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ln(1+x)\frac{1}{(1+x)^2}}{-2x\cosh(x^2)}$$

Kürzen von $2x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}\frac{3+2x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2(1+x)^2}}{-\cosh(x^2)}$$

Grenzwertrechenregeln

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{3+2x}{2(1+x)^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)^2}}{-\lim_{x\to 0}\cosh(x^2)} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{-1}
\end{aligned}$$

letztmalig l'Hopital

$$\begin{aligned}
&= -\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= -2
\end{aligned}$$

Lösung 6 Variante 2:

Kürze $2x^3$ statt $2x$ nach der ersten Anwendung von l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(\ln(1+x)\right)^2 + x^2\, 2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}}{-2x\sinh(x^2)}$$

Kürzen von $2x^3$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 + \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{1+x}}{-\frac{\sinh(x^2)}{x^2}}$$

Grenzwertrechenregeln

$$= -\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh(x^2)}{x^2}} = -\frac{1^2 + 1\cdot 1}{1} = -2,$$

denn für die einzenen Grenzwerte gilt, wieder nach l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$\text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cosh(x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \cosh(x^2) = 1\,.$$

Lösung 6 Variante 3:

Tausche komplizierte Faktoren durch einfache aus und substituiere $y = x^2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)} &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cosh(x^2)} \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{y\to +0} \frac{y^2}{1-\cosh(y)}\end{aligned}$$

l'Hopital in beiden Faktoren

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right)^2 \cdot \lim_{y\to +0} \frac{2y}{-\sinh(y)} = -2 \lim_{y\to +0} \frac{y}{\sinh(y)}$$

nochmals l'Hopital

$$= -2 \lim_{y\to +0} \frac{1}{\cosh(y)} = -2$$

Beachtet man, dass $(1-\cosh(y))(1+\cosh(y)) = 1-\cosh^2(y) = -\sinh^2(y)$ oder $(1-\cosh(y)) = -2\sinh^2(y/2))$ ist, so kann der letzte Faktor noch weiter in einfachere Grenzwerte zerlegt werden.

Lösung 6 Variante 4:

Setze die Taylorreihen bzw. Potenzreihendefinitionen der Funktionen ein,

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 \mp = x - x^2\,\ell(x)$$

$$\text{und} \;\; \cosh(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + x^4 c(x),$$

wobei die Funktionen ℓ und c in einer Umgebung der Null stetig sind.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)} &= \frac{x^2\left(x-x^2\,\ell(x)\right)^2}{1-\left(1+\frac{1}{2}x^4+x^8c(x^2)\right)} \\
&= \frac{\left(1-x\,\ell(x)\right)^2}{-\frac{1}{2}-x^4c(x^2)} \\
\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\ln(1+x)\right)^2}{1-\cosh(x^2)} &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: *10 Punkte*

Für eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ und $x_0\in(a,b)$ sei die zentrale Ableitung in x_0 definiert als

$$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}\,.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist f in x_0 differerenzierbar, so existiert $f'_{\pm}(x_0)$.

b) Existiert $f'_{\pm}(x_0)$, so ist f in x_0 differerenzierbar.

c) Existiert $f'_{\pm}(x_0)$, so ist f in x_0 stetig.

d) Die zentrale Ableitung ist linear, d.h. existieren $f'_{\pm}(x_0)$ und $g'_{\pm}(x_0)$, so existiert auch für $h=f+\alpha g$, $\alpha\in\mathbb{R}$, die zentrale Ableitung $h'_{\pm}(x_0)=(f+\alpha g)'_{\pm}(x_0)$.

e) Sind f und g in x_0 stetig und existieren $f'_{\pm}(x_0)$ und $g'_{\pm}(x_0)$, so existiert auch die zentrale Ableitung $h'_{\pm}(x_0)$ des Produktes $h=f\cdot g$ in x_0.

