SS 2018 Marc Kegel

Kirby-Kalkül

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
Wir betrachten die folgenden topologischen Räume.

(1) Die 2-**Sphäre** $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(2) Die **reelle projektive Ebene** $\mathbb{R}P^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/_\sim$, wobei $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $x = \lambda y$.

(3) Der **abgeschlossene** 3-**Ball** $D^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$.

(4) Der **offene** 3-**Ball** $B^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$.

(5) $S^2/_\sim$, wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$.

(6) Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^3$.

(7) Der 3-**Torus** $T^3 := S^1 \times S^1 \times S^1$, wobei S^1 den Einheitskreis bezeichnet.

(8) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

(9) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.

(10) Der **komplexe projektive Raum** $\mathbb{C}P^2 := S^5/_\sim$, wobei wir S^5 als die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^3$ auffassen und $(z_0, z_1, z_2) \sim (w_0, w_1, w_2)$ genau dann gilt, wenn es ein $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $(z_0, z_1, z_2) = \lambda(w_0, w_1, w_2)$ gilt.

(a) Skizzieren Sie die Räume (1) – (9).

(b) Ist $\mathbb{C}P^2$ eine glatte Mannigfaltigkeit?

(c) Welche dieser Räume sind keine Mannigfaltigkeiten (mit Beweis) und welche dieser Räume sind Mannigfaltigkeiten (ohne Beweis).

(d) Welche der obigen Mannigfaltigkeiten sind homöomorph und welche nicht?

Aufgabe 2.
Wir betrachten die Einheitssphäre S^1 in $\mathbb{C}$ und die reelle projektive Gerade $\mathbb{R}P^1$ als Quotientenraum von S^1 unter der Identifikation $z \sim -z$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^1$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit besitzt und beschreiben Sie diese differenzierbare Struktur, indem Sie einen expliziten Atlas angeben.

(b) Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^1 &\longrightarrow S^1 \\ [z] &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus?

b.w.

Aufgabe 3.
Wir betrachten die Oberfläche W eines Einheitswürfels

$$W := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \max_i(|x_i|) = 1\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass W keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass W eine topologische Mannigfaltigkeit ist und definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf W.

Aufgabe 4.

(a) Beschreiben Sie explizit eine Morse-Funktion von $\mathbb{R}P^2$, die eine Henkelzerlegung mit genau einem 0-Henkel, einem 1-Henkel und einem 2-Henkel auf $\mathbb{R}P^2$ induziert.

(b) Skizzieren Sie eine Einbettung der Fläche Σ_2 von Geschlecht 2 in den $\mathbb{R}^3$, so dass die Höhenfunktion eine Morse-Funktion auf Σ_2 ist, die eine Henkelzerlegung mit genau einem 0-Henkel und genau einem 2-Henkel auf Σ_2 induziert.

(c) Die 2-Sphäre besitzt eine Henkelzerlegung mit einer beliebigen geraden Anzahl von Henkeln, aber keine Henekelzerlegung mit einer ungeraden Anzahl von Henkeln.

Bonusaufgabe.
Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende, orientierbare und geschlossene Fläche F homöomorph ist zu genau einer Fläche Σ_g vom Geschlecht g.

Abgabe: Montag, 16.4.18 **vor** der Vorlesung.