SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 0

Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden und wird in der ersten Übung am Dienstag den 9.4.19 besprochen.

Aufgabe 1.

(a) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

  (i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen,

  (ii) die Vereinigung je zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen,

  (iii) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A) \subset X$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ wieder abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen**, falls es für jeden Punkt $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass der offene ε-Ball um x,

$$B_\varepsilon(x) := \big\{p \in X \big| d(x,p) < \varepsilon\big\},$$

ganz in U liegt.

(a) Dies definiert eine Topologie auf X, die sogenannte **metrische** Topologie.

(b) Ein offener Ball ist offen.

(c) Aus den Änfängervorlesungen kennen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig bezüglich der ε-δ-Definition ist, wenn sie stetig bezüglich der metrischen Topologien ist.

(d) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$, falls es eine offene Menge V gibt mit $x \in V \subset U$. Eine Topologie heißt **Hausdorffsch**, falls je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Zeigen Sie, dass jede metrische Topologie Hausdorffsch ist.

(e) Beschreiben Sie topologische Räume, die **nicht** Hausdorffsch sind.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Flächen aus Abbildung 1 homöomorph sind.

Aufgabe 4.

(a) Die Relativtopologie einer Teilmenge A eines topologischen Raumes X ist in der Tat eine Topologie auf A.

(b) Sei O die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$, d.h. die durch die euklidische Metrik definierte metrische Topologie. Dann ist auch die auf $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

(c) Sei $f\colon X \to Y$ wobei $X = A_1 \cup A_2$ die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen $A_1, A_2 \subset X$ ist. Falls $F|_{A_i}\colon A_i \to Y$ stetig ist, für $i = 1, 2$, dann ist auch $f\colon X \to Y$ stetig.

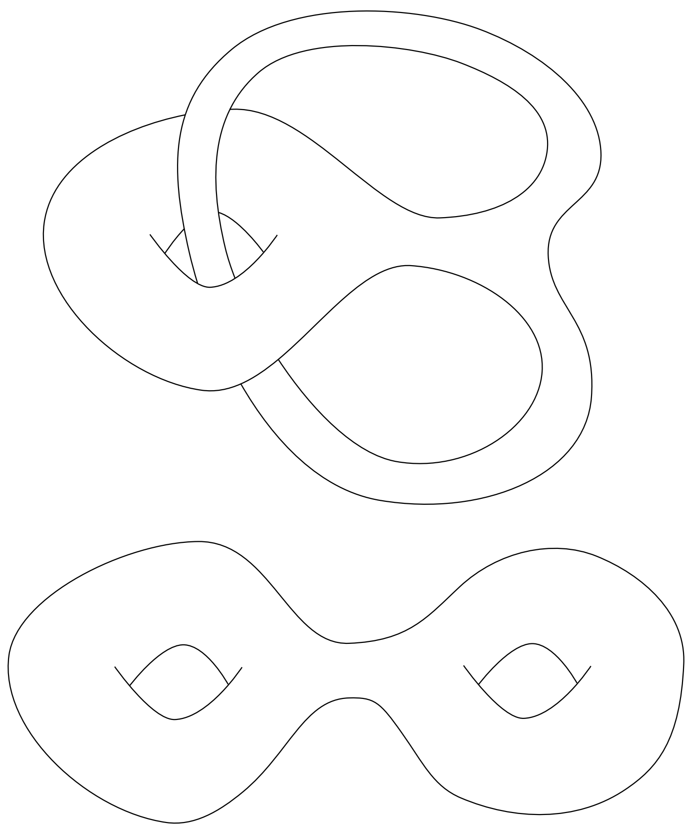

Abbildung 1: Homöomorphe Flächen

Aufgabe 5.
Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge B von offenen Mengen heißt **Basis** der Topologie, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus B ist.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass jede Topologie eine Basis hat.

(b) $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie (bzgl. der euklidischen Metrik) hat eine abzählbare Basis der Topologie.

(c) Beschreiben Sie topologische Räume, die keine abzählbaren Basen besitzen.