Lösung 7:

a) Wahr. Es ist

$$\begin{aligned}
f'_{\pm}(x_0)&=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}\\
&=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-t)}{2t}\\
&=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}\right)\\
&=f'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

b) Falsch. Betrachte die Funktion $f(x)=|x|$ in $x_0=0$. Dann liefert der zentrale Differenzenquotient immer den Wert Null, was im Grenzwert also auch für die zentrale Ableitung gilt. Aber f ist in x_0 nicht differenzierbar.

c) Falsch. Da der Funktionswert in die Definition der zentralen Ableitung nicht eingehen, existiert diese auch für die in $x_0=0$ unstetige Funktion

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x\neq 0,\\ 1 & \text{für } x=0\,.\end{cases}$$

d) Wahr. Folgt aus der Linearität von Grenzwerten von Funktionen.

$$\begin{aligned}
&\frac{h(x_0+t)-h(x_0-t)}{2t}\\
&=\frac{f(x_0+t)+\alpha\, g(x_0+t)-f(x_0-t)-\alpha\, g(x_0-t)}{2t}\\
&=\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}+\alpha\,\frac{g(x_0+t)-g(x_0-t)}{2t}\\
\Longrightarrow\quad & h'_{\pm}(x_0)=f'_{\pm}(x_0)+\alpha g'_{\pm}(x_0)
\end{aligned}$$

e) Wahr. Betrachtet man den zentralen Differenzenquotienten, so kann man die übliche Zerlegung vornehmen und erhält

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0-t)g(x_0-t)}{2t}\\
&=\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0-t)g(x_0+t)+f(x_0-t)g(x_0+t)-f(x_0-t)g(x_0-t)}{2t}\\
&=\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}g(x_0+t)+f(x_0-t)\frac{g(x_0+t)-g(x_0-t)}{2t}
\end{aligned}$$

$$\implies \quad h'_{\pm}(x_0)=f'_{\pm}(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'_{\pm}(x_0)$$

Aus der Existenz der einzelnen zentralen Ableitungen sowie der Stetigkeit beider Funktionen folgt die Konvergenz dieses zentralen Differenzenquotienten bei $t\searrow 0$.

Aufgabe 8: *4 Punkte*

Berechnen Sie die Werte der bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int_1^2 \exp(3x-1)\,\mathrm{d}x.$

Lösung 8:

a) Mittels partieller Integration, wobei x abgeleitet wird, ergibt sich (bzw. auch nach $(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \left(-\frac{\pi}{6}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - (-0\cdot 1 + 0) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \approx 0{,}046550159$$

b) Die lineare Substitution $u = \phi(x) = 3x-1$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv und hat die Ableitung $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \phi'(x) = 3$. Mit $\phi(1)=2$ und $\phi(2)=5$ transformiert sich das Integral wie

$$\int_1^2 \exp(3x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \exp(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_2^5 \exp(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{3}\,[\exp(u)]_2^5 = \frac{e^5 - e^2}{3} \approx 47{,}008034$$

Aufgabe 9: *6* Punkte*

(Zusatzaufgabe) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das folgende uneigentliche Integral einen endlichen Wert hat:

$$0 < \gamma_n = \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Stellen Sie eine Rekursionsformel für die Folge der $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf.

Lösung 9:

Das vorgelegte Integral ist ein uneigentliches Riemann-Integral und muss deshalb als Grenzwert $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ interpretiert werden. Da für $x > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^n}{n!} \\
\Longrightarrow\quad & x^n \exp(-x) = x^n \exp(-x/2)\exp(-x/2) < \frac{x^n}{\frac{(x/2)^n}{n}!}\exp(-x/2) = 2^n\, n!\exp(-x/2)
\end{aligned}$$

gilt, existiert eine Majorante des Integranden mit endlichem uneigentlichen Integral

$$2^n\, n! \int_0^\infty \exp(-x/2)\,\mathrm{d}x = -2\cdot 2^n\, n! \lim_{b\to\infty}\left[\exp(-x/2)\right]_0^b = 2^{n+1}\, n!$$

Nach der Monotonie des Riemann-Integrals hat also auch das gegebene Integral einen endlichen Wert für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Durch partielle Integration erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-x^n e^{-x}\right]_0^b + \int_0^b n x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left(-b^n e^{-b}\right)}_{=0} + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= n\gamma_{n-1},
\end{aligned}$$

wegen z.B. $0 < b^n e^{-b} = \dfrac{b^n}{\sum_{k=0}^\infty \frac{b^k}{k!}} \le \dfrac{(n+1)!}{b} \xrightarrow[b\to\infty]{} 0.$

Mit $\gamma_0 = 1$ erhält man die Rekursion der Fakultät, d.h. $\gamma_n = n!$.

Man kann auch von der Rekursionsgleichung und $\gamma_0 = 1$ ausgehend die Endlichkeit der Integrale per vollständiger Induktion beweisen.