SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Homologiegruppen der folgenden Simplizialkomplexe direkt mittels der Definition der Homologiegruppen:

(a) Drei Kopien des Randes eines 2-Simplex, verklebt entlang einer Ecke.

(b) Zwei hohle Tetraeder, verklebt entlang einer Kante.

(c) Ein Komplex, dessen zugrundeliegendes Polyeder homöomorph zu einem Möbiusband ist.

Aufgabe 2.
Ein orientiertes q-Simplex $\sigma = (x_0, \ldots, x_q)$ **induziert** eine Orientierung auf jeder seiner $(q-1)$-dimensionalen Seiten τ durch

$$\tau = (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q).$$

Wir nennen eine triangulierte n-Mannigfaltigkeit **orientierbar**, falls man die n-Simplexe so orientieren kann, dass je zwei benachbarte n-Simplexe entgegengesetze Orientierungen auf ihrer gemeinsamen $(n-1)$-dimensionalen Seite induzieren.

(a) Fertigen Sie Skizzen in Dimensionen 2 und 3 an.

(b) Zeigen Sie, dass dieser Begriff der Orientierbarkeit mit den Begriffen aus Aufgabe 3 von Blatt 7 übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie, dass eine triangulierbare geschlossene n-Mannigfaltigkeit M genau dann orientierbar ist, wenn $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ für jeden Simplizialkomplex K dessen zugrundeliegender Polyeder homöomorph zu M ist.

Hinweis: Starten Sie dazu mit einer explizieten Triangulierung des 2-Torus und identifizieren Sie einen 2-Zykel, welcher die zweite Homologiegruppe erzeugt. Betrachten Sie als nächstes eine Kleinsche Flasche. Kann es einen 2-Zykel auf der Kleinschen Flasche geben? Versuchen Sie anschließend den allgemeinen Fall zu betrachten, eventuell zuerst nur in Dimension 2.
Bemerkung: Einen Erzeuger von $H_n(M)$ nennt man auch **Fundamentalklasse** $[M]$ von M. Eine Wahl eines solchen Erzeugers legt also eine Orientierung auf M fest.

Aufgabe 3.
Konstruieren Sie zu jeder endlichen Folge $G_1, \ldots, G_n$ endlich erzeugter abelscher Gruppen einen Simplizialkomplex K mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(K) \cong G_q$ für $1 \leq q \leq n$, sowie $H_q(K) = 0$ für $q > n$.
Hinweis: Benutzen Sie hier den Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Aufgabe 4.

(a) Verifizieren Sie explizit, dass $\partial\sigma$ (für ein orientiertes q-Simplex σ) wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Reihenfolge der Ecken innerhalb der gegebenen Orientierungsklasse. Überprüfen Sie weiter, dass $\partial(-\sigma) = -\partial\sigma$.

(b) Eine einfach geschlossene, orientierte polygonale Kurve in einem Simplizialkomplex K definiert einen 1-Zykel, wenn man sich die Kurve denkt als formale Summe der Kanten, die diese Kurve durchläuft. Zeigen Sie, dass $Z_1(K)$ von solchen 'elementaren' Zykeln erzeugt wird.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, besteht in den folgenden Schritten.

(o) Es genügt, die Aussage für Simplizialkomplexe K mit $\dim(K) = 1$ und $|K|$ zusammenhängend zu beweisen.

(i) Für den Augmentationshomomorphismus $\varepsilon\colon C_0(K) \to \mathbb{Z}$ gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

(ii) Sei z ein 1-Zykel. Wir können die 1-Simplexe von K so orientieren, dass alle Koeffizienten in z nicht-negativ sind. Sei (x, y) eine Kante von K, die in z mit einer Vielfachheit $\lambda > 0$ auftritt. Sei K' der Komplex, der aus K durch Entfernen der Kante (x, y) (aber nicht der Ecken x, y) entsteht. Dann ist $|K'|$ noch stets zusammenhängend, denn andernfalls würde $z - \lambda(x, y)$ in K' in zwei 1-Ketten c_1, c_2 zerfallen mit $\varepsilon \circ \partial_1(c_i) \neq 0$.

(iii) Es gibt also einen Kantenweg in K' von y nach x. Dieser kann so gewählt werden, dass er zusammen mit (x, y) einen elementaren Zykel z_1 in K definiert. Dann ist $z - \lambda z_1$ ein Zykel in K'. Iteriere dieses Argument, um z als Summe von elementaren Zykeln zu schreiben.

Abgabe: Freitag, 14.6.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.