SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

(a) Klassifizieren Sie kompakte 1-Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand).
Hinweis: Gehen Sie dabei (und auch in der folgenden Aufgabe) analog zum Beweis aus der Vorlesung vor.

(b) Klassifizieren Sie kompakte Flächen mit nicht-leerem Rand.

(c) Zwei geschlossene Flächen sind homöomorph genau dann, wenn sie homotopieäquivalent sind. Gilt dies auch für kompakte Flächen mit Rand?

Aufgabe 2.

(a) Beschreiben Sie eine Triangulierung von $\mathbb{R}P^n$.

(b) Sei K ein Simplizialkomplex. Konstruieren Sie eine Triangulierung auf der Einhängung $\Sigma|K|$ des zugrundeliegenden topologischen Raumes $|K|$.

Aufgabe 3.
Aus jeder geschlossenen, nicht-orientierbaren Fläche kann man durch Aufschneiden entlang einer einzigen einfach geschlossenen Kurve (d.h. einer geschlossenen Kurve ohne Doppelpunkte) eine orientierbare Fläche mit Rand erhalten.

Aufgabe 4.

(a) Ein Simplizialkomplex ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er zusammenhängend ist.

(b) Jeder Simplizialkomplex ist lokal einfach zusammenhängend.

(c) Der Durchmesser eines Simplexes ist gleich der Länge seiner längsten Seite.

Bonusaufgabe.
Jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Henkelzerlegung.
Hinweis: Gehen Sie dazu analog zum Beweis aus der Vorlesung für Flächen vor.
Knobelaufgabe: Jede glatte, kompakte n-Mannigfaltigkeit besitzt eine Henkelzerlegung.

Bonusaufgabe.
Sei G eine beliebige endlich präsentierte Gruppe und $n \geq 5$. Konstruieren Sie eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit M mit $\pi_1(M) \cong G$.
Knobelaufgabe: Gilt diese Aussage auch in anderen Dimensionen?

Knobelaufgabe.
Berchnen Sie die Fundamentalgruppe der 3-Mannigfaltigkeit, welche durch das planare Heegaard-Diagramm in Abbildung 1 beschrieben wird. Welche 3-Mannigfaltigkeit wird durch dieses Heegaard-Diagramm beschrieben?

Knobelaufgabe.
Beschreiben Sie ein planares Heegaard-Diagramm des 3-Torus $T^3 := S^1 \times S^1 \times S^1$.
Hinweis: Überlegen Sie sich dazu, dass man den 3-Torus aus einem Würfel $I \times I \times I$ durch Identifikation gegenüberliegender Seiten erhalten kann. Konstruieren Sie dann eine Henkelzerlegung auf T^3 und übersetzen Sie diese in ein planares Heegaard-Diagramm.

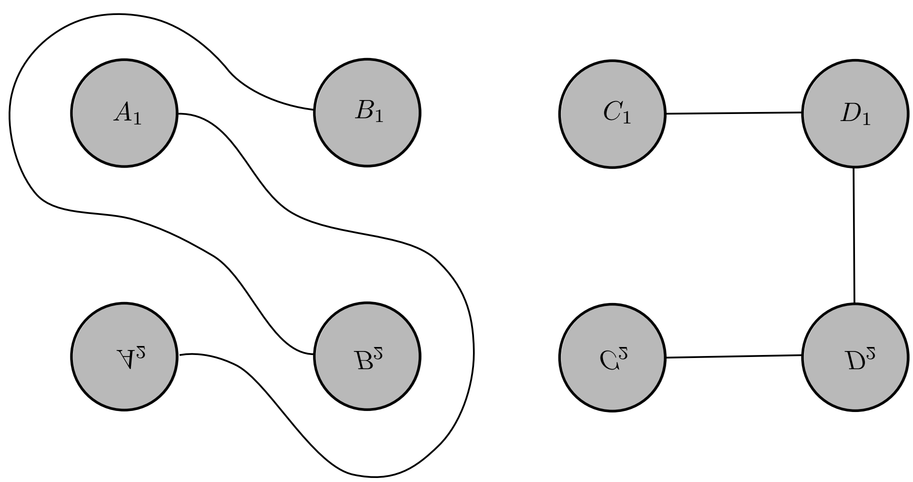

Abbildung 1: Die Anklebescheiben der 1-Henkel werden paarweise mittels einer Spiegelung an der horizontalen Mittelline dieses planaren Heegaard-Diagramms identifiziert.

Abgabe: Freitag, 31.5.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.