SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
Wir bezeichnen mit $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ den **abgeschlossenen Einheitsball** im $\mathbb{R}^n$ und mit $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ die **Einheitssphäre**.

(a) R^n ist homöomorph zu $D^n \setminus S^{n-1}$.

(b) Die Gerade durch den **Nordpol** $N := (0, ..., 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen weiteren Punkt $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$ schneidet die Äquatorebene $\{x_{n+1} = 0\}$ in genau einem Punkt. Dies definiert eine Abbildung $S^n \setminus \{N\} \to R^n$, die sogenannte **stereographische Projektion**. Geben Sie eine explizite Formel für diese Abbildung an und zeigen Sie damit, dass $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $S^n \setminus \{p\}$ ist für jeden beliebigen Punkt p aus S^n.

Aufgabe 2.

(a) Beschreiben Sie eine raumfüllende Kurve, d.h. eine stetige und surjektive Abbildung

$$[0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1].$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist genau dann, wenn $n = 1$ gilt.

(c) Später in der Vorlesung werden wir die Dimensionsinvarianz beweisen, d.h. wir werden zeigen, dass $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist, für $n \neq m$. Überzeugen Sie sich davon, dass dies eine nicht-triviale Aussage ist.

Bonusaufgabe 1.
Seien X und Y topologische Räume. Wir bezeichnen mit $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_y : X \times Y \to Y$ die kanonischen Projektionen. Die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ ist die **gröbste** Topologie (d.h. die Topologie mit den wenigsten offenen Mengen) auf $X \times Y$, für die π_X und π_y stetig sind. Beschreiben Sie die offenen Mengen in dieser Topologie und weisen sie explizit nach, dass dies eine Topologie definiert.

Bonusaufgabe 2.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum X äquivalent sind:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind $\emptyset$ und X.

(iii) Falls $X = A \cup B$, mit A, $B \neq \emptyset$ Teilmengen von X, so gilt $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ oder $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Hier bezeichnet $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.

Bonusaufgabe 3.
Ein topologischer Raum heißt **diskret**, falls jede Teilmenge offen ist, oder äquivalent: falls alle einpunktigen Teilmengen offen sind. Dies ist die **feinste** mögliche Topologie, d.h. diejenige mit den meisten offenen Mengen. Man stellt sich die Punkte eines solchen Raumes als diskret liegend vor, im Gegensatz zu kontinuierlich verteilten Punkten. Ein Raum heißt **total unzusammenhängend**, falls jede Zusammenhangskomponente aus nur einem Punkt besteht. Zeigen Sie:

(a) Jeder diskrete Raum ist total unzusammenhängend.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, mit der von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ induzierten Topologie, ist total unzusammenhängend, aber nicht diskret.

Bonusaufgabe 4.
Arbeiten Sie die Details aus der Beweisskizze von Satz 4 (Satz über das Schinken-Sandwich) aus.

Abgabe: Freitag, 12.4.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.