SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1.

(a) Fertigen Sie Skizen von k-Henkeln und deren Anheftungen an den Rand einer n-Mannigfaltigkeit für $0 \leq k \leq n \leq 3$ an.

(b) Beschreiben Sie eine Henkelzerlegung der Kleinschen Flasche mit genau einem 0-Henkel und übersetzen Sie diese Henkelzerlegung in ein Wort wie in der Vorlesung. Zeigen Sie durch Modifikation dieses Wortes, dass die Kleinsche Flasche homöomorph zu der verbundenen Summe zweier Kopien von $\mathbb{R}P^2$ ist.

(c) Welche Henkelzerlegung welcher Fläche wird durch das Wort

$$a\, b\, a\, c\, d\, e\, c\, f\, g\, h\, d\, g^{-1} f^{-1} h^{-1} b^{-1} e^{-1}$$

beschrieben?

Aufgabe 2.

(a) Sei $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Wir definieren wie in der Vorlesung

$$X \cup_f D^2 := \big(X + D^2\big)/p \sim f(p) \;\text{ für }\; p \in \partial D^2 = S^1.$$

Falls $f, g\colon S^1 \to X$ homotope Abbildungen sind, so gilt

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) In Aufgabe 1 von Blatt 6 hatten wir gesehen, dass die Narrenkappe einfach zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass die Narrenkappe sogar zusammenziehbar ist.
Hinweis: Nutzen sie Aufgabenteil (a).

(c) Zeigen Sie, dass die Narrenkappe triangulierbar ist, aber keine Henkelzerlegung besitzt.

Aufgabe 3.

Wir nennen eine glatte Mannigfaltigkeit M **orientierbar**, falls M einen Atlas besitzt in dem alle Karten kompatibel sind und so dass die Determinanten der Jakobi-Matrizen aller Kartenwechsel (d.h. $\psi \circ \phi^{-1}$ für Karten ψ und ϕ) überall positiv sind.

(a) Zeigen Sie, dass S^n orientierbar ist, indem Sie explizit einen solchen Atlas angeben.

(b) Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

(c) Eine Fläche ist genau dann orientierbar, wenn sie kein Möbiusband enthält, d.h. genau dann wenn es keinen geschlossenen Weg gibt, der Rechts und Links vertauscht.

Aufgabe 4.

(a) Einbettungen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ sind genau die streng monotonen Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Seien $\varphi_i, \varphi_2 \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktionen. Zeigen Sie die Existenz eines Homöomorphismus $h \colon \mathbb{R}^2_- \to \mathbb{R}^2_-$ mit $h = \mathrm{Id}$ außerhalb eines Kompaktums und $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als Rand von $\mathbb{R}^2_- = \{(x,y) | y < 0\}$ auf.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Existenz eines solchen Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(c) Füllen Sie damit die Details aus Lemma 5.9 und 5.10 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass alle 1-Henkel an den Rand des 0-Henkels angeheftet werden und dass diese Anheftungen nur von dem Monotonieverhalten und den Bildern der Anklebeabbildungen abhängen.

Bonusaufgabe 1.

(a) Die verbundene Summe einer n-Mannigaltigkeit M mit S^n is wieder homöomorph zu M.

(b) Die verbundene Summe zweier Mannigfaltigkeiten ist wieder eine Mannigfaltigkeit.

Bonusaufgabe 2.
Wir betrachten die Oberfläche W eines Einheitswürfels

$$W := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \max_i(|x_i|) = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass W keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass W eine topologische Mannigfaltigkeit ist und definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf W.

Abgabe: Freitag, 24.5.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.