

Topologie I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

Ziel dieser Aufgabe ist es Satz 4.14 zu beweisen. Sei X einfach zusammenhängend und G eine topologische Gruppe, die diskret auf X wirkt. Zeigen Sie:

- (a) $\pi: X \rightarrow X/G$ ist eine Überlagerung.
- (b) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X/G)$ ist isomorph zu G .
Hinweis: Gehen Sie dazu analog zum Beweis von Satz 4.13 vor.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche und beschreiben Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche. Kann die Kleinsche Flasche die Struktur einer topologischen Gruppe tragen?

Aufgabe 3.

Wir fassen S^1 als den Einheitskreis in \mathbb{C} auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, f(1)),$$

für die folgenden Abbildungen $f: S^1 \rightarrow S^1$:

- (a) $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\pi/2)}$,
- (b) $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, für $n \in \mathbb{Z}$,
- (c) $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta}, & \text{falls } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ e^{i(2\pi-\theta)}, & \text{falls } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Aufgabe 4.

- (a) Beschreiben Sie einen Raum, der wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend ist.
- (b) Beschreiben Sie einen Raum, der lokal wegzusammenhängend, aber nicht semi lokal einfach zusammenhängend ist.
- (c) Beschreiben Sie einen Raum, der semi lokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend ist.

Tipp: Diese Aufgaben sind unter Verwendung der richtigen Hilfsmittel (wie z.B. Internetsuchmaschinen oder einem Buch über mengentheoretische Topologie) sehr leicht zu lösen. Um mit diesen Begriffen wirklich vertraut zu werden rate ich Ihnen bei der Bearbeitung dieser Aufgaben von der Benutzung solcher Hilfsmittel ab.

Bonusaufgabe.

Beweisen Sie die Hochhebungseigenschaft für Homotopien von Wegen, d.h. beweisen Sie Lemma 4.12 aus der Vorlesung.

Hinweis: Gehen Sie dazu analog zum Beweis von Lemma 4.11 vor.

Abgabe: Freitag, 10.5.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.