SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 13

Dieses Blatt wird nicht korrigiert und kann auch nicht abgegeben werden (mit Ausnahme der Knobelaufgabe, welche ich nicht lösen kann, für welche ich aber gerne eine Lösung hätte). Trotzdem können Sie diese Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur nutzen.

Aufgabe 1.

(a) Jede exakte Sequenz von Vektorräumen spaltet.

(b) Berechnen Sie die Homologiegruppen von D^n und S^n mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Q}$.

(c) Berechnen Sie die Homologiegruppen alle Flächen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Q}$ und vergleichen Sie diese mit den ganzzahligen Homologiegruppen.

Aufgabe 2.
Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ mit $\deg(f) = k$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst den Grad der Abbildung $S^1 \ni z \mapsto z^k \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Konstruieren Sie als nächstes aus einer Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ von Grad k eine Abbildung $S^{n+1} \to S^{n+1}$ vom selben Grad, indem Sie S^{n+1} als die Einhängung von S^n sehen.

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie die Eulercharakteristik einer verbundenen Summe bzw. eines karthesischen Produktes aus seinen Summanden bzw. Faktoren.

(b) Die mod 2 Bettizahlen eines n-dimensionalen Simplizialkomplexes K sind definiert als

$$\overline{b}_q = \dim_{Z_2} H_q(K; Z_2)\,, \ \text{ für } \ q = 0, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \overline{b}_q.$$

Aufgabe 4.

(a) Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, die zu einer stetigen Abbildung $F\colon D^{n+1} \to S^n$ erweitert. Dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

(b) Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung mit geradem Abbildungsgrad. Dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

(c) Sei $f\colon |K| \to |K|$ eine simpliziale Abbildung eines Polyeders in sich selbst. Dann ist $L(f)$ gleich der Euler-Charakteristik der Fixpunktmenge von f.

Aufgabe 5.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zum Satz von Borsuk-Ulam sind.

(i) Jede antipodale stetige Abbildung $S^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine Nullstelle.

(ii) Es existiert keine antipodale stetige Abbildung $S^n \to S^{n-1}$.

(iii) Es existiert keine stetige Abbildung $D^n \to S^{n-1}$, die antipodal auf dem Rand ist.

(b) Folgern Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz aus dem Satz von Borsuk-Ulam.
Hinweis: Sowohl der Satz von Borsuk-Ulam als auch der Brouwersche Fixpunktsatz sind wahr, deswegen folgt trivialerweise die eine Aussage aus der anderen. Hier ist ein direkter elementarer Beweis gesucht, der nur ausgehend von dem Satz von Borsuk-Ulam ohne tiefere Theorie zu benutzen den Brouwerschen Fixpunktsatz verifiziert.

Knobelaufgabe.
Folgern Sie den Satz von Borsuk-Ulam aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz.
Hinweis: Eine Beweisstrategie könnte wie folgt aussehen: Man nimmt an, dass der Satz von Borsuk-Ulam falsch ist, z.B. könnte man annehmen, dass eine antipodale stetige Abbildung $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ ohne Nullstellen existiert. Wenn man aus f eine fixpunktfreie stetige Abbildung $g\colon D^n \to D^n$ konstruieren könnte, wäre man fertig.