SS 2018 Marc Kegel

Kirby-Kalkül

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie die Schnittform und die Signatur des 4-Torus T^4.

(b) Wie erhält man die Schnittform einer verbundenen Summe aus den Schnittformen der einzelnen Summanden? Was gilt für die Signatur?

(c) Die Schnittform einer geschlossenen, orientierten 4-Mannigfaltigkeit ist unimodular.

(d) **Bonusaufgabe:** Die Schnittform Q_W einer kompakten orientierten 4-Mannigfaltigkeit ist unimodular genau dann, wenn jede Randkomponente von W eine Homologiesphäre ist.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass man jede Homologieklasse $a \in H_2(W;\mathbb{Z})$ in einer kompakten, glatten, orientierten 4-Mannigfaltigkeit W als eingebettete Fläche Σ_a in W realisieren kann.
Hinweis: Verallgemeinern Sie den Beweis aus der Vorlesung für 2-Henkelkörper.

(b) Finden Sie eine Präsentation von $H_2(W;\mathbb{Z})$ einer 4-Mannigfaltigkeit W, bestehend aus einem 0-Henkel und beliebig vielen 1- und 2-Henkeln, ausgehend von einer Darstellung von W als Kirby-Diagramm. Wie berechnet man die darstellende Matrix der Schnittform von W bezüglich dieser Präsentation von $H_2(W;\mathbb{Z})$?

(c) **Bonusaufgabe:** Was passiert wenn auch 3-Henkel vorhanden sind?

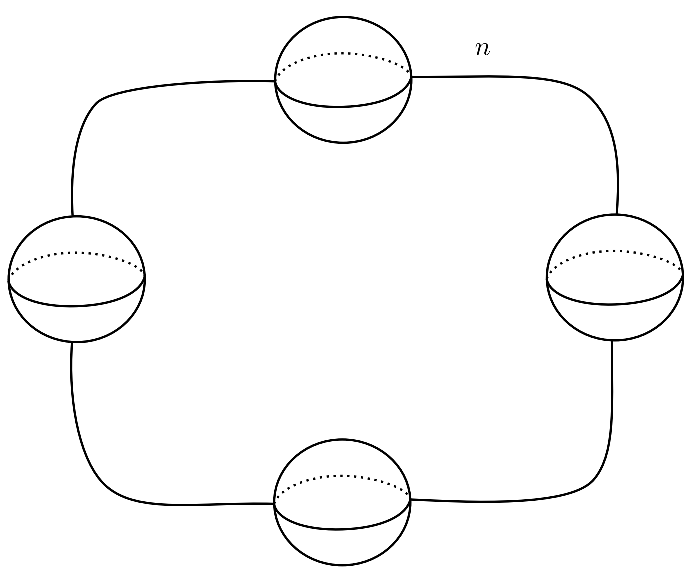

Abbildung 1: D^2-Bündel über T^2 mit Eulerzahl n.

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten das Kirby-Diagramm aus Abbildung 1, indem die Anklebebälle der 1-Henkel vertikal bzw. horizontal identifiziert werden. Zeigen, Sie dass der Anklebeknoten des 2-Henkels nullhomolog ist. Erklären Sie, warum die Rahmung dieses Anklebeknotens dann durch eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ beschrieben werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass das Kirby-Diagramm aus Abbildung 1 das D^2-Bündel über T^2 mit Eulerzahl n darstellt. Berechnen Sie dazu auch die Schnittform dieser Mannigfalktigkeit.

(c) Zeichnen Sie ein Kirby-Diagramm eines D^2-Bündels über einer allgemeinen Fläche Σ_g vom Geschlecht g mit Eulerzahl n.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass jede symmetrische Bilinearform $Q\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Schnittform einer glatten, einfach-zusammenhängenden, kompakten 4-Mannigfaltigkeit ist. Beschreiben Sie Kirby-Diagramme dieser Mannigfaltigkeiten ohne 1-Henkel.

(b) Finden Sie Kirby-Diagramme von einfach-zusammenhängenden, geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten W, deren Schnittform in einer Basis von H_2 durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass diese darstellenden Matrizen nach einem Basiswechsel von $H_2(W, \mathbb{Z})$ zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

transformieren.

Abgabe: Montag, 28.5.18 **vor** der Vorlesung.