Topologie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

(a) Für $n \geq 3$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend.

(b) Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.

(c) Folgern Sie daraus erneut, dass $\mathbb{R}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, für $n \geq 2$.

(d) Beschreiben Sie einen Raum der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.

(a) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to S^n$, die nicht surjektiv ist, ist **nullhomotop**, d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung.

(b) Je zwei beliebige stetige Abbildungen $f, g\colon X \to CY$ sind homotop zueinander, wobei CY den Kegel über Y bezeichnet.

(c) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist nullhomotop genau dann, wenn sie zu einer stetigen Abbildung $CX \to Y$ erweitert.

Aufgabe 3.

Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe $(G, \circ)$ mit Basispunkt e. Sei $u \circ v$ die Schleife definiert durch $(u \circ v)(s) := u(s) \circ v(s)$. Zeigen Sie, dass

$$uv \simeq u \circ v \simeq vu \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

und folgern Sie daraus, dass $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Aufgabe 4.

(a) Sei $f\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, die homotop zur Identität ist (nicht notwendig $\mathrm{rel}\,\{x_o\}$). Zeigen Sie, dass $f_\star\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein innerer Automorphismus ist, d.h. $f_\star$ ist von der Form

$$f_\star[u] = [v]^{-1}[u][v]$$

für eine geeignete Schleife v am Punkt x_0.

(b) Seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen vermöge einer Homotopie F. Sei x_0 ein Basispunkt in X und u der Weg $u(t) = F(x_0, t)$ von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$. Dann gilt

$$f_\star = u_\#^{-1} g_\star\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)).$$

Bonusaufgabe 1.
Führen Sie die Details aus den Beweisen von Satz 4.4 und Satz 4.6 aus der Vorlesung aus.

Bonusaufgabe 2.
Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation $(z_0,\ldots,z_n) \sim (w_0,\ldots,w_n) :\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : (z_0,\ldots,z_n) = (\lambda w_0,\ldots,\lambda w_n)$. Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(z_0,\ldots,z_n)$ bezeichnet man mit **homogenen** Koordinaten $[z_0 : \ldots : z_n]$. Man kann $\mathbb{C}P^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}^n$ von $\mathbb{C}^n$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}^n$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}^n$ seien genau die offenen-Teilmengen von $\mathbb{C}^n \subset \widehat{\mathbb{C}}^n$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}}^n \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie

(a) $\widehat{\mathbb{C}}^n$ ist tatsächlich ein kompakter topologischer Raum.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}^n$ ist homöomorph zu S^{2n}.
Hinweis: Nutzen Sie dazu die stereographische Projektion aus Aufgabe 1(b) von Blatt 1.

(c) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] &\longmapsto \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus.

Abgabe: Freitag, 3.5.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.