Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dr. Holger Heitsch, Dr. Jörn Müller

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 5

Abgabe bis 29. November 2010 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 5.1: (Epsilontik) *10 Punkte*

a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz unter Verwendung der ε–$n(\varepsilon)$–Definition:

1) $a_n = \dfrac{n^2+2}{n^2-\pi}$;

2) $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n}$;

3) $a_n = \sqrt{n}$;

4) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{2^n}$;

b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie:

1) $a_n = n^2 + (-1)^n$;

2) $a_n = n + \sqrt{4+n^{-2}}$.

Aufgabe 5.2: (Rechenregeln) *10 Punkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und geben Sie ggf. deren Grenzwert an:

a) $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

b) $a_n = n^2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

c) $a_n = \dfrac{3^n-4n^3+2}{7\cdot 3^n+n^7+n}$;

d) $a_n = (-1)^n \frac{n+3}{3n^2-2}$;

e) $a_n = \dfrac{n^3}{\binom{2n}{2n-3}}$;

f) $a_n = \dbinom{100n}{n^2}$.

Bitte wenden.

<u>Aufgabe 5.3:</u> (Mittelwert- und Teilfolgen) *10 Punkte*

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittel

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

gegen a konvergiert. Geben Sie eine Folge an, die selbst divergiert, deren arithmetische Mittel jedoch konvergieren.

b) Von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt, dass deren Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst? Beweisen Sie Ihre Vermutung.