SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 11

Wichtig:
Die Vorlesungen am Dienstag den 18.6. und am Freitag den 21.6. sowie die Übung am Dienstag den 18.6. entfallen und werden (bei Bedarf) am Ende des Semesters nachgeholt. (Deswegen auch das veränderte Abgabedatum dieses Blattes.)
Bitte nehmen Sie in der Zeit vom 17.6. bis zum 28.6. an der Lehrevaluation der Humboldt-Universität teil. Die Abgabe der Bewertung (von Vorlesung und Übung) ist unter https://evaluation.hu-berlin.de möglich. (Das Universalpasswort (Token) wird/wurde am Freitag den 14. Juni in der Vorlesung verraten.)

Aufgabe 1.
Eine **exakte Sequenz** ist eine Folge von Gruppen und Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

so dass $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \ker(\varphi_{i-1})$ für alle i gilt.

(a) Die Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

sei exakt. Dann ist α ein Isomorphismus und G ist isomorph zu Z_6.

(b) Eine **kurze exakte Sequenz** *abelscher* Gruppen ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda\colon C \to B$, so dass $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu\colon B \to A$, so dass $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, dass die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, dass dann $B \cong A \oplus C$ gilt.

(ii) Ist C eine freie abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

Aufgabe 2.

(a) Jede exakte Sequenz der Form

$$0 \to Z_m \to G \to Z_n \to 0,$$

mit m und n teilerfremd, spaltet.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2} \to \mathbb{Z}_n \to 0.$$

Spaltet diese Sequenz?

(c) Geben Sie für $n \geq 2$ zwei nicht zueinander isomorphe abelsche Gruppen G an, für die eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to Z_n \to 0$$

existiert.

Aufgabe 3.
Der Simplizialkomplex K sei die Vereinigung zweier Simplizialkomplexe K_1 und K_2, so dass der Schnitt $K_1 \cap K_2$ aus eine Ecke besteht. (Wir nennen K die **simpliziale Einpunkvereinigung** von K_1 und K_2.) Zeigen Sie, dass dann für $q > 0$

$$H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)$$

gilt. Was gilt im Fall $q = 0$?

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation 'kettenhomotop' eine Äquivalenzrelation ist auf der Menge der Kettenabbildungen von einem Kettenkomplex $C = (C_q)$ zu einem Kettenkomplex $D = (D_q)$.

(b) Eine Kettenabbildung $f\colon C \to D$ heißt **Kettenäquivalenz**, und die beiden Kettenkomplexe heißen dann **kettenäquivalent**, falls es eine Kettenabbildung $g\colon D \to C$ derart gibt, dass $g \circ f$ und $f \circ g$ kettenhomotop zu id_C bzw. id_D sind. Zeigen Sie, dass 'kettenäquivalent' eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Kettenkomplexen ist.

Bonusaufgabe.
Zeigen Sie mittels Lemma 7.10 aus der Vorlesung, dass $i_q j_q\colon C_q(K^1) \to C_q(K^1)$ kettenhomotop zur Identität ist. Überlegen Sie sich dazu, dass die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt sind, wenn man für ein q-Simplex $\sigma \in K^1$ den Unterkomplex $L(\sigma) \subset K^1$ definiert als die baryzentrische Unterteilung des q-Simplexes von K, das σ enthält.

Abgabe: Freitag, 28.6.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.