Topologie I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Berechnen Sie mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz die Homologie

(a) der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$, aufgefasst als der Raum, den man durch Verkleben eines Möbiusbandes mit einer 2-Scheibe erhält;

(b) des 2-Torus, erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder;

(c) der Kleinschen Flasche, ebenfalls erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder.

(d) Beschreiben Sie weiter die Homologie einer verbundenen Summe $M_1 \# M_2$ zweier n-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 durch die Homologie ihrer Summanden.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie dass

$$S^{m+n+1} \cong (S^m \times D^{n+1}) \cup (D^{m+1} \times S^n)$$

mit

$$(S^m \times D^{n+1}) \cap (D^{m+1} \times S^n) = S^m \times S^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu den Rand von $D^{m+n+2} \cong D^{m+1} \times D^{n+1}$.

(b) Zeigen Sie mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz, dass für $m \neq n$ gilt:

$$H_q(S^m \times S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } \; q = 0,\, m,\, n,\, m+n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Was gilt für $H_q(S^m \times S^m)$?

Aufgabe 3.

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.18 aus der Vorlesung, indem Sie $\mathrm{Im}(j_*) = \ker(\Delta)$ und $\mathrm{Im}(\Delta) = \ker(i_*)$ verifizieren.

(b) Geben Sie eine geometrische Beschreibung des Homomorphismus Δ in der Mayer–Vietoris-Sequenz (Satz 7.19) für die Zerlegung eines Komplexes K in zwei Unterkomplexe L und M. Mit anderen Worten: Gegeben ein q-Zykel x in $K = L \cup M$, wie findet man geometrisch einen $(q-1)$-Zykel z in $L \cap M$, so dass $\Delta[x] = [z]$?

Aufgabe 4.
Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5
\end{tikzcd}
$$

Bestimmen Sie die minimalen Annahmen an f_1, f_2, f_4, f_5 (bzgl. Injektivität und Surjektivität), die garantieren, dass f_3

(i) injektiv

(ii) surjektiv

(iii) bijektiv

ist. Zeigen Sie durch Beispiele, daß diese Annahmen nicht weiter abgeschwächt werden können.

Bonusaufgabe.
Seien L, M Unterkomplexe des Simplizialkomplexes $K = L \cup M$ mit $|K|$, $|L|$, $|M|$ wegzusammenhängend. Leiten Sie aus der Mayer–Vietoris-Sequenz eine Beschreibung der ersten Homologie-Gruppe $H_1(L \cup M)$ als Quotientengruppe von $H_1(L) \oplus H_1(M)$ unter gewissen zusätzlichen Relationen her, in Analogie zum Satz von Seifert und van Kampen.

Abgabe: Freitag, 5.7.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.