SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1.
Die **Quaternionen** sind definiert als 4-dimensionaler reeller Vektorraum

$$\mathbb{H} := \{a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

auf dem eine assoziative Multiplikation durch die Regel

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

und Distributivität erklärt ist. Die Topologie auf $\mathbb{H}$ ist durch die Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die euklidische Norm ist $|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und das zu $a \in \mathbb{H}$ **konjugierte** Element sei

$$\overline{a} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ und $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$.

(b) $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$.

(c) Für $a \neq 0$ ist $\overline{a}/|a|^2$ das inverse Element von a bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{H}$.

(d) $|ab| = |a||b|$.

(e) Die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$ mit der von $\mathbb{H}$ induzierten Topologie und Multiplikation ist eine topologische Gruppe.

Aufgabe 2.
Identifizieren Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum der rein imaginären Quaternionen, d.h. mit Quaternionen der Form $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, und S^3 mit dem Raum der Quaternionen der Länge 1. Zeigen Sie:

(a) Konjugation von $R^3 \subset \mathbb{H}$ mit einem Element aus $S^3 \subset \mathbb{H}$ definiert ein Element aus $SO(3)$, d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ a &\longmapsto uau^{-1} \end{aligned}$$

ist für jedes $u \in S^3$ eine spezielle orthogonale Abbildung (also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um eine geeignete Achse).

(b) Die so definierte Abbildung

$$\begin{aligned} S^3 &\longrightarrow SO(3) \\ u &\longmapsto \{a \mapsto uau^{-1}\} \end{aligned}$$

ist ein stetiger, surjektiver Homomorphismus von topologischen Gruppen mit Kern $= \{\pm 1\}$.

(c) Folgern Sie, dass $SO(3)$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^3$ ist.

b.w.

Aufgabe 3.

(a) Die Menge der reellen $(n \times n)$-Matrizen $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ kann in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden. Dies induziert eine Topologie auf der Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $GL_n(\mathbb{R})$ mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen $O(n)$ mit der durch die Inklusion $O(n) \subset GL(n)$ induzierten Topologie eine kompakte topologische Gruppe ist.

Ein **Isomorphismus** zwischen topologischen Gruppen G_1 und G_2 ist ein Homöomorphismus $G_1 \to G_2$, der gleichzeitig ein Gruppenisomorphismus ist. Mit $SO(n)$ sei die spezielle orthogonale Gruppe bezeichnet, d.h. die Gruppe der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie:

(c) Die multiplikative Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$ ist isomorph zu $SO(2)$ (als topologische Gruppen).

(d) $O(n)$ ist homöomorph zu $SO(n) \times \mathbb{Z}_2$. Sind diese beiden topologischen Gruppen isomorph?

Aufgabe 4.

(a) Beschreiben Sie eine Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$, die das Möbiusband als Orbitraum hat.

(b) Beschreiben Sie drei verschiedene Operationen von $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf dem Torus mit Orbiträumen Zylinder, 2-Sphäre bzw. Kleinsche Flasche.

Abgabe: Freitag, 26.4.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.