SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
Seien K und L Simplizialkomplexe, die sich in einem gemeinsamen Unterkomplex $K \cap L$ schneiden. Verifizieren Sie die Verklebeformel für die Euler-Charakteristik:

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

Für Aufgaben 2 und 3 nehmen wir an, dass Satz 6.4 bewiesen ist. D.h. wir nehmen an, dass die Euler-Charakteristik eine topologische Invariante von triangulierbaren Räumen ist.

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik einer n-Sphäre.

(b) Sei M eine glatte und kompakte n-Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. Wir bezeichnen mit $M \cup h_k$ das Resultat einer Anheftung eines k-Henkels h_k an M. Berechnen Sie die Euler-Charakteristik von $M \cup h_k$ aus der Euler-Charakteristik von M.

(c) Bestimmen Sie damit die Euler-Charakteristik aller Flächen und zeigen Sie, dass die Euler-Charakteristik zusammen mit der Orientierbarkeit der Fläche eine vollständige Invariante von geschlossenen Flächen ist.

(d) Die 2-Sphäre besitzt eine Henkelzerlegung mit einer beliebigen geraden Anzahl von Henkeln, aber keine Henekelzerlegung mit einer ungeraden Anzahl von Henkeln.

(e) Zeigen Sie, dass die Euler-Charakteristik einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit verschwindet.

(f) Wie berechnet man die Eulercharakteristik einer n-Mannigfaltigkeit aus ihrer Henkelzerlegung?

Aufgabe 3.
Sei M eine glatte kompakte n-Mannigfaltigkeit. Wir definieren $\Delta(M)$ als die minimale Anzahl von n-Simplexen in einer Triangulierung von M. Ähnlich definieren wir $h(M)$ als die minimale Anzahl von Henkeln in einer Henkelzerlegung von M.

(a) Berechnen Sie Δ und h für S^2, $\mathbb{R}P^2$ und T^2.

(b) Was können Sie über Δ und h für andere Flächen aussagen?

Aufgabe 4.
Beweisen Sie mittels der Existenz der simplizialen Approximation:

(a) Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $|K| \to |L|$ zwischen zwei Polyedern ist abzählbar.

(b) $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$.

(c) Jede stetige Abbildung $S^m \to S^n$ mit $0 \leq m < n$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

Knobelaufgabe.
Visualisieren Sie die erste (und zweite?) baryzentrische Unterteilung eines 3-Simplexes.

Abgabe: Freitag, 7.6.19 **vor** der Vorlesung. Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.